

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

Terminale
SCIENCES
MATHÉMATIQUES

Taïrou ALASSANE
Abdou Khadre BARRY
Jules N'DA KOUADIO
Olivier Théodule RAZAFINDRANOVONA
Paul REY
Julien SANHOUIDI
Soma TRAORÉ
Joseph TSOUMTSA

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN
BURKINA FASO
BURUNDI
CAMEROUN
CENTRAFRIQUE

COMORES
CONGO
COTE D'IVOIRE
DJIBOUTI
GABON

GUINÉE
MADAGASCAR
MALI
MAURITANIE
NIGER

RÉP. DÉM. CONGO
RWANDA
SÉNÉGAL
TCHAD
TOGO

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

Valère BONNET
Missa COULIBALY
Gérard DUBOS

Albert LE CALONNEC
Jules N'DA KOUADIO
Soma TRAORÉ

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997, à Niamey en 1998 et à Nouakchott en 1999.

ISSN 1248-587-X

ISBN 978-2-84129-554-8

© EDICEF 2006

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

P R É F A C E

Dans un monde qui évolue rapidement, la maîtrise et l'approfondissement des mathématiques apparaissent comme une condition indispensable au développement des nations, plongées qu'elles sont dans l'ère de la haute technologie et de la mondialisation des marchés.

Voilà pourquoi les mathématiciens africains ont commencé, dès 1983, à organiser des réunions de concertation sur les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques qui jouent un rôle essentiel dans la préparation des jeunes aux défis de l'avenir.

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques que nous proposons aujourd'hui aux élèves de l'Enseignement Secondaire des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien est le fruit de cette collaboration franche et fraternelle qui a abouti, au mois de juin 1992, à l'élaboration et à l'adoption par tous ces pays des programmes des premier et second cycles de l'Enseignement Secondaire.

Elle a pour objectifs majeurs :

- l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité tenant compte du milieu socioculturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;
- l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion ;
- la diminution du coût du manuel pour permettre la réalisation d'un vieux rêve : un élève, un livre.

Les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques, rédigés par des équipes d'enseignants, de chercheurs et de responsables pédagogiques africains, belges et français, s'appuient sur l'environnement des élèves pour les motiver, les faire agir, les amener à comprendre et à agir de nouveau, de manière autonome et créatrice. Les contenus adoptés et les méthodes pédagogiques préconisées ont été systématiquement expérimentés dans plusieurs pays avant que ne soient entreprises les rédactions définitives.

Conformément à notre conception de l'enseignement des mathématiques, nous n'avons pas voulu présenter les leçons sous forme d'exposés théoriques, mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture de documents (le plus souvent empruntés au milieu africain) sont mises en œuvre pour solliciter et provoquer constamment la participation active des élèves.

Insérés dans les leçons, des exercices d'application immédiate permettent l'assimilation des notions étudiées. Placés à la fin des chapitres, des exercices d'entraînement et d'approfondissement permettent aux élèves d'éprouver leur compétence et aux professeurs d'évaluer leur enseignement.

Nous exprimons notre gratitude aux différents Ministres chargés de l'Éducation dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien, ainsi qu'aux responsables de la Coopération Française et de la Coopération Belge qui, par leur compréhension, leurs encouragements et leur soutien constant tant moral que matériel, nous ont permis de réaliser ces ouvrages dans les meilleures conditions possibles.

Enfin, nous espérons que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (professeurs et élèves). Afin d'en améliorer les prochaines éditions, nous accueillerons avec reconnaissance les remarques, les critiques et les suggestions qu'ils voudront bien nous faire et, par avance, nous les en remercions.

Saliou Touré

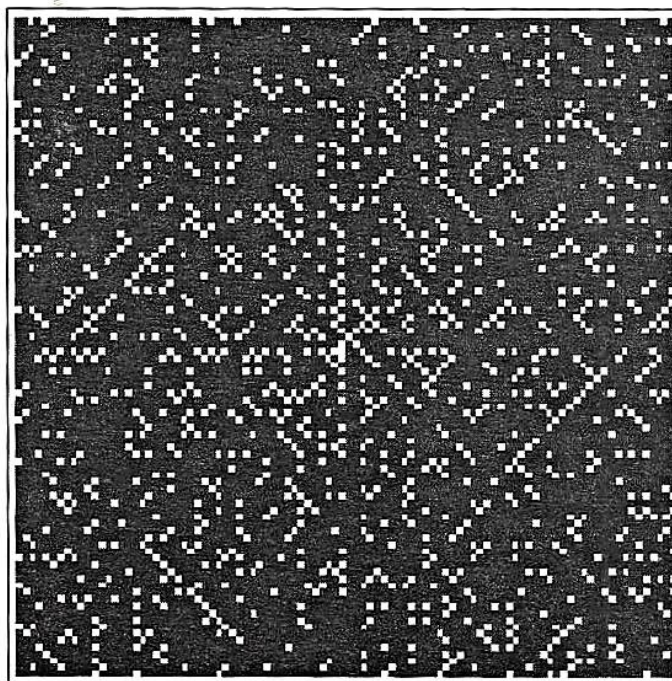
SOMMAIRE

1 ARITHMÉTIQUE	5	9 LIMITES ET CONTINUITÉ	193
1. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$		1. Limites d'une fonction	
2. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$		2. Étude d'une branche infinie	
3. PPCM et PGCD de deux entiers relatifs		3. Continuité d'une fonction	
4. Nombres premiers			
2 CALCUL VECTORIEL	33	10 DÉRIVATION – ÉTUDES DE FONCTIONS	213
1. Barycentre de n points pondérés		1. Dérivation	
2. Lignes de niveau		2. Études de fonctions	
3. Produit vectoriel			
3 NOMBRES COMPLEXES	55	11 PRIMITIVES	
1. Étude algébrique		FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN	233
2. Étude trigonométrique		1. Primitives d'une fonction	
3. Utilisation des nombres complexes		2. Fonction logarithme népérien	
		3. Fonctions comportant $\ln$	
		4. Logarithme décimal	
4 ISOMÉTRIES DU PLAN		12 FONCTIONS EXPONENTIELLES	
APPLICATIONS AFFINES	81	FONCTIONS PUISSANCES	255
1. Composition d'isométries		1. Fonction exponentielle	
2. Classification des isométries du plan		2. Fonctions comportant exp	
3. Applications affines		3. Fonctions puissances	
5 SIMILITUDES	105	13 SUITES NUMÉRIQUES	275
1. Similitudes directes du plan		1. Étude globale d'une suite numérique	
2. Similitudes directes et problèmes de géométrie		2. Limite d'une suite numérique	
		3. Compléments sur les suites	
6 APPLICATIONS DE L'ESPACE	123	14 INTÉGRATION	295
1. Projections		1. Intégrale d'une fonction continue	
2. Translations et homothéties		2. Techniques de calcul intégral	
3. Symétries orthogonales		3. Applications du calcul intégral	
7 CONIQUES	147	15 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	321
1. Étude générale des coniques		1. Généralités	
2. Étude de la parabole		2. Équations du type $y' - ay = 0$	
3. Étude de l'ellipse		3. Équations du type $y'' + ay' + by = 0$	
4. Étude de l'hyperbole			
8 PROBABILITÉS	171	PROBLÈMES DE SYNTHÈSE	335
1. Analyse combinatoire			
2. Calculs de probabilités			
3. Variable aléatoire			
		Index	350

Introduction

L'arithmétique est un des secteurs scientifiques les plus anciens et les plus féconds. Fondée essentiellement par les pythagoriciens pour qui tout était nombre, elle a connu de grands progrès sous l'impulsion de Fermat, Euler, Lagrange, Gauss et Legendre.

Longtemps considérée comme la branche la plus abstraite et la moins utile des mathématiques, elle connaît aujourd'hui de nombreuses applications en informatique, en électronique et en cryptographie.



© Revue Targente, juillet-août 1993.

La spirale d'Ulam (voir p. 25).

SOMMAIRE

1. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$	6
2. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	12
3. PPCM et PGCD de deux entiers relatifs	17
4. Nombres premiers	24

1

Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

1.1. L'ensemble $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

On a : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; n+1; \dots\}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Addition et multiplication dans $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ est muni de deux opérations :

- l'addition, notée $+$;
- la multiplication, notée $\times$.

Pour tous entiers naturels a et b , $a + b$ et $a \times b$ sont des entiers naturels ; on dit que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$ sont des **lois de composition internes**.

Les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{N}$ sont résumées dans le tableau ci-contre où a , b et c désignent des entiers naturels.

Addition dans $\mathbb{N}$	Multiplication dans $\mathbb{N}$
$a + 0 = 0 + a = a$ <i>0 est élément neutre pour +</i>	$a \times 1 = 1 \times a = a$ <i>1 est élément neutre pour $\times$</i>
$a + (b + c) = (a + b) + c$ <i>+ est associative</i>	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ <i>$\times$ est associative</i>
$a + b = b + a$ <i>+ est commutative</i>	$a \times b = b \times a$ <i>$\times$ est commutative</i>
$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ <i>$\times$ est distributive par rapport à +</i>	
$a + c = b + c \Rightarrow a = b$ <i>($c \in \mathbb{N}$)</i>	$a \times c = b \times c \Rightarrow a = b$ <i>($c \in \mathbb{N}^*$)</i>
$a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$	$a \times b = 1 \Rightarrow a = b = 1$

Remarque

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté le produit $a \times b$ est noté : ab .

Ordre dans $\mathbb{N}$

On définit dans $\mathbb{N}$ une relation, notée $\leq$, par : $\forall (a; b) \in \mathbb{N}^2, (a \leq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}, b = a + c)$.

Cette relation possède les propriétés suivantes, dont la démonstration est immédiate.

Propriétés 1

Pour tous entiers naturels a , b et c , on a :

- $a \leq a$ *(la relation $\leq$ est réflexive)*
- si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$ *(la relation $\leq$ est antisymétrique)*
- si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$ *(la relation $\leq$ est transitive).*

On dit que $\leq$ dans $\mathbb{N}$ est une **relation d'ordre**.

Remarque

Deux entiers naturels a et b sont toujours comparables, c'est-à-dire on a toujours : $a \leq b$ ou $b \leq a$; on dit que $\leq$ dans $\mathbb{N}$ est une **relation d'ordre total**.

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété 2

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Exemples

- Le plus petit élément de $\mathbb{N}$ est 0.
- Le plus petit élément de l'ensemble $\{2n + 7, n \in \mathbb{N}\}$ est 7.

Raisonnement par récurrence

Considérons les premiers entiers naturels non nuls et comparons la somme de leurs cubes au carré de leur somme.

On a :	$1^3 = 1$	et	$1^2 = 1$
	$1^3 + 2^3 = 9$	et	$(1 + 2)^2 = 9$
	$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$	et	$(1 + 2 + 3)^2 = 36$
	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$	et	$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 100$

Ces observations conduisent à conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.

Étant dans l'impossibilité d'effectuer une infinité de vérifications, nous allons utiliser un raisonnement par récurrence, dont le principe peut être illustré par la situation suivante : « si, dans une rangée de voitures, la première est verte et derrière toute voiture verte il y a une voiture verte, alors toutes les voitures sont vertes ».

L Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$, qui concerne un entier naturel n , est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0 , on procède en deux étapes :

- on démontre que : $P(n_0)$ est vraie ;
- on démontre que : pour tout entier k supérieur ou égal à n_0 , si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

Exemples

• Soit $P(n)$ la proposition : « $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ ».

– Nous avons déjà vérifié que : $P(1)$ est vraie.

– Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Si $P(k)$ est vraie, on a : $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + \dots + k)^2$;

$$\begin{aligned} \text{donc : } 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= (1 + 2 + \dots + k)^2 + k(k+1)^2 + (k+1)^2 \\ &= \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + 2 \frac{k(k+1)}{2} (k+1) + (k+1)^2 \\ &= \left[\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \right]^2 \\ &= [1 + 2 + \dots + k + (k+1)]^2 ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $P(k+1)$ est vraie.

On en déduit que, pour tout entier naturel n non nul, $P(n)$ est vraie.

• Démontrons que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on a : $n^2 \leq 2^n$.

Soit $Q(n)$ la proposition : « $n^2 \leq 2^n$ ».

– On a : $4^2 \leq 2^4$; donc : $Q(4)$ est vraie.

– Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 4.

Si $Q(k)$ est vraie, on a : $k^2 \leq 2^k$.

$$\text{Or : } \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} ; \text{ donc : } \frac{k+1}{k} \leq \frac{5}{4} \text{ et } (k+1)^2 \leq 2k^2.$$

Donc : $(k+1)^2 \leq 2^{k+1}$; c'est-à-dire : $Q(k+1)$ est vraie.

On en déduit que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $Q(n)$ est vraie.

1.2. L'ensemble $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

On a : $\mathbb{Z} = \{ \dots ; n-1 ; n ; \dots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dots \}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Addition dans $\mathbb{Z}$

L'addition dans $\mathbb{Z}$ possède les propriétés suivantes.

Propriétés I

Pour tous entiers relatifs a , b et c , on a :

- | | |
|--|---|
| (1) $a + b \in \mathbb{Z}$ | (+ dans $\mathbb{Z}$ est une loi de composition interne) |
| (2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ | (+ est associative) |
| (3) $a + 0 = 0 + a = a$ | (0 est élément neutre pour +) |
| (4) $\exists a' \in \mathbb{Z}, a + a' = a' + a = 0$ | (tout élément de $\mathbb{Z}$ a un opposé dans $\mathbb{Z}$) |
| (5) $a + b = b + a$ | (+ est commutative). |

Notation et vocabulaire

- L'opposé d'un entier relatif a est unique ; on le note $-a$ et on l'appelle *symétrique* de a pour $+$.
- Pour résumer les 4 premières propriétés, on dit que $(\mathbb{Z}, +)$ est un **groupe** ; pour résumer les 5 propriétés, on dit que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe **commutatif**.
- Plus généralement, un ensemble muni d'une loi de composition interne est un groupe lorsque :
 - la loi est associative ;
 - l'ensemble possède un élément neutre pour cette loi ;
 - tout élément de l'ensemble admet un symétrique pour cette loi dans cet ensemble.

Ce groupe est commutatif si de plus la loi est commutative.

Exemples

- $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.
 $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.
- Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des isométries du plan.
 $(\mathcal{I}, \circ)$ est un groupe ; en effet :
 - la composée de deux isométries est une isométrie ;
 - la composée des isométries est associative ;
 - l'application identique, qui est une isométrie, est élément neutre pour $\circ$;
 - le symétrique d'une isométrie pour $\circ$ est son isométrie réciproque.

Le groupe $(\mathcal{I}, \circ)$ n'est pas commutatif.

Propriété 2

Pour tous entiers relatifs a, b et c , on a : $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

En effet, si $a + c = b + c$, alors : $a + c + (-c) = b + c + (-c)$; donc : $a = b$.

Multiplication dans $\mathbb{Z}$

La multiplication dans $\mathbb{Z}$ possède les propriétés suivantes.

Propriétés 1

Pour tous entiers relatifs a, b et c , on a :

- | | |
|--|--|
| (1') $a \times b \in \mathbb{Z}$ | ($\times$ dans $\mathbb{Z}$ est une loi de composition interne) |
| (2') $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ | ($\times$ est associative) |
| (3') $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ | ($\times$ est distributive par rapport à $+$) |
| (4') $a \times b = b \times a$ | ($\times$ est commutative) |
| (5') $a \times 1 = 1 \times a = a$ | (1 est élément neutre pour $\times$). |

Vocabulaire

Pour résumer les propriétés (1), (2), (3), (4), (5) de l'addition et les propriétés (1'), (2'), (3'), (4'), (5') de la multiplication, on dit que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un **anneau commutatif unitaire**.

Propriétés 2

Pour tous entiers relatifs a, b et c ($c \neq 0$), on a :

- $a \times 0 = 0$;
- $ca = cb \Rightarrow a = b$.

Démonstration

Nous ne démontrerons que la première propriété.

On a : $aa + a \times 0 = a(a + 0) = aa = aa + 0$; donc : $a \times 0 = 0$.

Ordre dans $\mathbb{Z}$

Pour tous nombres entiers relatifs a et b , on pose : $b - a = b + (-a)$.

On définit dans $\mathbb{Z}$ une relation, notée $\leq$, par : $\forall (a ; b) \in \mathbb{Z}^2, (a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{N})$.

Cette relation est une relation d'ordre total.

Nous admettons les propriétés 1 et 2 suivantes.

Propriétés 1

Soit a et b deux entiers relatifs.

- Pour tout entier relatif c , on a : $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$.
- Pour tout entier c strictement positif, on a : $a \leq b \Leftrightarrow a \times c \leq b \times c$.
- Pour tout entier c strictement négatif, on a : $a \leq b \Leftrightarrow a \times c \geq b \times c$.

Propriétés 2

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Exemple

L'ensemble $\{n \in \mathbb{Z}, (n+2)^2 \leq 6\}$ est borné.

Son plus grand élément est 0 et son plus petit élément est -4.

Propriété 3

Soit a et b deux entiers relatifs tels que : $b \neq 0$.

Il existe un entier relatif n tel que : $nb \geq a$.

On dit que $\mathbb{Z}$ est archimédien.

Démonstration

1^{er} cas : $b \geq 1$

- si $a \geq 0$, il suffit de prendre : $n = a$;
- si $a < 0$, il suffit de prendre : $n = 0$.

2^e cas : $b \leq -1$

On a : $-b \geq 1$; donc il existe un entier relatif m , tel que : $m(-b) \geq a$.

Il suffit donc de prendre : $n = -m$.

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Propriété

Soit a et b deux entiers relatifs tels que : $b \neq 0$.

Il existe un unique couple $(q ; r)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

Les nombres q et r s'appellent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b . Effectuer une division euclidienne c'est déterminer son quotient et son reste.

Démonstration

• *Existence*

Soit A l'ensemble des entiers naturels de la forme : $a - bq$ ($q \in \mathbb{Z}$).

$a + |ba|$ est élément de A ; donc A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet un plus petit élément r .

r est élément de A ; donc $r \geq 0$ et $r = a - bq$ ($q \in \mathbb{Z}$).

De plus, $r < |b|$ (sinon, $r - |b| = a - bq - |b| = a - bq'$; donc, $r - |b|$ serait un élément de A , plus petit que r ; c'est-à-dire, r ne serait plus le plus petit élément de A).

On en déduit qu'il existe un couple $(q ; r)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

• *Unicité*

Soit $(q ; r)$ et $(q' ; r')$ deux couples de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que : $a = bq + r$, $a = bq' + r'$, $0 \leq r < |b|$ et $0 \leq r' < |b|$.

On a : $0 = b(q' - q) + (r' - r)$; donc : $|b| \mid q' - q$ et $|b| \mid r' - r$.

Or : $-|b| < r' - r < |b|$; donc : $|r' - r| < |b|$.

On en déduit que : $|q' - q| = 0$ (si $|q' - q| \geq 1$, on aurait : $|b| \mid q' - q \Rightarrow |b| \leq |b|$).

De plus : $|r' - r| = |b| \mid q' - q$; donc : $q' = q$ et $r' = r$.

Exemples

Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

$$a = 53 \text{ et } b = 12 ; \quad a = -53 \text{ et } b = 12 ;$$

$$\bullet \text{ On a : } 53 = 12 \times 4 + 5 \text{ et } 0 \leq 5 < 12.$$

Donc : 4 et 5 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de 53 par 12.

$$\bullet \text{ On a : } -53 = 12 \times (-4) - 5 \\ = 12 \times (-5) + 7 \text{ et } 0 \leq 7 < 12.$$

Donc : -5 et 7 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de -53 par 12.

$$a = 53 \text{ et } b = -12 ; \quad a = -53 \text{ et } b = -12.$$

$$\bullet \text{ On a : } 53 = (-12) \times (-4) + 5 \text{ et } 0 \leq 5 < 12.$$

Donc : -4 et 5 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de 53 par -12.

$$\bullet \text{ On a : } -53 = (-12) \times 4 - 5 \\ = (-12) \times 5 + 7 \text{ et } 0 \leq 7 < 12.$$

Donc : 5 et 7 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de -53 par -12.

1.3. Numération

Bases de numération

Toutes les civilisations anciennes de Chine, Mésopotamie, Égypte, Amérique du Sud ... ont inventé un système de numération. Mais ces différents systèmes ne permettaient pas d'effectuer facilement les opérations. Le système décimal (base dix) a l'avantage de rendre simples toutes les opérations, grâce à l'invention du 0 et à la valeur de position des chiffres.

Le système binaire (base deux) est adapté à l'informatique qui utilise également le système hexadécimal (base seize) pour réduire la taille de l'écriture des nombres (code ASCII).

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Tout entier naturel x non nul peut s'écrire de façon unique $\sum_{k=0}^p a_k b^k$, où les a_k sont des entiers naturels tels que : $0 \leq a_k < b$ et $a_p \neq 0$.

On écrit : $x = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1 a_0}^b$. Cette écriture est appelée **écriture de x en base b** .

Par convention, les écritures sans « barre » sont en base 10.

Remarques

$$\text{Soit } x = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1 a_0}^b = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

$$\bullet \text{ On a : } x = b(a_p b^{p-1} + a_{p-1} b^{p-2} + \dots + a_2 b + a_1) + a_0, \text{ avec } 0 \leq a_0 < b ;$$

donc $q_0 = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1}^b$ et a_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de x par b .

$$\bullet \text{ On a : } q_0 = b(a_p b^{p-2} + a_{p-1} b^{p-3} + \dots + a_2) + a_1, \text{ avec } 0 \leq a_1 < b ;$$

donc $q_1 = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_2}^b$ et a_1 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de q_0 par b .
On peut ainsi déterminer de proche en proche l'écriture de x en base b .

Exemples

$$\bullet \text{ Écrire dans le système décimal le nombre : } \overline{423}^5.$$

$$\text{On a : } \overline{423}^5 = 4 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^0 \\ = 4 \times 25 + 2 \times 5 + 3 \\ = 113.$$

$$\bullet \text{ Écrire le nombre 127 en base sept.}$$

On effectue les divisions successives par 7, comme indiqué sur le schéma ci-contre.

$$\text{On en déduit que : } 127 = \overline{241}^7.$$

$$\begin{array}{r|l} 127 & 7 \\ 1 & 18 \\ & 4 \end{array} \begin{array}{l} 7 \\ 2 \end{array}$$

■ ■ ■ ■ ■ Système binaire

Pour écrire un nombre en base deux, l'ensemble des chiffres utilisés est : $\{0 ; 1\}$.

Exemples

- Écrire dans le système décimal le nombre : $\overline{10100111001}^2$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } \overline{10100111001}^2 &= 2^{10} + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 \\ &= 1\,024 + 256 + 32 + 16 + 8 + 1 \\ &= 1\,337.\end{aligned}$$

- Écrire le nombre 87 en base deux.

On effectue les divisions successives par 2, comme indiqué sur le schéma ci-contre.

On en déduit que : $87 = \overline{1010111}^2$.

$$\begin{array}{r} 87 \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 43} \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 21} \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 10} \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 5} \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 2} \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 1} \end{array}$$

■ ■ ■ ■ ■ Système hexadécimal

Pour écrire un nombre en base seize, l'ensemble des chiffres utilisés est :

$\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F\}$.

(A, B, C, D, E et F représentent respectivement 10, 11, 12, 13, 14 et 15.)

Exemples

- Écrire dans le système décimal le nombre : $\overline{F0A5}^{16}$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } \overline{F0A5}^{16} &= 15 \times 16^3 + 0 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 5 \times 16^0 \\ &= 61\,440 + 160 + 5 \\ &= 61\,605.\end{aligned}$$

- Écrire le nombre 64 206 en base seize.

On effectue les divisions successives par 16, comme indiqué sur le schéma ci-contre.

On en déduit que : $64\,206 = \overline{FACE}^{16}$.

$$\begin{array}{r} 64\,206 \overline{) 16} \\ 14 \overline{) 4\,012} \overline{) 16} \\ 12 \overline{) 250} \overline{) 16} \\ 10 \overline{) 15} \end{array}$$

1.4. Travaux dirigés

Un damier comporte 1 024 cases sur 1 024 toutes blanches sauf une, peinte en noir, à un endroit non précisé du damier. On dispose, en nombre suffisant, de « triminos » en forme de « L ».

Est-il possible, à l'aide des triminos, de paver toutes les cases blanches du damier, sans déborder et sans que deux triminos ne se chevauchent ?



Un trimino, comme son nom l'indique, recouvre trois cases du damier.

Solution

On remarque que $1\,024 = 2^{10}$.

Soit $P(n)$ la proposition : « un damier de côté 2^n , privé d'une case, peut être pavé par des triminos ».

- Pour $n = 1$, un damier 2×2 privé d'une case est un trimino. Donc $P(1)$ est vraie.

- Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1.

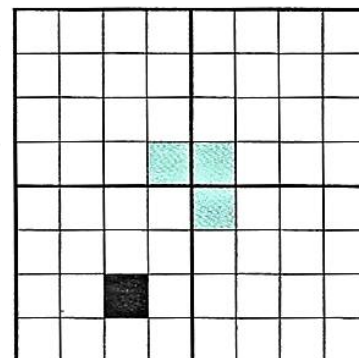
Supposons $P(k)$ vraie et considérons un damier de côté 2^{k+1} , privé d'une case.

Ce damier peut être partagé en quatre « sous-damiers » de côté 2^k . L'un de ces quatre sous-damiers contient la case noire ; on peut donc le paver de triminos.

Posons au centre un trimino à cheval sur les trois autres. Chacun des sous-damiers restants, privé de la case couverte par le trimino, peut être à son tour pavé par des triminos.

Donc $P(k + 1)$ est vraie.

On en déduit que le damier de $1\,024 \times 1\,024$ cases privé d'une case peut être pavé par des triminos.



Exercices

1.a Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\begin{cases} xy \leq 2x \\ x + y = 4 \end{cases}$.

1.b Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système : $\begin{cases} xy = 1 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$.

1.c Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.d Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , on a : $n! \geq 2^{n-1}$.

1.e Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants.

- $a = 59$ et $b = 18$
- $a = -59$ et $b = 18$

- $a = 59$ et $b = -18$
- $a = -59$ et $b = -18$
- $a = 6\,941$ et $b = 358$
- $a = 358$ et $b = 6\,941$.

1.f Déterminer l'entier naturel qui, divisé par 23, a pour reste 1 et qui, divisé par 17, a le même quotient et pour reste 13.

1.g Écrire en base deux chacun des nombres suivants : 9 ; 17 ; 205 ; 864.

1.h Écrire en base dix chacun des nombres suivants : 1011^2 ; 1101101^2 .

2 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

2.1. Multiples et diviseurs d'un entier relatif

Définition et propriétés

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs.

On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$.

Si de plus $b \neq 0$, on dit que b est un diviseur de a ou que b divise a .

Exemples

- On a : $143 = 11 \times 13$; donc : 143 est multiple de 11 et de 13 ;
13 et 11 divisent 143.
- On a : $12 = (-4) \times (-3)$; donc : 12 est multiple de -4 ;
 -4 divise 12.

Remarques

- Tout entier relatif est multiple de 1 et -1 .
1 et -1 divisent tout entier relatif.

- 0 est multiple de tout entier relatif.

Tout entier relatif non nul divise 0, mais 0 ne divise aucun entier relatif.

- Lorsque $b \neq 0$, a est multiple de b (ou b divise a) si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Les propriétés suivantes sont présentées en termes de diviseurs. Nous laissons au lecteur le soin de les énoncer en termes de multiples. Selon le contexte, l'une ou l'autre de ces deux formes pourra être utilisée.

Propriété 1

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

Si b divise a , alors : $|b| \leq |a|$.

Démonstration

Si b divise a , alors il existe un entier relatif non nul q tel que : $a = bq$.

On a : $1 \leq |q|$; donc : $|b| \leq |b| |q|$.

C'est-à-dire : $|b| \leq |a|$.

Propriétés 2

Soit a, b et c trois entiers relatifs ($a \neq 0, b \neq 0$).

(1) a divise a .

(2) Si a divise b et b divise a , alors $a = b$ ou $a = -b$.

(3) Si a divise b et b divise c , alors a divise c .

Démonstration

(1) et (3) découlent immédiatement de la définition de la divisibilité.

(2) D'après la propriété 1, a divise $b \Rightarrow |a| \leq |b|$ et b divise $a \Rightarrow |b| \leq |a|$;

donc : (a divise b et b divise a) $\Rightarrow |a| = |b|$.

Propriété 3

Soit a, b et c trois entiers relatifs ($a \neq 0$).

Si a divise b et c , alors pour tous entiers relatifs p et q , a divise $pb + qc$.

On dit encore que a divise toute combinaison linéaire de b et c dans $\mathbb{Z}$.

Cette propriété découle immédiatement de la définition de la divisibilité.

Exemples

- La somme ou la différence de deux entiers relatifs pairs est un entier relatif pair.
- Le produit d'un entier relatif par un entier relatif pair est un entier relatif pair.

Ensemble des multiples d'un entier relatif

Soit b un entier relatif.

Les multiples de b sont les nombres : $\dots, b \times (-2), b \times (-1), b \times 0, b \times 1, b \times 2, \dots$

Ces nombres sont de la forme : bk , où $k \in \mathbb{Z}$.

Notation

L'ensemble des multiples de b ($b \in \mathbb{Z}$) est noté $b\mathbb{Z}$.

Exemples

- $3\mathbb{Z} = \{\dots; -9; -6; -3; 0; 3; 6; 9; \dots\}$
- $-2\mathbb{Z} = \{\dots; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; \dots\}$
- $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
- $0\mathbb{Z} = \{0\}$.

Remarque

Pour tout entier relatif b , $(b\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.

Ensemble des diviseurs d'un entier relatif

Notation

Soit a un entier relatif.

On note : $\mathcal{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de a .

Exemples

- $\mathcal{D}(4) = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$
- $\mathcal{D}(-6) = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$
- $\mathcal{D}(1) = \{-1; 1\}$
- $\mathcal{D}(0) = \mathbb{Z}^*$.

Remarque

Pour tout entier relatif a non nul, $\mathcal{D}(a)$ est un ensemble fini non vide.

2.2. Congruence modulo n ($n \in \mathbb{N}^*$)

Définition et propriétés immédiates

Définition

Soit n un entier naturel non nul, a et b deux entiers relatifs.
On dit que a est congru à b modulo n si $a - b$ est un multiple de n .

On écrit : $a \equiv b [n]$.

Exemples

• $54 \equiv 4 [10]$; • $-81 \equiv 0 [9]$; • $9 \equiv -1 [10]$; • $-5 \equiv 2 [7]$.

Remarques

- $a \equiv 0 [n] \Leftrightarrow a$ multiple de n ;
- $a \equiv b [n] \Leftrightarrow a - b$ multiple de n ;
- si r désigne le reste de la division euclidienne de a par n , alors : $a \equiv r [n]$.

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition.

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul, a, b et c trois entiers relatifs.

- $a \equiv a [n]$ (la relation de congruence modulo n est réflexive)
- Si $a \equiv b [n]$, alors $b \equiv a [n]$ (la relation de congruence modulo n est symétrique)
- Si $a \equiv b [n]$ et $b \equiv c [n]$, alors $a \equiv c [n]$ (la relation de congruence modulo n est transitive).

Autres propriétés

Propriété 1

Soit n un entier naturel non nul, a et a' deux entiers relatifs, r et r' les restes respectifs des divisions euclidiennes de a et a' par n .

On a : $a \equiv a' [n] \Leftrightarrow r = r'$.

Démonstration

Désignons par q et q' les quotients respectifs des divisions euclidiennes de a et a' par n .

On sait que : $a = nq + r$ et $0 \leq r < n$; $a' = nq' + r'$ et $0 \leq r' < n$.

Donc : $a - a' = (nq - nq') + r - r'$, avec $-n < r - r' < n$.

On en déduit que : $a \equiv a' [n] \Leftrightarrow a - a'$ multiple de n
 $\Leftrightarrow r - r'$ multiple de n
 $\Leftrightarrow r - r' = 0$.

Propriétés 2

Soit n un entier naturel non nul et a, a', b, b' quatre entiers relatifs.

- Si $a \equiv a' [n]$ et $b \equiv b' [n]$, alors $a + b \equiv a' + b' [n]$.
- Si $a \equiv a' [n]$ et $b \equiv b' [n]$, alors $a \times b \equiv a' \times b' [n]$.

On dit que la congruence modulo n est compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration

- On a : $(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b)$;
donc : $(a' - a \in n\mathbb{Z} \text{ et } b' - b \in n\mathbb{Z}) \Rightarrow (a' + b') - (a + b) \in n\mathbb{Z}$.
- On a : $(a' \times b') - (a \times b) = b'(a' - a) + a(b' - b)$;
donc : $(a' - a \in n\mathbb{Z} \text{ et } b' - b \in n\mathbb{Z}) \Rightarrow (a' \times b') - (a \times b) \in n\mathbb{Z}$.

Remarque

Si k est un entier naturel non nul, on a : $a \equiv a' [n] \Rightarrow a^k \equiv a'^k [n]$.

Exemples

On considère les nombres a et b tels que : $a = 137$ et $b = 73$.

Déterminer les restes des divisions euclidiennes de $a + b$, ab , $3a - 2b$ et $a^2 + 3b^3$ par 25.

On a : $a \equiv 12 [25]$ et $b \equiv -2 [25]$.

• On a : $a + b \equiv 10 [25]$.

Or : $0 \leq 10 < 25$; donc 10 est le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 25.

• On a : $ab \equiv -24 [25]$; donc : $ab \equiv 1 [25]$.

Or : $0 \leq 1 < 25$; donc 1 est le reste de la division euclidienne de ab par 25.

• On a : $3a - 2b \equiv 40 [25]$; donc : $3a - 2b \equiv 15 [25]$.

Or : $0 \leq 15 < 25$; donc 15 est le reste de la division euclidienne de $3a - 2b$ par 25.

• On a : $a^2 + 3b^3 \equiv 120 [25]$; donc : $a^2 + 3b^3 \equiv 20 [25]$.

Or : $0 \leq 20 < 25$; donc 20 est le reste de la division de $a^2 + 3b^3$ par 25.

2.3. Utilisations des congruences

Déterminations de restes

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^{2002} par 9.

On a : $7^0 \equiv 1 [9]$; $7^1 \equiv 7 [9]$; $7^2 \equiv 4 [9]$; $7^3 \equiv 1 [9]$.

$$2002 = 3 \times 667 + 1.$$

Donc : $(7^3)^{667} \times 7 \equiv 1^{667} \times 7 [9]$; c'est-à-dire : $7^{2002} \equiv 7 [9]$.

Or : $0 \leq 7 < 9$; donc 7 est le reste de la division euclidienne de 7^{2002} par 9.

2. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 5^n par 3.

On a : $5^0 \equiv 1 [3]$; $5^1 \equiv 2 [3]$; $5^2 \equiv 1 [3]$.

• Si $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), on a : $(5^2)^k \equiv 1^k [3]$; donc : $5^n \equiv 1 [3]$.

• Si $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), on a : $(5^2)^k \times 5 \equiv 1^k \times 5 [3]$; donc : $5^n \equiv 2 [3]$.

Démonstrations de propriétés

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que $n(n^4 - 1)$ est multiple de 5.

On distingue cinq cas : $n \equiv 0 [5]$, $n \equiv 1 [5]$, ..., $n \equiv 4 [5]$.

Les résultats sont regroupés dans le tableau de congruences ci-contre.

On en déduit que $n(n^4 - 1)$ est multiple de 5.

n	0	1	2	3	4
$n^4 - 1$	4	0	0	0	0
$n(n^4 - 1)$	0	0	0	0	0

2. Soit n un entier naturel.

1°) Démontrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est 0, 1 ou 4.

2°) En déduire que les nombres de la forme $8k + 7$ ($k \in \mathbb{Z}$) ne sont pas la somme de trois carrés parfaits.

1°) On distingue huit cas : $n \equiv 0 [8]$, $n \equiv 1 [8]$, ..., $n \equiv 7 [8]$.

Les résultats sont regroupés dans le tableau de congruences ci-contre.

On en déduit que le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est 0, 1

ou 4.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

2°) L'ensemble des restes possibles de la division euclidienne par 8 de la somme de trois carrés parfaits est le même que l'ensemble des restes possibles de la division euclidienne par 8 de la somme de trois éléments de $\{0 ; 1 ; 4\}$.

Le tableau ci-dessous regroupe les restes possibles :

(a, b, c)	(0, 0, 0)	(0, 0, 1)	(0, 0, 4)	(0, 1, 1)	(0, 1, 4)	(0, 4, 4)	(1, 1, 1)	(1, 1, 4)	(1, 4, 4)	(4, 4, 4)
reste	0	1	4	2	5	0	3	6	1	4

On en déduit que les nombres de la forme $8k + 7$ ($k \in \mathbb{Z}$) ne sont pas la somme de trois carrés parfaits.

Congruences particulières

Les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 11 ont été utilisés au collège. Nous allons, grâce aux congruences, démontrer ces résultats et les généraliser à la détermination des restes de certaines divisions.

Dans cette partie, x désigne un entier naturel non nul et $\overline{a_p a_{p-1} \dots a_0}$ son écriture décimale.

On a : $x = a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0$.

1. Congruences modulo 5

a) Démontrer que : $x \equiv a_0 \pmod{5}$.

b) Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 5 de 1 826, 3 252 et 27 325.

a) On a : $10 \equiv 0 \pmod{5}$; donc, pour tout entier naturel k non nul : $10^k \equiv 0 \pmod{5}$.

On en déduit que : $a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 \equiv a_0 \pmod{5}$.

b) Les restes des divisions euclidiennes par 5 de 1 826, 3 252 et 27 325 sont respectivement 1, 2 et 0.

2. Congruences modulo 4 et modulo 25

a) Démontrer que : $x \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{4}$ et $x \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{25}$.

b) Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 4 et 25 de 1 826, 3 252 et 27 325.

a) On a : $10^2 \equiv 0 \pmod{4}$ et $10^2 \equiv 0 \pmod{25}$;

donc, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 : $10^k \equiv 0 \pmod{4}$ et $10^k \equiv 0 \pmod{25}$.

On en déduit que : $a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 \equiv a_1 10^1 + a_0 \pmod{4}$

et : $a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 \equiv a_1 10^1 + a_0 \pmod{25}$.

b) Les restes des divisions euclidiennes par 4 de 1 826, 3 252 et 27 325 sont respectivement 2, 0 et 1.

Les restes des divisions euclidiennes par 25 de 1 826, 3 252 et 27 325 sont respectivement 1, 2 et 0.

3. Congruences modulo 9 et 3

a) Démontrer que : $x \equiv \sum_{k=0}^p a_k \pmod{9}$ et $x \equiv \sum_{k=0}^p a_k \pmod{3}$.

b) Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 9 et 3 de 1 826, 3 252 et 27 325.

a) On a : $10 \equiv 1 \pmod{9}$ et $10 \equiv 1 \pmod{3}$;

donc, pour tout entier naturel k : $10^k \equiv 1 \pmod{9}$ et $10^k \equiv 1 \pmod{3}$.

On en déduit que : $a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 \equiv \sum_{k=0}^p a_k \pmod{9}$

et : $a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 \equiv \sum_{k=0}^p a_k \pmod{3}$.

b) On a : $1\ 826 \equiv 1 + 8 + 2 + 6 \pmod{9}$; donc le reste de la division de 1 826 par 9 est 8.

De même, les restes des divisions euclidiennes par 9 de 3 252 et 27 325 sont respectivement 3 et 1.

Les restes des divisions euclidiennes par 3 de 1 826, 3 252 et 27 325 sont respectivement 2, 0 et 1.

4. Congruences modulo 11

a) Démontrer que : $x \equiv \sum_{k=0}^p (-1)^k a_k \pmod{11}$.

b) Déterminer les restes de la division euclidienne par 11 de 1 826, 3 252 et 27 325.

a) On a : $10 \equiv -1 \pmod{11}$; donc, pour tout entier naturel k : $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$.

On en déduit que : $a_p 10^p + a_{p-1} 10^{p-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 \equiv \sum_{k=0}^p (-1)^k a_k \pmod{11}$.

b) On a : $1\ 826 \equiv -1 + 8 - 2 + 6 \pmod{11}$; donc le reste de la division euclidienne de 1 826 par 11 est 0.

De même, les restes des divisions euclidiennes par 11 de 3 252 et 27 325 sont respectivement 7 et 1.

Exercices

- 2.a Combien y a-t-il de multiples de 11 compris entre $-1\,000$ et $1\,000$?
- 2.b Déterminer l'ensemble des diviseurs de 60.
- 2.c Déterminer les entiers naturels n et p tels que : $n^2 - p^2 = 28$.
- 2.d Démontrer que : $2^{32} \equiv 1 \pmod{5}$.
- 2.e Soit n et d deux entiers relatifs non nuls tels que d divise n .
Démontrer que pour tous entiers relatifs a et b on a : $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$.
- 2.f Sans effectuer la division euclidienne, vérifier que 23 157 est divisible par 9.
- 2.g Déterminer les couples $(x ; y)$ de chiffres tels que le nombre d'écriture décimale $724xy$ soit multiple de 9.
- 2.h Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
1. Démontrer que si bc divise a , alors b divise a et c divise a .
2. La réciproque est-elle vraie ?

3 PPCM et PGCD de deux entiers relatifs

3.1. PPCM de deux entiers relatifs

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et A l'ensemble des entiers naturels non nuls appartenant à $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

$|ab| \in A$; donc A , partie non vide de $\mathbb{N}$, admet un plus petit élément.

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

On appelle **plus petit commun multiple** de a et b , et on note $\text{PPCM}(a ; b)$, le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Exemples

- On a : $12\mathbb{Z} = \{\dots ; -24 ; -12 ; 0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; 84 ; 96 ; \dots\}$
 $16\mathbb{Z} = \{\dots ; -32 ; -16 ; 0 ; 16 ; 32 ; 48 ; 64 ; 80 ; 96 ; \dots\}$
 $12\mathbb{Z} \cap 16\mathbb{Z} = \{\dots ; -48 ; 0 ; 48 ; 96 ; \dots\}$.

Donc : $\text{PPCM}(12 ; 16) = 48$.

- Déterminer le PPCM de 5 et 7.

Les multiples strictement positifs de 7 sont dans l'ordre croissant : 7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 ...

Le plus petit d'entre eux qui est multiple de 5 est 35 ; donc : $\text{PPCM}(5 ; 7) = 35$.

Remarques

- Pour tous entiers relatifs non nuls a et b , on a : $\text{PPCM}(a ; b) = \text{PPCM}(|a| ; |b|)$.

Dans une recherche de PPCM, on peut donc se ramener à la recherche du PPCM de deux entiers naturels non nuls.

- Pour tous entiers naturels non nuls a et b , on a : $\text{Max}(a ; b) \leq \text{PPCM}(a ; b) \leq ab$.
- Pour tous entiers naturels non nuls a et b , on a : $\text{PPCM}(a ; b) = a \Leftrightarrow a \in b\mathbb{Z}$.

Propriété 1

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et μ leur PPCM.

On a : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$.

Démonstration

- Soit k un élément de $\mu\mathbb{Z}$.
 k est multiple de μ et μ est multiple de a et de b ; donc k est multiple de a et de b .
 Tout multiple de μ est multiple de a et de b ; donc : $\mu\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

- Soit k un élément de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Désignons par q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de k par μ ; on a : $r = k - \mu q$.
 k et μ sont des multiples communs à a et b ; donc : $r \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

De plus, μ est le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ et $0 \leq r < \mu$; donc : $r = 0$.

On en déduit que : $k \in \mu\mathbb{Z}$.

Donc : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subset \mu\mathbb{Z}$.

- On a : $\mu\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subset \mu\mathbb{Z}$; donc : $\mu\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Exemple

$\text{PPCM}(12 ; 16) = 48$ et $12\mathbb{Z} \cap 16\mathbb{Z} = 48\mathbb{Z}$.

Propriété 2

Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls.

On a : $\text{PPCM}(ka ; kb) = k \text{PPCM}(a ; b)$.

Démonstration

Posons : $\mu = \text{PPCM}(a ; b)$ et $\mu_1 = \text{PPCM}(ka ; kb)$.

- Il existe deux entiers naturels non nuls a' et b' tels que : $\mu = aa'$ et $\mu = bb'$.

On a : $k\mu = kaa'$ et $k\mu = kbb'$.

$k\mu$ est un multiple commun à ka et kb ; donc : $k\mu \geq \mu_1$.

- Il existe deux entiers naturels non nuls a'' et b'' tels que : $\mu_1 = kaa''$ et $\mu_1 = kbb''$.

On a : $aa'' = bb''$; aa'' est un multiple commun à a et b , donc : $aa'' \geq \mu$.

On en déduit que : $\mu_1 \geq k\mu$.

- On a : $k\mu \geq \mu_1$ et $\mu_1 \geq k\mu$. Donc : $\text{PPCM}(ka ; kb) = k \text{PPCM}(a ; b)$.

Exemple

$\text{PPCM}(120 ; 168) = \text{PPCM}(24 \times 5 ; 24 \times 7) = 24 \times \text{PPCM}(5 ; 7) = 24 \times 35 = 840$.

3.2. PGCD de deux entiers relatifs

Définition et propriétés

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b , noté $\mathcal{D}(a ; b)$, contient 1 et est fini. Il admet donc un plus grand élément, strictement positif.

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

On appelle plus grand commun diviseur de a et b , et on note $\text{PGCD}(a ; b)$, le plus grand élément de $\mathcal{D}(a ; b)$.

Exemples

- On a : $\mathcal{D}(24) = \{-24 ; -12 ; -8 ; -6 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$
 $\mathcal{D}(30) = \{-30 ; -15 ; -10 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30\}$
 $\mathcal{D}(24 ; 30) = \{-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.

Donc : $\text{PGCD}(24 ; 30) = 6$.

- Déterminer le PGCD de 5 et 12.

On a : $\mathcal{D}(5) = \{-5 ; -1 ; 0 ; 1 ; 5\}$ et 5 ne divise pas 12.

Donc : $\text{PGCD}(5 ; 12) = 1$.

Remarques

- Pour tous entiers relatifs non nuls a et b , on a : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(|a| ; |b|)$.

Dans une recherche de PGCD, on peut donc se ramener à la recherche du PGCD de deux entiers naturels non nuls.

- Pour tous entiers naturels non nuls a et b , on a : $1 \leq \text{PGCD}(a ; b) \leq \text{Min}(a ; b)$.
- Pour tous entiers naturels non nuls a et b , on a : $\text{PGCD}(a ; b) = b \Leftrightarrow b \in \mathcal{D}(a)$.

Propriété 1

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et δ leur PGCD.

On a : $\mathcal{D}(a ; b) = \mathcal{D}(\delta)$.

Démonstration

• Soit d un élément de $\mathcal{D}(\delta)$.

d divise δ et δ divise a et b ; donc d divise a et b .

Tout diviseur de δ divise a et b ; donc : $\mathcal{D}(\delta) \subset \mathcal{D}(a ; b)$.

• Soit d un élément de $\mathcal{D}(a ; b)$.

Désignons par μ le PPCM de d et δ ; on a : $\delta \leq \mu$.

a est multiple de d et de δ , donc a est multiple de μ . De même b est multiple de μ .

μ divise a et b ; donc : $\mu \leq \delta$.

On a : $\text{PPCM}(d ; \delta) = \delta$. Donc d divise δ ; c'est-à-dire : $d \in \mathcal{D}(\delta)$.

• On en déduit que : $\mathcal{D}(a ; b) = \mathcal{D}(\delta)$.

Exemple

$\text{PGCD}(24 ; 30) = 6$ et $\mathcal{D}(24 ; 30) = \mathcal{D}(6)$.

Propriété 2

Soit a , b et k trois entiers naturels non nuls.

On a : $\text{PGCD}(ka ; kb) = k \text{PGCD}(a ; b)$.

Démonstration

Posons : $\delta = \text{PGCD}(a ; b)$ et $\delta_1 = \text{PGCD}(ka ; kb)$.

• Il existe deux entiers naturels non nuls a' et b' tels que : $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.

On a : $ka = k\delta a'$ et $kb = k\delta b'$.

$k\delta$ divise ka et kb , donc $k\delta$ divise δ_1 .

Il existe un entier naturel non nul q tel que : $\delta_1 = qk\delta$ (1).

• Il existe deux entiers naturels non nuls a'' et b'' tels que : $ka = \delta_1 a''$ et $kb = \delta_1 b''$.

On a : $a = q\delta a''$ et $b = q\delta b''$; $q\delta$ divise a et b , donc : $q\delta \leq \delta$.

On en déduit que : $q = 1$.

• En remplaçant q par 1 dans (1), on obtient : $\text{PGCD}(ka ; kb) = k \text{PGCD}(a ; b)$.

Exemple

On a : $\text{PGCD}(205 ; 492) = \text{PGCD}(41 \times 5 ; 41 \times 12) = 41 \times \text{PGCD}(5 ; 12) = 41$.

Propriété 3

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et δ leur PGCD.

Un entier relatif m est multiple de δ si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $m = au + bv$.

Il revient au même de dire que : $\delta\mathbb{Z} = \{au + bv, (u ; v) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Démonstration

• Soit u et v deux entiers relatifs.

au et bv sont multiples de δ , donc $au + bv$ est multiple de δ .

• Considérons l'ensemble A des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $au + bv$ ($u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$). On a : $a = a \times 1 + b \times 0$; donc : $a \in A$.

A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément p .

Il existe deux entiers relatifs u' et v' tels que : $p = au' + bv'$.

Effectuons la division euclidienne de a par p ; on obtient : $a = pq + r$, avec $0 \leq r < p$.

Donc : $r = a(1 - qu') + b(-qv')$; r est de la forme : $au + bv$.

Si r était non nul, il serait un élément de A strictement inférieur à p . Donc : $r = 0$ et p divise a .

De même p divise b ; donc p divise δ .

Or, p est multiple de δ ; donc : $p = \delta$.

- Soit m un multiple de δ .

Il existe un entier relatif k tel que : $m = k\delta$; donc : $m = a(ku) + b(kv)$.

Exemple

On a : $\text{PGCD}(205 ; 492) = 41$ et $82 \in 41\mathbb{Z}$;

donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $82 = 205u + 492v$.

En effet : $82 = 205 \times (-2) + 492 \times 1$ ou $82 = 205 \times 10 + 492 \times (-4)$.

Algorithme d'Euclide

Propriétés 1

Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b > 0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b .

- Si $r = 0$, alors $\mathcal{D}(a ; b) = \mathcal{D}(b)$
- Si $r \neq 0$, alors $\mathcal{D}(a ; b) = \mathcal{D}(b ; r)$.

Démonstration

- Si $r = 0$, alors $a = bq$ et le résultat est immédiat.

- Si $r \neq 0$, alors $a = bq + r$, avec $0 < r < b$.

– On a : a combinaison linéaire de b et r dans $\mathbb{Z}$; donc tout diviseur de b et r est un diviseur de a .

On en déduit que : $\mathcal{D}(b ; r) \subset \mathcal{D}(a ; b)$.

– De plus : $r = a - bq$; c'est-à-dire : r combinaison linéaire de a et b dans $\mathbb{Z}$.

Donc tout diviseur de a et b est un diviseur de r .

On en déduit que : $\mathcal{D}(a ; b) \subset \mathcal{D}(b ; r)$.

Propriétés 2

Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b > 0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b .

- Si $r = 0$, alors $\text{PGCD}(a ; b) = b$
- Si $r \neq 0$, alors $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$.

Démonstration

On utilise les propriétés précédentes.

- Si $r = 0$, les ensembles $\mathcal{D}(a ; b)$ et $\mathcal{D}(b)$ sont égaux et ont le même plus grand élément.

Donc : $\text{PGCD}(a ; b) = b$.

- Si $r \neq 0$, les ensembles $\mathcal{D}(a ; b)$ et $\mathcal{D}(b ; r)$ sont égaux et ont le même plus grand élément.

Donc : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$.

Exemple

Nous avons vu que : $\text{PGCD}(492 ; 205) = 41$.

– Or : $492 = 205 \times 2 + 82$; donc 82 est le reste de la division euclidienne de 492 par 205.

On obtient : $\text{PGCD}(492 ; 205) = \text{PGCD}(205 ; 82)$.

– De même : $205 = 82 \times 2 + 41$; donc 41 est le reste de la division euclidienne de 205 par 82.

On obtient cette fois : $\text{PGCD}(205 ; 82) = \text{PGCD}(82 ; 41) = 41$.

On déduit de ce qui précède une nouvelle méthode de recherche du PGCD, appelée algorithme d'Euclide.

M

Pour déterminer le PGCD de deux entiers naturels a et b tels que $a > b > 0$, on peut effectuer les divisions euclidiennes successives suivantes :

- division de a par b , pour obtenir $a = b \times q_0 + r_0$ (avec $0 \leq r_0 < b$) ;
- division de b par r_0 , pour obtenir $b = r_0 \times q_1 + r_1$ (avec $0 \leq r_1 < r_0 < b$) ;
- division de r_0 par r_1 , pour obtenir $r_0 = r_1 \times q_2 + r_2$ (avec $0 \leq r_2 < r_1 < r_0 < b$) ;
- ...

La suite (r_n) , positive et strictement décroissante, s'annule après un nombre fini de divisions euclidiennes et le dernier reste non nul obtenu est égal à $\text{PGCD}(a ; b)$.

Exemple

Déterminer le PGCD de 304 939 et 151 097.

Posons : $\delta = \text{PGCD}(304\,939 ; 151\,097)$.

- $304\,939 = 151\,097 \times 2 + 2\,745$; donc : $\delta = \text{PGCD}(151\,097 ; 2\,745)$.
- $151\,097 = 2\,745 \times 55 + 122$; donc : $\delta = \text{PGCD}(2\,745 ; 122)$.
- $2\,745 = 122 \times 22 + 61$; donc : $\delta = \text{PGCD}(122 ; 61)$.
- $122 = 61 \times 2 + 0$; donc : $\delta = 61$.

On adopte généralement la disposition pratique ci-contre.

dividende	304 939	151 097	2 745	122
diviseur	151 097	2 745	122	61
reste	2 745	122	61	0

3.3. Nombres premiers entre eux

Définition et propriétés

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

On dit que a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Les seuls diviseurs communs de a et b sont alors 1 et -1 .

Exemples

- On a : $\text{PGCD}(4 ; 17) = 1$; donc 4 et 17 sont premiers entre eux.
- 60 et 135 sont tous les deux divisibles par 3 ; donc ils ne sont pas premiers entre eux.

Remarque

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et d un diviseur commun à a et b .

On a : $a = da'$, $b = db'$ et $\text{PGCD}(a ; b) = d \text{PGCD}(a' ; b')$.

d est le PGCD de a et b si et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.

Théorème de Bézout¹

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$.

Ce théorème est une conséquence de la propriété 3, établie au §3.2.

Exemples

- On a : $49 \times 54 + 115 \times (-23) = 1$; donc : $\text{PGCD}(49 ; 115) = 1$.
 - Deux entiers consécutifs non nuls n et $n + 1$ sont premiers entre eux.
- En effet, on a : $n \times (-1) + (n + 1) \times 1 = 1$.

Théorème de Gauss²

Soit a , b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

Démonstration

Il existe trois entiers relatifs k , u et v tels que : $bc = ka$ et $au + bv = 1$.

On a : $auc + bvc = c$; donc : $a(uc + kv) = c$.

On en déduit que a divise c .

¹ Étienne Bézout, mathématicien français – 1730 - 1783.

² Carl Friedrich Gauss, mathématicien, physicien et astronome allemand – 1777 - 1855.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $2x - 5y = 0$.

• Soit $(x; y)$ une solution de (E). On a : $2x = 5y$.

2 divise $5y$ et est premier avec 5 ; donc, d'après le théorème de Gauss, 2 divise y .

Il existe un entier relatif k tel que : $y = 2k$.

On en déduit que : $x = 5k$.

• Réciproquement, pour tout entier relatif k , le couple $(5k; 2k)$ est solution de (E).

• L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\{(5k; 2k), k \in \mathbb{Z}\}$.

Conséquences

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

• Si a et b sont premiers entre eux et si a et c sont premiers entre eux, alors a et bc sont premiers entre eux.

• Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux, alors ab divise c .

• Si a et b sont premiers entre eux, alors : $\text{PPCM}(a; b) = ab$.

Démonstration

• Il existe quatre entiers relatifs u, v, u', v' tels que : $au + bv = 1$ et $au' + cv' = 1$.

En multipliant membre à membre ces deux égalités, on obtient : $a(uau' + ucv' + bv u') + bc(vv') = 1$.

Donc a est premier avec bc .

• Il existe un entier relatif a' tel que : $c = aa'$.

b divise aa' et est premier avec a ; donc il existe un entier relatif b' tel que : $a' = bb'$.

On en déduit que : $c = abb'$; donc ab divise c .

• a et b divisent $\text{PPCM}(a; b)$, a et b sont premiers entre eux ; donc ab divise $\text{PPCM}(a; b)$.

ab est multiple de a et de b , donc ab est multiple de $\text{PPCM}(a; b)$.

On en déduit que : $\text{PPCM}(a; b) = ab$.

Propriété

Soit n un entier naturel non nul et a, b, c trois entiers relatifs ($a \neq 0$).

Si a est premier avec n et si $ab \equiv ac [n]$, alors $b \equiv c [n]$.

Démonstration

On a : $ab \equiv ac [n] \Leftrightarrow a(b - c) \in n\mathbb{Z}$.

n divise $a(b - c)$ et est premier avec a , donc n divise $b - c$.

On en déduit que : $b \equiv c [n]$.

Relation entre le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels

Propriété

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, δ leur PGCD et μ leur PPCM.

On a : $\delta\mu = ab$.

Démonstration

Les entiers relatifs a' et b' tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ sont premiers entre eux.

Donc : $\text{PPCM}(a; b) = \delta \text{PPCM}(a'; b') = \delta a'b'$.

On en déduit que : $\delta\mu = ab$.

Exemple

Déterminer le PPCM de 304 939 et 151 097.

On a vu que : $\text{PGCD}(304\,939; 151\,097) = 61$;

donc : $\text{PPCM}(304\,939; 151\,097) = \frac{304\,939 \times 151\,097}{61} = 755\,333\,903$.

3.4. Exemples d'utilisation

Détermination des coefficients d'une égalité de Bézout

1. Démontrer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que 564 et 271 sont premiers entre eux.
2. En déduire deux entiers relatifs u et v tels que : $564u + 271v = 1$.

Solution

1. On a : $564 = 271 \times 2 + 22$; donc : $\text{PGCD}(564 ; 271) = \text{PGCD}(271 ; 22)$.
On a : $271 = 22 \times 12 + 7$; donc : $\text{PGCD}(271 ; 22) = \text{PGCD}(22 ; 7)$.
On a : $22 = 7 \times 3 + 1$; donc : $\text{PGCD}(22 ; 7) = \text{PGCD}(7 ; 1) = 1$.

Les nombres 564 et 271 sont premiers entre eux.

2. Utilisons les divisions euclidiennes précédentes, de la dernière à la première.

$$\begin{aligned}\text{On a : } 1 &= 22 + 7 \times (-3) \\ &= 22 + (271 - 22 \times 12) \times (-3) \\ &= 271 \times (-3) + 22 \times 37 \\ &= 271 \times (-3) + (564 - 271 \times 2) \times 37 \\ &= 564 \times 37 + 271 \times (-77).\end{aligned}$$

On peut donc prendre : $(u ; v) = (37 ; -77)$.

Équations du type $ax + by = c$

D'après la propriété 3 §3.2, une équation d'inconnue $(x ; y)$ dans $\mathbb{Z}^2$ du type $ax + by = c$, a des solutions si et seulement si c est multiple du PGCD de a et b .

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $34x - 15y = 2$.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $34x - 15y = 0$.
2. Déterminer une solution $(x_0 ; y_0)$ de (E).
3. Résoudre (E).

Solution

1. Soit $(x ; y)$ une solution de (E'). On a : $34x = 15y$.

15 divise $34x$ et est premier avec 34 ; donc, d'après le théorème de Gauss, 15 divise x .

Il existe un entier relatif k tel que : $x = 15k$.

On en déduit que : $y = 34k$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k , le couple $(15k ; 34k)$ est solution de (E').

L'ensemble des solutions de (E') est donc : $\{(15k ; 34k), k \in \mathbb{Z}\}$.

2. On remarque que : $4 \times 34 = 136$ et $9 \times 15 = 135$; donc : $34 \times 8 - 15 \times 18 = 2$.

On peut prendre : $(x_0 ; y_0) = (8 ; 18)$.

3. Soit $(x ; y)$ un couple d'entiers relatifs.

$$\text{On a : } 34x - 15y = 0 \Leftrightarrow 34(x + x_0) - 15(y + y_0) = 2.$$

On en déduit que les solutions de (E) sont les couples $(x + x_0 ; y + y_0)$ où $(x ; y)$ est solution de (E').

L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\{(15k + 8 ; 34k + 18), k \in \mathbb{Z}\}$.

Systèmes

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S_1) : \begin{cases} x \equiv -1 [34] \\ x \equiv 1 [15] \end{cases}$.

Solution

Soit x une solution de (S_1) . Il existe deux entiers relatifs p et q tels que : $x = 34p - 1$ et $x = 15q + 1$.

On en déduit que : $34p - 15q = 2$.

D'après l'étude précédente, il existe un entier relatif k tel que : $(p ; q) = (15k + 8 ; 34k + 18)$.

Réciproquement, soit k un entier relatif.

Posons : $x = 34(15k + 8) - 1$.

On a : $x \equiv -1 [34]$ et $x \equiv 1 [15]$.

L'ensemble des solutions de (S_1) est donc : $\{510k + 271, k \in \mathbb{Z}\}$.

[À noter qu'on obtient le même résultat en posant : $x = 15(34k + 18) + 1$.]

2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système $(S_2) : \begin{cases} \text{PGCD}(x ; y) = 12 \\ x + y = 60 \end{cases}$.

Solution

$$\begin{cases} \text{PGCD}(x ; y) = 12 \\ x + y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12x' \text{ et } y = 12y' \\ \text{PGCD}(x' ; y') = 1 \\ x' + y' = 5 \end{cases}$$

On obtient : $x' = 1$ et $y' = 4$; $x' = 2$ et $y' = 3$; $x' = 3$ et $y' = 2$; $x' = 4$ et $y' = 1$.

L'ensemble des solutions de (S_2) est donc : $\{(12 ; 48), (24 ; 36), (36 ; 24), (48 ; 12)\}$.

Exercices

3.a Déterminer le PPCM des entiers relatifs a et b dans chacun des cas suivants.

- $a = 48$ et $b = 12$
- $a = -3$ et $b = 8$
- $a = 15$ et $b = 21$
- $a = 160$ et $b = 200$.

3.b Déterminer le PGCD des entiers relatifs a et b dans chacun des cas suivants.

- $a = 24$ et $b = 24$
- $a = 14$ et $b = 31$
- $a = -75$ et $b = -25$
- $a = 132$ et $b = -96$.

3.c À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD de 2 867 et 3 431.

3.d Démontrer que deux nombres impairs consécutifs sont premiers entre eux.

3.e À l'aide du théorème de Bézout, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \text{PGCD}(2n+1; 3n+1) = 1$.

3.f Démontrer que le produit de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 6.

3.g Dans chacun des cas suivants, déterminer le PGCD des entiers relatifs a et b , puis en déduire leur PPCM.

- $a = 24$ et $b = 56$
- $a = 300$ et $b = 750$
- $a = 1\,386$ et $b = 546$
- $a = -3\,015$ et $b = 3\,975$.

4 Nombres premiers

4.1. Généralités

Définition et propriété

Définition

On dit qu'un entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et p .

Exemples

- 2, 3, 5, 7, 11 et 13 sont des nombres premiers.
- 12 et 49 ne sont pas des nombres premiers.

Remarques

- 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.
- Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

Propriété

Tout entier naturel n différent de 0 et de 1 admet au moins un diviseur premier.

Démonstration

Considérons l'ensemble A défini par : $A = \{d \in \mathbb{D}(n), d \geq 2\}$.

$n \in A$; donc A , partie non vide de $\mathbb{N}$, admet un plus petit élément p .

Le nombre p , comme tous les éléments de A , est un entier naturel différent de 0 et de 1.

On en déduit que p est un nombre premier ; en effet si ce n'était pas le cas, il admettrait un diviseur q entier naturel autre que 1 ou lui-même et q serait un élément de A strictement plus petit que p .

L'ensemble des nombres premiers

L'algorithme suivant, dû à Ératosthène de Cyrène (276-194 av. J.-C.), permet de déterminer les nombres premiers inférieurs à un nombre donné n . On écrit les entiers naturels successifs compris entre 1 et n .

• On barre 1 qui n'est pas premier.

• Le nombre 2 est premier. On barre tous les multiples de 2 autres que 2.

• Le premier nombre non barré est 3, qui est donc premier.

On barre tous les multiples de 3 autres que 3.

• On itère le procédé jusqu'à la fin du tableau.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Propriété 1

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration

Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers distincts notés $p_1, p_2, \dots, p_s$ et considérons le nombre n défini par : $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_s + 1$.

D'après la propriété précédente, n admet au moins un diviseur premier p .

Donc p est l'un des nombres $p_1, p_2, \dots, p_s$.

On en déduit que p divise $n - p_1 \times p_2 \times \dots \times p_s$, c'est-à-dire 1.

Ce qui est contradictoire avec le fait que p est premier.

Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Remarque

Depuis l'Antiquité, les mathématiciens s'interrogent sur la répartition des nombres premiers. Est-elle régulière ? Présente-t-elle des particularités ?

• Jacques Hadamard a démontré en 1896 qu'il y a environ $\frac{n}{\ln(n)}$ nombres premiers inférieurs à n et que cette approximation est d'autant plus précise que n est grand.

• En 1963, Stanislas Ulam place les entiers naturels en spirale, comme l'indique la figure ci-contre, puis noircit les cases des nombres non premiers.

Il obtient une constellation présentant des alignements surprenants, appelée spirale d'Ulam (cf. introduction du chapitre).

• Le plus grand nombre premier connu, depuis 1998, est : $2^{3\,021\,377} - 1$.

4	5	6
3	0	7
2	1	8

Propriété 2

Tout entier naturel n , autre que 0 et 1 et non premier, admet au moins un diviseur premier d tel que :

$$1 < d^2 \leq n.$$

Démonstration

Si n est un entier naturel non premier, autre que 0 et 1, il admet au moins un diviseur strictement compris entre 1 et n . Notons d le plus petit d'entre eux.

On a : $n = d \times d'$, avec $1 < d \leq d'$; donc : $1 < d^2 \leq n$.

De plus d est premier (sinon il ne serait pas le plus petit diviseur strictement positif de n).

Cette propriété fournit un critère d'arrêt lorsqu'on cherche à savoir si un entier naturel est premier.

Pour déterminer si un entier naturel n est premier, on essaie de le diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$. Si aucun de ces nombres ne divise n , on peut dire que n est premier.

Exemple

Démontrer que 137 est un nombre premier.

On a : $\sqrt{137} \approx 11,704$.

137 n'est divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11 ; de plus, $13^2 > 137$.

Donc 137 est un nombre premier.

4.2. Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème fondamental

Considérons l'entier naturel 14 394 744.

Il peut se décomposer en produit de facteurs premiers ; en effet : $14\,394\,744 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 13^4$.

Plus généralement, nous admettons le théorème fondamental suivant.

Théorème

Soit n entier naturel ($n \geq 2$).

• Il existe des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_k$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \text{ et } p_1 < p_2 < \dots < p_k.$$

• Cette décomposition est unique.

Exemple

Pour décomposer 4 872 en produit de facteurs premiers, on peut utiliser la disposition pratique ci-contre.

On obtient : $4\,872 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 29$.

4 872	2
2 436	2
1 218	2
609	3
203	7
29	29
1	

Exemples d'utilisation

1. Détermination de PPCM et de PGCD

Déterminer le PPCM et le PGCD de 700 et 18 375.

Solution

On a : $700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$ et $18\,375 = 3 \times 5^3 \times 7^2$.

Donc : $\text{PPCM}(700 ; 18\,375) = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7^2 = 73\,500$.

$\text{PGCD}(700 ; 18\,375) = 5^2 \times 7 = 175$.

2. Détermination de l'ensemble des diviseurs positifs d'un entier naturel

a) Quel est le nombre de diviseurs positifs de 14 553 ?

b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des diviseurs positifs de 14 553.

Solution

a) On a : $14\,553 = 3^3 \times 7^2 \times 11$.

Les diviseurs positifs de 14 553 sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $3^\alpha \times 7^\beta \times 11^\gamma$, où $\alpha \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$, $\beta \in \{0 ; 1 ; 2\}$ et $\gamma \in \{0 ; 1\}$.

Le nombre de diviseurs positifs de 14 553 est donc : $4 \times 3 \times 2 = 24$.

b) Chaque diviseur positif de 14 553 est le produit de 3 nombres, à raison d'un par chacune des trois lignes du tableau ci-contre.

3^α	1	3	9	27
7^β	1	7	49	
11^γ	1	11		

On en déduit que les diviseurs positifs de 14 553 sont :

$1 \times 1 \times 1$	$1 \times 1 \times 11$	$1 \times 7 \times 1$	$1 \times 7 \times 11$	$1 \times 49 \times 1$	$1 \times 49 \times 11$
$3 \times 1 \times 1$	$3 \times 1 \times 11$	$3 \times 7 \times 1$	$3 \times 7 \times 11$	$3 \times 49 \times 1$	$3 \times 49 \times 11$
$9 \times 1 \times 1$	$9 \times 1 \times 11$	$9 \times 7 \times 1$	$9 \times 7 \times 11$	$9 \times 49 \times 1$	$9 \times 49 \times 11$
$27 \times 1 \times 1$	$27 \times 1 \times 11$	$27 \times 7 \times 1$	$27 \times 7 \times 11$	$27 \times 49 \times 1$	$27 \times 49 \times 11$

Donc : $\mathcal{D} = \{1 ; 3 ; 7 ; 9 ; 11 ; 21 ; 27 ; 33 ; 49 ; 63 ; 77 ; 99 ; 147 ; 189 ; 231 ; 297 ; 441 ; 539 ; 693 ; 1\,323 ; 1\,617 ; 2\,079 ; 4\,851 ; 14\,553\}$.

4.3. Travaux dirigés

Le petit théorème de Fermat³

Soit p un nombre premier.

1°) a) Démontrer que pour tout entier naturel i strictement compris entre 0 et p , C_p^i est multiple de p .
b) En déduire que pour tous entiers relatifs a et b , on a : $(a + b)^p \equiv a^p + b^p [p]$.

2°) a) Démontrer que : $\forall a \in \mathbb{N}, a^p \equiv a [p]$.

b) En déduire que pour tout entier naturel a premier avec p , on a : $a^{p-1} \equiv 1 [p]$.

Solution

1°) a) On a : $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p}{i} \times \frac{(p-1)!}{(i-1)!(p-i)!} = \frac{p}{i} C_{p-1}^{i-1}$; donc : $p C_{p-1}^{i-1} = i C_p^i$.

p divise $i C_p^i$ et est premier avec i ; donc C_p^i est multiple de p .

b) On a : $(a + b)^p = a^p + \left(\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i a^i b^{p-i} \right) + b^p$.

Or : $\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i a^i b^{p-i} \equiv 0 [p]$; donc : $(a + b)^p \equiv a^p + b^p [p]$.

2°) a) Pour tout entier naturel a , considérons la proposition $P(a)$: « $a^p \equiv a [p]$ ».

• $P(0)$ est vraie.

• Soit k un entier naturel.

Si $P(k)$ est vraie, on a : $k^p \equiv k [p]$.

Or, d'après la question précédente, on a : $(k + 1)^p \equiv k^p + 1^p [p]$.

Donc : $(k + 1)^p \equiv k + 1 [p]$; c'est-à-dire : $P(k + 1)$ est vraie.

On en déduit que $P(a)$ est vraie pour tout entier naturel a .

b) Soit a un entier naturel premier avec p .

On a : $a \times a^{p-1} \equiv a \times 1 [p]$; donc : $a^{p-1} \equiv 1 [p]$.

Les propriétés démontrées à la question 2 sont connues sous le nom de petit théorème de Fermat.

Exercices

4.a Vérifier si les nombres suivants sont premiers : 103 ; 119 ; 137 ; 211.

4.b a) Pour tout entier naturel n non multiple de 5, le nombre $6n + 5$ est-il premier ?
b) Pour tout entier naturel n , le nombre $n^2 - n + 41$ est-il premier ?

4.c Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants : 120 ; 126 ; 336 ; 735.

4.d En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, mettre les fractions suivantes sous forme irréductible :

$$\frac{495}{315} ; \frac{780}{204} ; \frac{918}{1\,242}$$

4.e En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, dresser la liste des diviseurs des nombres suivants : 90 ; 120 ; 245.

4.f Dans chacun des cas suivants, décomposer a et b en produits de facteurs premiers et déterminer leur PGCD et leur PPCM :

$$\bullet a = 4\,312 \quad \text{et} \quad b = 6\,776$$

$$\bullet a = 28\,665 \quad \text{et} \quad b = 412\,375.$$

4.g Décomposer 1 925 et 6 860 en produit de facteurs premiers, puis calculer :

$$\frac{51}{1\,925} + \frac{3}{6\,860}$$

³ Pierre de Fermat, mathématicien français – 1601 - 1665.

Exercices

APPRENTISSAGE

Raisonnement par récurrence

1 Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a) \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$b) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2 Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a) \sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$c) \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$$

3 Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on a : $2^n > 5(n+1)$.

4 Démontrer que n droites du plan déterminent au maximum $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ régions.

5 Soit a et b deux nombres réels.

a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

b) En déduire que pour tout entier n impair et supérieur à 2, on a :

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

6 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système : $\begin{cases} xy = -1 \\ 2x + y^3 = 1 \end{cases}$.

7 Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants.

- $a = -2\,372$ et $b = 44$
- $a = 735$ et $b = -412$
- $a = -235$ et $b = -17$
- $a = 50\,764$ et $b = 327$.

8 La division euclidienne de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r . Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

9 Déterminer les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 a un reste égal au carré du quotient.

10 Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b . Sachant que $a + b + r = 3\,025$ et $q = 50$, rétablir la division.

11 Écrire en base deux les nombres suivants : 85 ; 104 ; 3 607.

12 Écrire dans le système décimal les nombres suivants, écrits en base deux :

$$\overline{10110}^2 ; \overline{111000}^2 ; \overline{10101010}^2 ; \overline{110100011}^2.$$

13 Écrire $2^6 - 1$ en base deux.

14 b est un entier naturel supérieur à 1. Écrire $(b+1)^2$ en base b .

(On distinguera deux cas : $b = 2$ et $b \neq 2$.)

Multiples et diviseurs

15 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 = -1$ [5].

16 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 3x + 4 = 0$ [7].

17 Démontrer que la somme des cubes de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 9.

18 1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $A = n^2 - n + 1$.

2. En déduire les entiers n tels que le nombre A soit divisible par 7.

3. Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $B = (2\,753)^2 - 2\,753 + 1$.

19 Démontrer que pour tous entiers naturels a , b et c , on a : $a^3 + b^3 + c^3 = 0$ [7] $\Rightarrow abc \equiv 0$ [7].

20 1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $11^{1\,999}$ par 7.

2. Plus généralement, déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 11^n par 7.

21 Déterminer les entiers relatifs n tels que la fraction $\frac{n+17}{n-1}$ soit un entier relatif.

22 Démontrer que pour tout entier naturel n , le nombre $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 2 et par 3.

23 p et q sont deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9. Parmi les nombres suivants, un seul est divisible par 7 quelles que soient les valeurs de p et q . Trouver ce nombre.

$$a) \overline{qpq\,pqp}^{10} \quad b) \overline{qqq\,ppp}^{10}$$

$$c) \overline{qpq\,qpp}^{10} \quad d) \overline{qpq\,ppq}^{10}$$

24 1. Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système décimal.

Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 2 et 9.

2. Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 3 et 11.

3. Un nombre s'écrit $\overline{1x1xyy}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 63.

25 Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

- a) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ divisible par 7
 b) $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ divisible par 11
 c) $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ divisible par 111.

(On pourra faire un raisonnement par récurrence.)

26 Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

- a) $5^{2n} - 3^n$ divisible par 11
 b) $7^n - 1$ divisible par 6
 c) $3^{2n} - 2^n$ divisible par 7
 d) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ divisible par 17.

(On pourra utiliser les congruences.)

27 Soit n un entier non divisible par 7.

Démontrer que l'un des nombres $n^3 - 1$ et $n^3 + 1$ est divisible par 7.

28 Soit n un entier naturel.

- Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^4 par 5 ?
- Démontrer que $n^5 - n$ est divisible par 5.

29 Soit n un entier naturel.

- Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.
- Dans le système décimal, déterminer suivant les valeurs de n le chiffre des unités du nombre :

$$A = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^n.$$

30 Quels sont les entiers naturels n pour lesquels $15 \times 3^n - 3$ est divisible par 7 ?

31 Démontrer que parmi cinq entiers relatifs, on peut toujours en choisir trois dont la somme est divisible par 3.

PGCD et PPCM

Nombres premiers entre eux

32 Déterminer le PPCM des entiers a et b dans chacun des cas suivants.

- $a = 24$ et $b = 56$
 • $a = 180$ et $b = 450$.

33 Déterminer le PGCD des entiers a et b dans chacun des cas suivants.

- $a = 48$ et $b = 32$
 • $a = 1\ 640$ et $b = 492$
 • $a = 168$ et $b = 2\ 160$
 • $a = 343$ et $b = 1\ 225$.

34 Déterminer les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que : $\text{PGCD}(a ; b) = 7$ et $a + b = 105$.

35 Déterminer le PGCD des entiers a et b dans chacun des cas suivants.

- $a = 1\ 455$ et $b = 335$
 • $a = 3\ 604$ et $b = 4\ 452$
 • $a = 13\ 860$ et $b = 4\ 438$
 • $a = 323\ 232$ et $b = 232\ 323$.

36 Déterminer le PPCM des entiers a et b dans chacun des cas suivants.

- $a = 162$ et $b = 252$
 • $a = 6\ 974$ et $b = 9\ 287$.

37 Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants.

- a) $\begin{cases} \text{PGCD}(x ; y) = 354 \\ x + y = 5\ 664 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \text{PPCM}(x ; y) = 168 \\ x \times y = 1\ 008 \end{cases}$

38 Pour tout couple $(a ; b)$ d'entiers naturels, on désigne par μ leur PPCM et par δ leur PGCD.

1. Déterminer les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que : $2\mu + 3\delta = 11$.

2. Dresser la liste des diviseurs de 108.

Déterminer les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que : $\mu - 3\delta = 108$ et $10 < \delta < 15$.

39 1. Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1998 ?

2. Pour tout couple $(a ; b)$ d'entiers naturels, on désigne par μ leur PPCM et par δ leur PGCD.

Déterminer les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que : $\mu^2 - 3\delta^2 = 1998$.

40 Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

- $n^2(n^2 - 1)$ divisible par 12 ;
- $n^2(n^4 - 1)$ divisible par 60 ;
- $n(n^6 - 1)$ divisible par 42.

41 Démontrer que les fractions suivantes sont irréductibles.

- a) $\frac{n}{2n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}$) b) $\frac{7n+3}{5n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}$)
 c) $\frac{n^2}{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$) d) $\frac{2n(n+1)}{2n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

42 Démontrer que si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, il en est de même pour les fractions :

$$\frac{a+b}{ab} \quad \frac{ab}{a^2+b^2} \quad \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \quad \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

43 1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $2n-1$.

2. Démontrer que pour tout entier relatif n , les nombres $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.

3. En déduire les entiers relatifs n pour lesquels la fraction $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ est un entier relatif.

44 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') :

$$2x - 3y = 0.$$

2. Déterminer dans $\mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation (E) :

$$2x - 3y = 3.$$

3. Résoudre (E).

45 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x + 11y = 203$.

46 1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers naturels x et y tels que :

$$45x - 28y = 1.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $45x - 28y = 1$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $45x - 28y = 6$.

47 Un entier naturel n a :

- pour reste 5 dans la division euclidienne par 8,
- pour reste 4 dans la division euclidienne par 11.

Quel est le reste de la division euclidienne de n par 88 ?

48 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 1 [3] \\ x \equiv 2 [7] \end{cases}$

Nombres premiers

49 Vérifier si les nombres suivants sont premiers : 649 ; 1 001 ; 1 999 ; 71 487 ; 257 323.

50 Démontrer que si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3, alors $n^2 + 4n - 5$ est un nombre qui n'est jamais premier.

51 Soit $A = 100!$.

1. Quelle est la puissance de 2 dans la factorisation de A ?
2. Par combien de zéros A se termine-t-il ?

52 Déterminer les entiers naturels n tels que :
a) $\text{PPCM}(n; 6) = 96$; b) $\text{PPCM}(n; 72) = 216$.

53 Déterminer l'entier naturel n tel que :
 $600 < n < 1\ 100$ et $\text{PGCD}(n; 630) = 105$.

54 Quel est le plus petit entier naturel ayant 15 diviseurs positifs ?

55 Déterminer les entiers naturels, écrits avec deux chiffres, dont le nombre de diviseurs est le plus grand possible.

56 Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n, n + 2, n + 6, n + 8, n + 12$ et $n + 14$ soient premiers.

57 Déterminer l'entier naturel n , écrit avec 4 chiffres, tel que les restes des divisions euclidiennes de 39 818 et 62 566 par n sont respectivement 37 et 53.

58 Démontrer qu'un entier naturel n possède un nombre impair de diviseurs positifs si et seulement si n est un carré parfait.

59 Déterminer les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que : $\text{PPCM}(a; b) = 504$ et $a + b = 135$.

60 Déterminer les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que : $\text{PGCD}(a; b) = 42$ et $\text{PPCM}(a; b) = 1\ 680$.

- 61** 1. Décomposer 469 en produit de facteurs premiers.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^3 - y^3 = 469$.

APPROFONDISSEMENT

62 Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls. Démontrer que si $ab < c$, alors : $a + b \leq c$.

63 On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2 \equiv -1 \pmod{25}$.

1. Démontrer que (E) se ramène à chercher des nombres x tels que : $x^2 = 49 + 25k$ ($k \in \mathbb{Z}$).
2. Résoudre alors l'équation (E).

64 Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Démontrer que : $\text{PGCD}(13a + 8b; 5a + 3b) = \text{PGCD}(a; b)$.

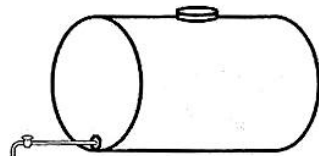
65 Soit n un entier relatif. Démontrer que si 11 ne divise pas $(n - 4)$, alors $(2n + 3)$ et $(n + 7)$ sont premiers entre eux.

66 On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain triangulaire de côtés 132 m, 156 m et 204 m, de telle sorte qu'il y ait un arbre à chaque sommet du triangle et que les arbres soient également espacés. Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres soit exprimée en un nombre entier de mètres ?

67 On dispose de dix poids, dont les masses respectives sont 1, 2, 2^2 , 2^3 , ..., 2^8 et 2^9 grammes.

1. Quelle est la masse maximale M que l'on peut équilibrer sur une balance avec ces dix poids ?
2. Démontrer que tout objet, dont la masse est un nombre entier de grammes inférieur ou égal à M , peut être équilibré avec ces dix poids.

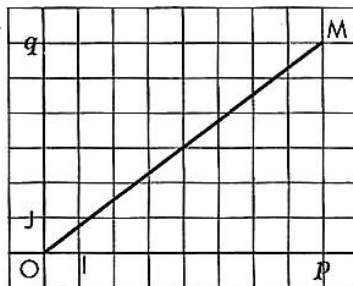
68 À l'aide de deux seaux dont les capacités en litres sont C_1 et C_2 , on veut mettre exactement 1 litre d'eau dans une citerne que l'on peut remplir ou vider à volonté.



1. Est-ce possible lorsque $C_1 = 7$ et $C_2 = 4$? Lorsque $C_1 = 6$ et $C_2 = 4$?
2. Étudier le cas général.

69 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Soit p et q deux entiers naturels non nuls et M le point de coordonnées $(p; q)$. Déterminer, en fonction de p et q , le nombre de points du segment $[OM]$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.



70 Soit a, b et c trois entiers naturels tels que :
 $a^2 + b^2 = c^2$.
Démontrer que abc est divisible par 60.

71 On désigne par $\phi(n)$ le nombre d'entiers naturels inférieurs à n et premiers avec n .

1. Calculer $\phi(5)$, $\phi(13)$, $\phi(15)$, $\phi(36)$.
2. p et q sont deux nombres premiers distincts. Calculer $\phi(p)$, $\phi(pq)$, $\phi(p^2)$.

72 Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 3, y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n; y_n)$ sont sur la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :

$$2x - y - 5 = 0.$$

2. En déduire x_{n+1} en fonction de x_n .
3. Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatifs.
4. Soit n un entier naturel.
a) Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.

b) Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux.

5. a) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1.$$

b) Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4} .

c) En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5.

73 On considère les nombres A et B tels que :

$$A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$$

$$B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Vérifier que : $10^3 - 1 = 9 \times 111$;

$$10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13.$$

2. Démontrer que :

• $\forall n \in \mathbb{N}$, A est divisible par 111 ;

• si n est impair, alors A est divisible par 7 et par 13.

3. a) Si n est impair, démontrer que B est divisible par 7, 11 et 13.

b) Si n est pair, déterminer le reste de la division euclidienne de B par 7, 11, 13 et 111.

74 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$661x - 991y = 1.$$

2. Soit (u_n) et (v_n) les suites arithmétiques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3, v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 991 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + 661 \end{cases}$$

Déterminer tous les couples $(p; q)$ d'entiers naturels inférieurs à 2 000, tels que : $u_p = v_q$.

75 Soit à résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$(E) : 15x^2 - 7y^2 = 9.$$

1. a) Démontrer que dans le système décimal, le dernier chiffre d'un carré est 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

b) En déduire que $7y^2 + 9$ n'est pas divisible par 5.

2. Résoudre l'équation (E).

76 Soit à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(E) : 3x^2 + 3x + 7 = y^3.$$

1. Vérifier que (E) est équivalente à :

$$3(x^2 + x + 2) = y^3 - 1.$$

2. Résoudre l'équation (E).

(On pourra distinguer 3 cas :

$$y = 0 [3], y \equiv 1 [3] \text{ et } y \equiv 2 [3].)$$

77 On désigne par $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers naturels premiers. On se propose de résoudre dans $\mathbb{P}^2$ l'équation (E) $x^2 - y^2 = pq$, où p et q sont deux entiers naturels premiers.

1. Étudier le cas où $p = q = 2$.

2. Étudier le cas où $q = 2$ et $p > 2$.

3. a) On suppose que : $2 < q \leq p$.

• Démontrer que y est nécessairement égal à 2.

• En déduire que si $p - q \neq 4$, (E) n'a pas de solution.

b) On suppose que : $p - q = 4$.

Démontrer que si $(x; 2)$ est solution de (E), alors les nombres q, x et p forment une suite arithmétique de raison 2.

En déduire que (E) n'a de solution que si $q = 3$ et $p = 7$.
(On pourra démontrer que pour tout entier n , l'un des trois nombres $n, n + 2, n + 4$ est divisible par 3.)

Quelle est la solution de (E) dans ce cas ?

78 On se propose de résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$(E) : 5^x - 4^x = y^2.$$

1. Vérifier que $(1; 1)$ est solution de (E).

Dans la suite du problème, on suppose que x est différent de 1.

2. L'objet de cette question est de démontrer que x est pair.

a) Quels sont les entiers naturels n tels que : $n^2 \equiv 5 [8]$?

b) Démontrer que si x est impair, alors $5^x - 4^x \not\equiv 5 [8]$.

c) Conclure.

3. On pose : $x = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$).

a) Démontrer que (E) est équivalente à :

$$(5^m - y)(5^m + y) = 2^{4m}.$$

b) En déduire qu'il existe deux entiers p et q tels que :

$$5^m - y = 2^p \text{ et } 5^m + y = 2^q, \text{ avec } p + q = 4m.$$

c) Déduire de 3. b) que : $\begin{cases} p = 1 \\ q = 4m - 1 \\ 5^m = 1 + 4^{2m-1} \end{cases}$

En déduire que : $m \leq 1$.

(On pourra faire un raisonnement par l'absurde.)

4. Déterminer les solutions de (E).

79 On se propose de déterminer tous les entiers

relatifs k tels que $k^4 + k^3 + k^2 + k + 1$ soit un carré parfait.

On pose : $q^2 = k^4 + k^3 + k^2 + k + 1$ ($q \in \mathbb{Z}$).

1. Établir les égalités suivantes :

$$4q^2 = (2k^2 + k)^2 + 3k^2 + 4k + 4 \quad (1)$$

$$4q^2 = (2k^2 + k + 1)^2 - (k - 3)(k + 1) \quad (2)$$

$$4q^2 = (2k^2 + k + 2)^2 - 5k^2 \quad (3).$$

2. Déduire de (1) et (3) que :

$$(2k^2 + k)^2 < 4q^2 \leq (2k^2 + k + 2)^2.$$

3. Déduire de la question 2. que :

$$4q^2 = (2k^2 + k + 1)^2 \quad (4)$$

ou

$$4q^2 = (2k^2 + k + 2)^2 \quad (5).$$

4. Déterminer les valeurs de k en considérant les égalités (2) et (4), (3) et (5).

80 1. Soit p et q deux entiers relatifs premiers

entre eux, n un entier naturel non nul.

Démontrer que p et q^n sont premiers entre eux.

2. Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers relatifs admettant une racine rationnelle

le $\frac{p}{q}$ (p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux).

Démontrer que p divise a_0 et q divise a_n .

3. Factoriser le polynôme : $3x^3 + 7x^2 + 7x + 4$.

4. Résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation :

$$x^5 + 127x^4 - 12x^3 + x^2 + 7x - 1 = 0.$$

81 1. Soit n un entier naturel congru à 3 modulo 4.

Démontrer que n admet un diviseur premier congru à 3 modulo 4.

(On pourra remarquer qu'un produit de nombres congrus à 1 modulo 4 est congru à 1 modulo 4.)

2. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

(On pourra utiliser un nombre n de la forme $2 \times p! - 1$.)

82 On appelle nombre triangulaire tout entier

naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2 + a}{2}$ ($a \in \mathbb{N}$).

1. Démontrer que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés.
2. Étudier la réciproque.

83 Nombres amiables – Nombres parfaits

1. On appelle diviseur strict d'un entier naturel n tout diviseur de n positif et autre que lui-même. Déterminer les diviseurs stricts de 220.

2. On appelle nombres amiables deux entiers naturels tels que chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.

Vérifier que : 220 et 284 sont amiables ;
17 296 et 18 416 sont amiables.

3. On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (c'est-à-dire amiable avec lui-même).

a) Le nombre 28 est-il parfait ?

b) Déterminer un nombre premier p tel que $2^4 p$ soit un nombre parfait.

c) Soit n et p deux entiers naturels, tels que p soit premier. Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que $2^n p$ soit parfait ?

Dresser la liste des nombres parfaits de cette forme, pour $n < 10$.

84 Nombres de Mersenne

1. Soit a et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Démontrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

2. On appelle nombre de Mersenne, tout entier naturel M_n de la forme $M_n = 2^n - 1$, où n est un entier naturel premier.

a) Vérifier que M_2 , M_3 , M_5 et M_7 sont premiers.

b) Qu'en est-il de M_{11} ?

Le Père Marin Mersenne (1558–1648) fut le premier à tenter de dresser la liste des nombres premiers de la forme $2^n - 1$.

Il le fit, avec quelques erreurs, jusqu'à $n = 257$.

On sait aujourd'hui que, jusqu'à $n = 5\,000$, $2^n - 1$ est premier lorsque n prend l'une des valeurs suivantes : 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1 279, 2 203, 2 281, 3 217, 4 253 et 4 423.

Le plus grand nombre de Mersenne premier connu depuis 1998 est $2^n - 1$, avec $n = 3\,021\,377$.

85 Nombres de Fermat

On appelle nombre de Fermat tout entier naturel F_n de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$, où n est un entier naturel.

1. a) Calculer F_0 , F_1 , F_2 et F_3 .

Vérifier que ces nombres sont premiers.

b) Vérifier que F_5 est divisible par 641.

2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, l'écriture décimale de F_n se termine par 7. (On pourra utiliser les congruences.)

4. Soit k un entier naturel non nul.

a) En posant $a = 2^{2^k}$, démontrer que :

$$\frac{F_{n+k} - 2}{F_n} = \frac{a^{2^k} - 1}{a + 1}$$

b) En déduire que F_n divise $F_{n+k} - 2$.

5. Déduire de la question précédente que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.

86 Des urnes et des billes

Trois urnes contiennent des billes. Chaque urne est suffisamment grande pour contenir la totalité des billes. La seule opération autorisée est de doubler le nombre de billes contenues dans une urne en prélevant des billes dans une autre.

Démontrer qu'il est possible, quel que soit la configuration initiale, d'obtenir une configuration où l'une des urnes est vide.

2

Calculs vectoriels

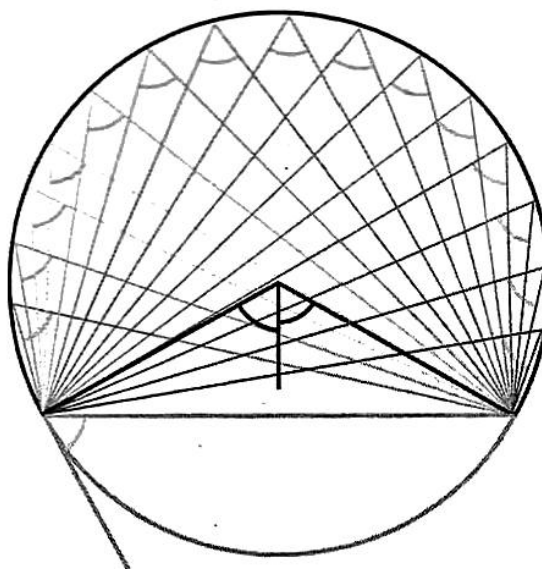
Introduction

Deux outils géométriques sont au cœur de ce chapitre : barycentre et produit vectoriel.

Le premier, introduit et utilisé dans le plan en classe de première fait l'objet d'une généralisation à l'espace.

Le second est une nouveauté qui permet de résoudre, géométriquement ou analytiquement, certains problèmes de calcul de distances, d'angles, d'aires et de volumes.

Les lignes ou surfaces de niveau constituent un intermédiaire entre ces outils.



Une illustration du théorème de l'angle inscrit.

© Jergema.

SOMMAIRE

1.	Barycentre de n points pondérés	34
2.	Lignes de niveau	39
3.	Produit vectoriel	44

$\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{E}$) désigne le plan (respectivement l'espace).

$\mathcal{V}$ (respectivement $\mathcal{W}$) désigne l'ensemble des vecteurs du plan (respectivement de l'espace).

1 Barycentre de n points pondérés

Dans cette leçon, sauf mention contraire, l'ensemble de référence peut être aussi bien le plan $\mathcal{P}$ que l'espace $\mathcal{E}$.

1.1. Théorème et définition

Théorème

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés.

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$.

Démonstration

Soit O un point.

$$\text{On a : } \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{GO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i.$$

$$\text{Donc : } \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i.$$

Or, le vecteur $\frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i$ est parfaitement déterminé par les points O et $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$;

donc, le point G existe et est unique.

Définition

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés tels que : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

On appelle barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'unique point G tel que : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$.

On note : $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ ou $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_1 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$.

1.2. Propriétés

Homogénéité

Propriété

Le barycentre de plusieurs points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

En effet, pour tout nombre réel k non nul, on a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n k\alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$.

Remarque

Le barycentre de points pondérés affectés de coefficients égaux est appelé isobarycentre de ces points.

Réduction de la somme $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i$

Propriété

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés.

Pour tout point M , on a :

- si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{MG}$ où G est le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$;
- si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, alors le vecteur $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i$ est indépendant de M .

Démonstration

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{MG} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{MG}$.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, alors $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^n \alpha_i$

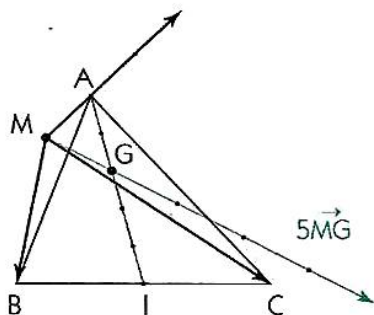
$$\text{et } \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i = - \left(\sum_{i=2}^n \alpha_i \right) \vec{MA}_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \vec{MA}_i = \sum_{i=2}^n \alpha_i (\vec{A}_1 \vec{M} + \vec{MA}_i) = \sum_{i=2}^n \alpha_i \vec{A_1 A_i}.$$

Donc, le vecteur $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i$ est indépendant de M .

Exemples

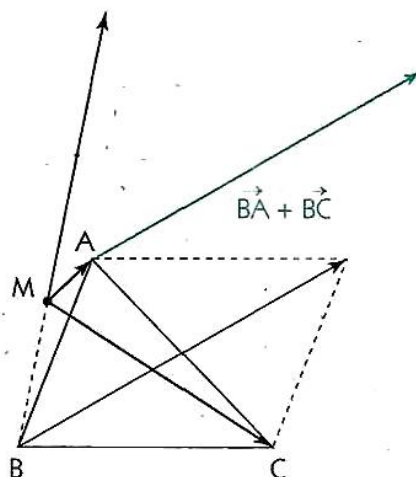
Soit ABC un triangle et M un point du plan.

Réduire les sommes : $3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$
 $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$.



$$3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 5\vec{MG}$$

où $G = \text{bar} \{(A,3), (B,1), (C,1)\}$.



$$\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{BA} - 2\vec{MB} + \vec{MB} + \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{BC}.$$

Coordonnées du barycentre

Propriété

L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés et G leur barycentre.

Si $(x_i; y_i; z_i)$ sont les coordonnées du point A_i ($1 \leq i \leq n$) et $(x; y; z)$ celles de G ,

$$\text{alors : } x = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad z = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

En effet, d'après la propriété de réduction de $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i$, on a pour $M = O$: $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \vec{OG}$.

Exemple

Soit ABCD un tétraèdre.

L'isobarycentre de ABCD est le point G tel que : $4\vec{AG} = \vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$.

Donc dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$, G a pour coordonnées $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$.

Barycentres partiels

Propriété

On ne change pas le barycentre de n points pondérés ($n \geq 3$) en remplaçant p d'entre eux ($1 < p < n$), dont la somme des coefficients est non nulle, par leur barycentre partiel affecté de cette somme.

Cette propriété est aussi appelée propriété d'associativité.

Démonstration

Soit G le barycentre de n points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ ($n \geq 3$).

Supposons, par exemple, que pour un entier naturel p ($1 < p < n$) on ait $\sum_{i=1}^p \alpha_i \neq 0$ et désignons par H le barycentre des p points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$.

On peut toujours considérer, en changeant éventuellement l'ordre, que ces p points sont les p premiers.

On a : $\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{GA}_i = \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \right) \vec{GH}$ (d'après la propriété de réduction).

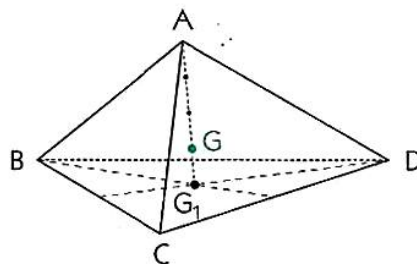
$$\begin{aligned} \text{Donc : } \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{GA}_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \right) \vec{GH} + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0} \end{aligned}$$

C'est-à-dire : G est le barycentre des points pondérés $(H, \sum_{i=1}^p \alpha_i), (A_{p+1}, \alpha_{p+1}), \dots, (A_n, \alpha_n)$.

Exemple

Soit ABCD un tétraèdre, G son centre de gravité et G_1 le centre de gravité du triangle BCD.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} &\Leftrightarrow \vec{GA} + 3\vec{GG}_1 = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{3}{4} \vec{AG}_1. \end{aligned}$$



1.3. Ensemble des barycentres de points pondérés

Ensemble des barycentres de deux points distincts

La propriété suivante a été démontrée en classe de première.

Propriété

L'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB).

Ensemble des barycentres de trois points non alignés

Soit A, B et C trois points non alignés.

• Si α, β et γ sont trois nombres tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, désignons par G le barycentre des points pondérés $(A, \alpha), (B, \beta)$ et (C, γ) .

D'après la propriété de réduction, on a : $\beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{AG}$.

Donc, $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$ et G appartient au plan (ABC).

• Réciproquement, soit M un point du plan (ABC).

Il existe deux nombres réels x et y tels que : $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC} = x(\vec{AM} + \vec{MB}) + y(\vec{AM} + \vec{MC})$.

On a : $(1 - x - y)\vec{MA} + x\vec{MB} + y\vec{MC} = \vec{0}$, avec $1 - x - y + x + y \neq 0$.

Donc, M est le barycentre des points pondérés (A, $1 - x - y$), (B, x) et (C, y).

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

L'ensemble des barycentres de trois points non alignés A, B et C est le plan (ABC).

Remarque

L'ensemble des barycentres de quatre points non coplanaires est l'espace $\mathcal{E}$.

1.4. Travaux dirigés

Alignement de points

Soit ABCDE une pyramide de sommet A, I et J les centres de gravité respectifs des faces ABC et ADE, G le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 2), (C, 2), (D, 1) et (E, 1).

Démontrer que les points G, I et J sont alignés.

En déduire une construction du point G.

Solution

I est le barycentre de (A, 1), (B, 1) et (C, 1) ;

J est le barycentre de (A, 1), (D, 1) et (E, 1).

Or, G est le barycentre de (A, 3), (B, 2), (C, 2), (D, 1) et (E, 1) ;

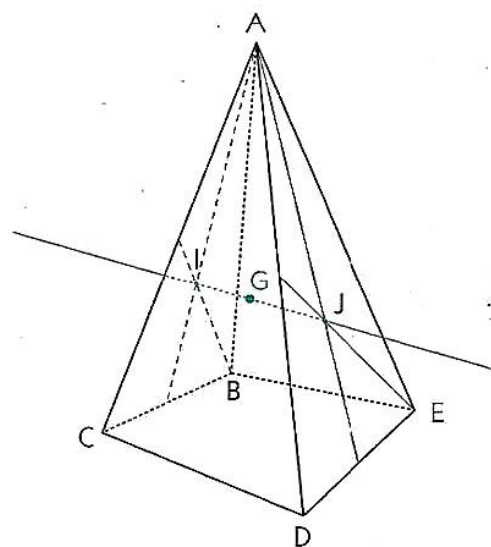
donc, d'après la propriété des barycentres partiels, on a :

G barycentre de (A, 2), (B, 2), (C, 2) et (A, 1), (D, 1), (E, 1),

c'est-à-dire G barycentre de (I, 6) et (J, 3).

Donc, les points G, I et J sont alignés.

De plus, G appartient au segment [IJ] et est tel que : $IG = \frac{1}{3} IJ$.



Pour démontrer que trois points sont alignés on peut démontrer que l'un est barycentre des deux autres.

Parallélisme, concours de droites

Soit ABC un triangle, α , β et γ trois nombres réels tels que : $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha + \gamma \neq 0$ et $\beta + \gamma \neq 0$.

On désigne par : A' le barycentre de (B, β) et (C, γ) ;

B' le barycentre de (A, α) et (C, γ) ;

C' le barycentre de (A, α) et (B, β).

1°) Démontrer que si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

2°) Démontrer que si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point que l'on précisera.

Solution

L'existence des points A', B' et C' est assurée par les conditions : $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha + \gamma \neq 0$ et $\beta + \gamma \neq 0$.

De plus, comme ABC est un triangle, on a : $A \neq A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$.

1°) $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Pour tout point M, le vecteur $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}$ est indépendant de M ; notons-le $\vec{u}$. On a : $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = \vec{u}$.

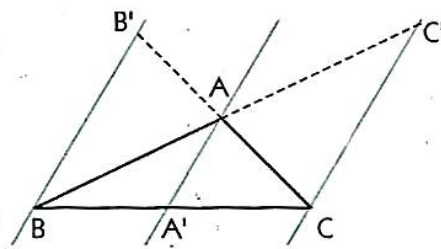
En remplaçant M par A', on obtient : $\alpha \vec{A'A} + \beta \vec{A'B} + \gamma \vec{A'C} = \vec{u}$.

Or : $A' = \text{bar} \{(B, \beta), (C, \gamma)\} \Leftrightarrow \beta \vec{A'B} + \gamma \vec{A'C} = \vec{0}$.

Donc : $\alpha \vec{A'A} = \vec{u}$.

On démontre de même que : $\beta \vec{B'B} = \gamma \vec{C'C} = \vec{u}$.

On en déduit que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.



2°) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Soit G le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ).

Pour tout point M, on a : $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG}$.

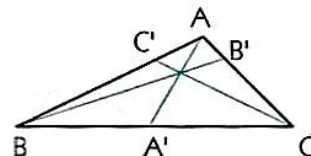
En remplaçant M successivement par A', B', C' on obtient :

$$\alpha \vec{A'A} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{A'G}$$

$$\beta \vec{B'B} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{B'G}$$

$$\gamma \vec{C'C} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{C'G}$$

On en déduit que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.



M

Pour démontrer que deux droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point G, on peut démontrer que G est à la fois barycentre des points I et J et barycentre des points K et L.

Exercices

- 1.a Soit A et B deux points distincts. Dans chacun des cas suivants, écrire A comme barycentre des points B et C.

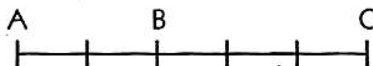
a) $\vec{BA} = -3\vec{CA}$

b) $5\vec{AB} = \vec{AC}$

c) $3\vec{AC} - 2\vec{BC} = \vec{0}$

d) $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} = 3\vec{BC}$

- 1.b Écrire chacun des points A, B et C comme barycentre des deux autres.



- 1.c Soit ABCD un parallélogramme. Réduire les sommes de vecteurs suivantes :

$$\vec{u} = 3\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC};$$

$$\vec{v} = \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} - 4\vec{MD};$$

$$\vec{w} = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}.$$

- 1.d L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ et $C\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Calculer les coordonnées du barycentre I de (B, 2) et (C, 3).

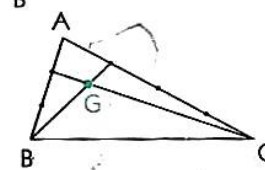
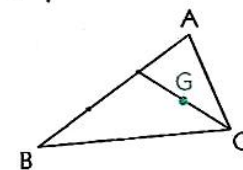
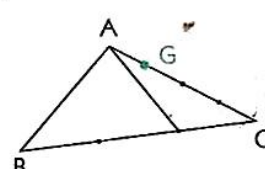
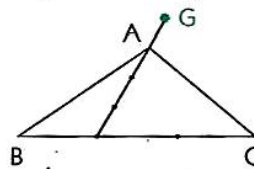
b) Calculer les coordonnées du barycentre J de (A, 5), (B, 2) et (C, 3).

c) Vérifier que J est le milieu de [AI].

- 1.e Soit ABC un triangle. Construire le barycentre des points pondérés (A, -2), (B, 1) et (C, 4) :

a) en exprimant $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$;
b) en utilisant la propriété des barycentres partiels.

- 1.f Dans chacun des cas suivants, écrire G comme barycentre des points A, B et C.



- 1.g Soit ABCD un parallélogramme. P est le point tel que : $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB}$; Q est le symétrique du milieu de [AD] par rapport à A. Démontrer que les points P, Q et C sont alignés.

- 1.h Soit ABCD un tétraèdre. P, Q, R et S sont les points tels que :

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AD}, \vec{CR} = \frac{1}{3}\vec{CB} \text{ et } \vec{CS} = \frac{1}{3}\vec{CD}.$$

On désigne par I et J les milieux respectifs de [AC] et [BD].

Démontrer que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes.

2

Lignes de niveau

2.1. Lignes de niveau de $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés du plan et k un nombre réel.

On se propose de déterminer les lignes de niveau k de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$; c'est-à-dire l'ensemble (E_k) des points M de $\mathcal{P}$ tels que : $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = k$.

1^{er} cas : la somme des coefficients est non nulle

Soit G le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Pour tout point A_i ($1 \leq i \leq n$), on a : $MA_i^2 = (\vec{MG} + \vec{GA}_i)^2 = MG^2 + GA_i^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GA}_i$.

Or : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$; donc : $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2$.

On en déduit que : $\forall k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$.

Posons : $\frac{k - \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = \rho$; on a : $MG^2 = \rho$.

Si $\rho < 0$, alors $(E_k) = \emptyset$;

si $\rho = 0$, alors $(E_k) = \{G\}$;

si $\rho > 0$, alors (E_k) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\rho}$.

Propriétés

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés du plan tels que : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

• Pour tout point M du plan, on a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2$,

où G est le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

• La ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ est $\emptyset$, $\{G\}$ ou un cercle de centre G .

Remarques

• Soit k un nombre réel et f une application de l'espace $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

On appelle surface de niveau k de f , l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $f(M) = k$.

• Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors la surface de niveau k de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ est $\emptyset$, $\{G\}$ ou une sphère de centre G , G étant le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Exemple

Soit $ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 2$ et $BC = 1$.

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

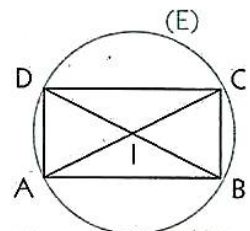
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 10.$$

L'isobarycentre des points A, B, C et D est le centre I du rectangle $ABCD$.

$$\text{On a : } IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4 + 5 + 1 = 10 ;$$

donc : $A \in (E)$.

On en déduit que (E) est le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$.



2^e cas : la somme des coefficients est nulle

Soit O un point du plan.

Pour tout point A_i ($1 \leq i \leq n$), on a : $MA_i^2 = (\vec{OA}_i - \vec{OM})^2 = OA_i^2 + OM^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OA}_i$.

On en déduit que : $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 - 2\vec{OM} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i \right)$.

Posons : $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i$; on obtient : $\forall k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = k \Leftrightarrow 2\vec{u} \cdot \vec{OM} = \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 - k$.

• Si $\vec{u} = \vec{0}$, on a deux cas : si $\sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 - k = 0$, alors $(E_k) = \mathcal{P}$;

si $\sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 - k \neq 0$, alors $(E_k) = \emptyset$.

• Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, considérons la droite $(\mathcal{D})$ de repère $(O, \vec{u})$ et le point P tel que : $\vec{OP} = \vec{u}$.

Soit H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$. On a : $\vec{OM} \cdot \vec{u} = \vec{OH} \times \vec{OP}$.

Donc : $\forall k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = k \Leftrightarrow \vec{OH}$ est constante.

On en déduit que M appartient à la droite perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ en H, où H est le point vérifiant :

$$2\vec{OH} \times \vec{OP} = \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 - k.$$

Propriétés

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés du plan tels que : $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ et O un point du plan.

• Pour tout point M du plan, on a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{OM}$,

où $\vec{u}$ est le vecteur $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i$ indépendant de M.

• La ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ est :

– $\emptyset$ ou $\mathcal{P}$, si $\vec{u} = \vec{0}$;

– une droite de vecteur normal $\vec{u}$, si $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Remarque

Dans l'espace $\mathcal{E}$, si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, alors la surface de niveau k de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ est $\emptyset$, $\mathcal{E}$ ou un plan de vecteur normal $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i$.

Exemples

• Soit ABC un triangle isocèle tel que : $AB = 4$ et $CA = CB = 6$.

Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$.

La somme des coefficients étant nulle, le vecteur $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$ est indépendant de M.

On a : $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = 2\vec{MI} - 2\vec{MC}$

$= 2\vec{CI}$, où I est le milieu de [AB].

Développons $MA^2 + MB^2 - 2MC^2$ en introduisant le point I.

$$\begin{aligned} \text{On a : } MA^2 + MB^2 - 2MC^2 &= (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 - 2(\vec{MI} + \vec{IC})^2 \\ &= 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB} - 2\vec{IC}) + IA^2 + IB^2 - 2IC^2 \\ &= 4\vec{MI} \cdot \vec{IC} - 56. \end{aligned}$$

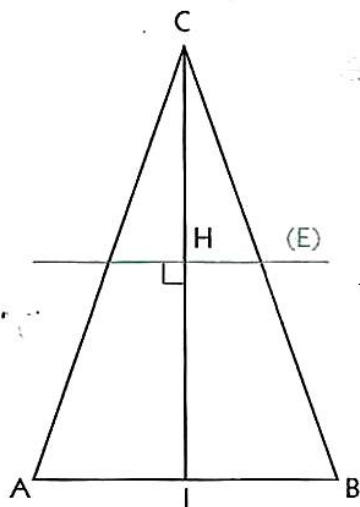
Donc : $M \in (E) \Leftrightarrow 4\vec{MI} \cdot \vec{IC} = 56$.

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (IC).

On obtient : $M \in (E) \Leftrightarrow \vec{IH} \times \vec{IC} = 14$

$$\Leftrightarrow \vec{IH} = \frac{14}{\vec{IC}} = \frac{7}{16} \vec{IC}.$$

L'ensemble (E) est la droite perpendiculaire à (IC) passant par le point H tel que : $\vec{IH} = \frac{7}{16} \vec{IC}$.



- Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a .

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 - 6MD^2 = 6a^2.$$

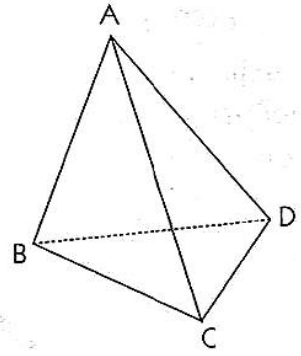
On a : $A \notin (\Gamma)$ et $D \in (\Gamma)$; donc : $(\Gamma) \neq \emptyset$ et $(\Gamma) \neq \mathcal{E}$.

La somme des coefficients étant nulle,

le vecteur $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - 6\vec{MD}$ est indépendant de M.

$$\text{Or : } \vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - 6\vec{MD} = \vec{DA} + 2\vec{DB} + 3\vec{DC}.$$

(Γ) est le plan passant par D, de vecteur normal $\vec{DA} + 2\vec{DB} + 3\vec{DC}$.



2.2. Lignes de niveau de $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Soit A et B deux points distincts du plan et k un nombre réel strictement positif.

On se propose de déterminer l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = k$.

- Si $k = 1$, alors (E_k) est la médiatrice de $[AB]$.

$$\begin{aligned} \text{• Si } k \neq 1, \text{ alors : } \frac{MA}{MB} = k &\Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\vec{MA} + k\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} - k\vec{MB}) = 0. \end{aligned}$$

Les nombres $1 + k$ et $1 - k$ sont non nuls ; désignons par I le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, k), par J le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, -k).

$$\begin{aligned} \text{On a : } M \in (E) &\Leftrightarrow ((1+k)\vec{MI}) \cdot ((1-k)\vec{MJ}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0. \end{aligned}$$

Donc (E_k) est le cercle de diamètre $[IJ]$.

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan, k un nombre réel strictement positif et différent de 1.

La ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$, où I est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, k), J le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, -k).

Exemple

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$.

Désignons par :

I le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, $\frac{2}{3}$),

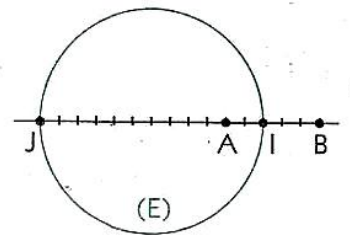
J le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, $-\frac{2}{3}$).

On sait que :

I est le barycentre des points pondérés (A, 3) et (B, 2),

J le barycentre des points pondérés (A, 3) et (B, -2).

(E) est le cercle de diamètre $[IJ]$.



Remarque

Si $k \neq 1$, alors $1 - k^2 \neq 0$. Désignons par G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, $-k^2$).

$$\text{On a : } M \in (E_k) \Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{MG} + \vec{GA})^2 - k^2 (\vec{MG} + \vec{GB})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - k^2)GM^2 + GA^2 - k^2 GB^2 = 0.$$

$$\text{Or : } \vec{GA} = \frac{k^2}{1 - k^2} \vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{GB} = \frac{1}{1 - k^2} \vec{AB}.$$

$$\text{Donc : } M \in (E_k) \Leftrightarrow (1 - k^2)GM^2 = \frac{k^2}{1 - k^2} AB^2$$

$$\Leftrightarrow GM^2 = \left(\frac{k}{1 - k^2} \right)^2 AB^2.$$

(E_k) est donc le cercle de centre le barycentre de (A, 1) et (B, $-k^2$), de rayon $\frac{k}{|1 - k^2|} AB$.

2.3. Lignes de niveau de $M \mapsto \widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB})$

Dans cette partie, A et B désignent deux points distincts du plan.

Soit M un point du plan, distinct de A et B.

On sait que les points A, B et M sont alignés si et seulement si $2 \widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \widehat{0}$.

Donc : A, B et M alignés $\Leftrightarrow \widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = 0$ ou $\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \pi$.

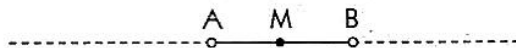
On en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés 1

Soit A et B deux points distincts du plan.

• L'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = 0$ est la droite (AB) privée du segment [AB].

• L'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \pi$ est le segment [AB] privé des points A et B.



Soit α un nombre réel, élément de $]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$.

On se propose de déterminer l'ensemble des points M tels que : $\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$.

Soit P un point tel que $(\vec{AP}, \vec{AB}) = \widehat{\alpha}$, O le point d'intersection de la médiatrice de [AB] et de la perpendiculaire à (AP) en A, ($\mathcal{C}$) le cercle de centre O passant par A et B.

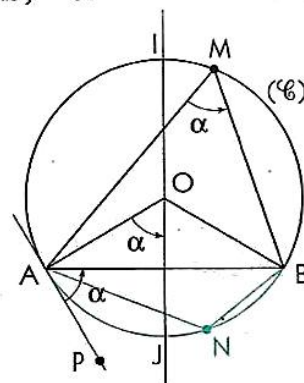
On sait que : $M \in (\mathcal{C}) \setminus \{A; B\} \Leftrightarrow 2 \widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) = 2\widehat{\alpha}$;

donc : $M \in (\mathcal{C}) \setminus \{A; B\} \Leftrightarrow \widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \widehat{\alpha}$ ou $\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \widehat{\alpha} + \pi$.

Nous admettons que pour tout point M de $(\mathcal{C}) \setminus \{A; B\}$ on a :

$\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$, si M appartient à l'un des arcs de corde [AB] ;

$\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha + \pi$ ($\alpha < 0$) ou $\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha - \pi$ ($\alpha > 0$), si M appartient à l'autre arc.



On a la propriété suivante.

Propriété 2

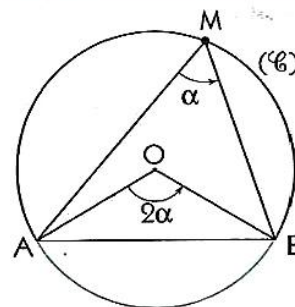
Soit A et B deux points distincts du plan,

α un nombre réel élément de $]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$,

O le point de la médiatrice de [AB] tel que $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2\widehat{\alpha}$,

($\mathcal{C}$) le cercle de centre O passant par A et B.

L'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$ est l'un des deux arcs, privés des points A et B, définis sur ($\mathcal{C}$) par la corde [AB].



Cet arc peut être déterminé à l'aide du signe de α .

Remarques

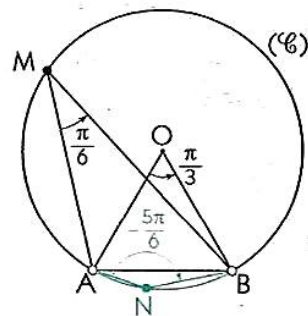
- Si l'angle $\widehat{\alpha}$ est droit, alors l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$ est un demi-cercle de diamètre [AB], privé des points A et B.
- L'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{\text{Mes}}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha [\pi]$ est ($\mathcal{C}$) privé des points A et B.
- On déduit des propriétés 1 et 2 que quatre points distincts A, B, C et D sont alignés ou cocycliques si et seulement si : $\widehat{\text{Mes}}(\vec{CA}, \vec{CB}) = \widehat{\text{Mes}}(\vec{DA}, \vec{DB}) [\pi]$.

Exemples

• Soit OAB un triangle équilatéral de sens direct et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O passant par A et B .

– L'arc $\widehat{AB}$, privé des points A et B , est l'ensemble des points M du plan tels que : $\text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{6}$.

– L'arc $\widehat{AB}$, privé des points A et B , est l'ensemble des points N du plan tels que : $\text{Mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = -\frac{5\pi}{6}$.



• Soit A et B deux points distincts du plan.

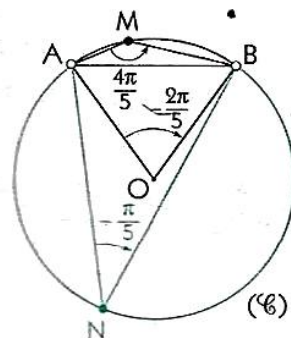
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{4\pi}{5}$.

Si $\hat{\alpha}$ désigne l'angle de mesure $\frac{4\pi}{5}$, alors $2\hat{\alpha}$ est l'angle de mesure $-\frac{2\pi}{5}$.

Soit O le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{2\pi}{5}$ et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O passant par A et B .

– L'arc $\widehat{AB}$, privé des points A et B , est l'ensemble des points M du plan tels que : $\text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{4\pi}{5}$.

– L'arc $\widehat{AB}$, privé des points A et B , est l'ensemble des points N du plan tels que : $\text{Mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = -\frac{\pi}{5}$.



Donc l'ensemble cherché est le cercle $(\mathcal{C})$ privé des points A et B .

Exercices

2.a Soit ABC un triangle isocèle tel que :

$$AB = AC = 7 \text{ et } BC = 4.$$

On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par G le centre de gravité de ABC .

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| = 12.$$

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 38.$$

3. a) Calculer AG et BG .

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 65.$$

2.b Soit A et B deux points du plan tels que :

$$AB = 4.$$

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $3MA = 5MB$.

2.c Soit A , B et C trois points non alignés.

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\|.$$

2.d Soit A et B deux points distincts du plan.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$a) \text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$b) \text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$a) \text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{3} [\pi]$$

$$b) \text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{5\pi}{6} [\pi].$$

3 Produit vectoriel

3.1. Orientation de l'espace

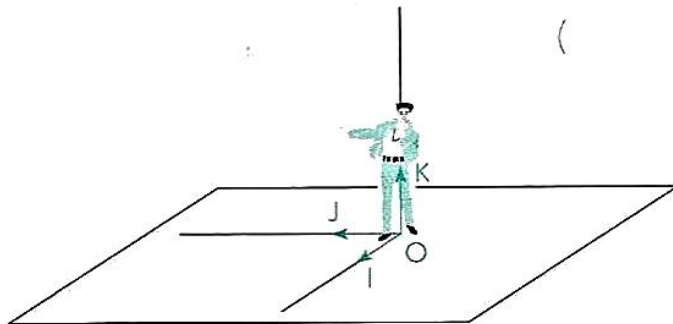
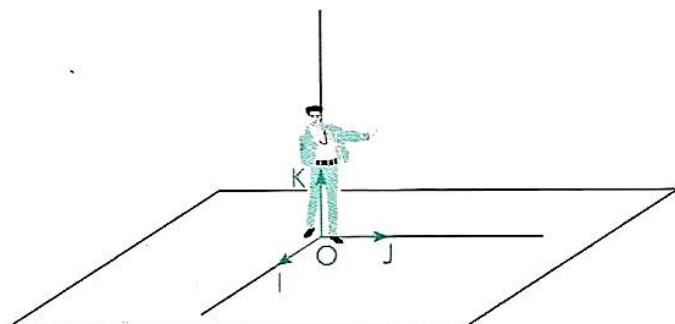
Règle du bonhomme d'Ampère

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de $\mathcal{E}$ et les points I, J, K tels que : $\vec{OI} = \vec{i}$, $\vec{OJ} = \vec{j}$, $\vec{OK} = \vec{k}$.

Pour orienter l'espace, les physiciens imaginent un observateur ayant les pieds en O, la tête en K et fixant le point I ; deux situations, et deux seulement, sont possibles.

Le point J est à gauche de l'observateur

Le point J est à droite de l'observateur



le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct ;
la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe.

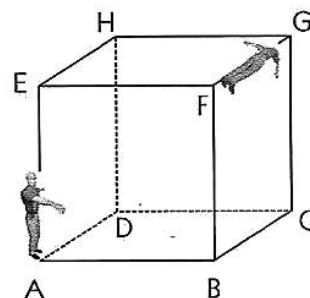
le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indirect ;
la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indirecte.

Orienter l'espace, c'est distinguer ces deux types de repères ou de bases.

Exemples

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

- $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$;
- $(F, \vec{FE}, \vec{FB}, \vec{FG})$ est un repère orthonormé indirect de $\mathcal{E}$;
- $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$;
- $(\vec{DC}, \vec{DA}, \vec{DH})$ est une base orthonormée indirecte de $\mathcal{W}$.



Remarques

- Permuter deux vecteurs d'une base change son orientation ;
ainsi, les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ sont de sens contraires.
- Permuter de façon circulaire les trois vecteurs d'une base ne change pas son orientation ;
ainsi, les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ sont de même sens.
- Remplacer un vecteur d'une base par son opposé change son orientation ;
ainsi :
– les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(-\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont de sens contraires ;
– les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(-\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ sont de même sens.

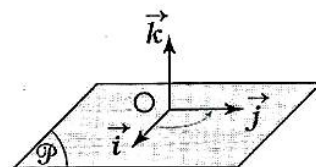
Orientation d'un plan de $\mathcal{E}$

L'espace étant orienté, on peut définir une orientation de tout plan de $\mathcal{E}$.

Soit $(\mathcal{P})$ un plan de $\mathcal{E}$, de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et $\vec{k}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

On convient que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère direct de $(\mathcal{P})$ si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère direct de $\mathcal{E}$.

Un plan est orienté par le choix d'un de ses vecteurs normaux.



3.2. Produit vectoriel

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{W}$ et A un point de $\mathcal{E}$.

On désigne par B et C les points tels que : $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$.

• Nous avons vu en classe de première que l'angle $\widehat{BAC}$, donc $\cos \widehat{BAC}$, est indépendant du choix du point A.

Nous avons pu ainsi définir le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \text{ si l'un des vecteurs } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul ;}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \widehat{BAC}, \text{ si les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls.}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

• Nous allons définir une nouvelle opération qui, cette fois, à deux vecteurs de $\mathcal{W}$ associe un vecteur de $\mathcal{W}$; on a ainsi une loi de composition interne dans $\mathcal{W}$.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté $\mathcal{W}$, A, B et C des points de $\mathcal{E}$ tels que : $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, ainsi défini :

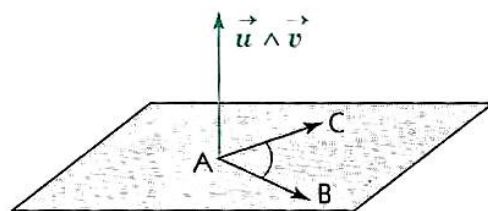
• lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;

• lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,

le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (direction) ;

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de $\mathcal{W}$ (sens) ;

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \widehat{BAC} \quad (\text{norme}).$$



$\vec{u} \wedge \vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$ ».

Remarques

• Comme pour le produit scalaire, cette définition ne dépend pas du choix de A.

• Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ et $\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

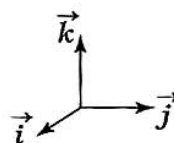
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires et orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

Exemples

• Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

On a : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$;

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}.$$



• ABCDEFGH est un cube d'arête a tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ soit une base orthogonale directe de $\mathcal{W}$.

Déterminer $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$ et $\vec{AH} \wedge \vec{BF}$.

– Le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$ est colinéaire à $\vec{AE}$ et de même sens ;

de plus : $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| = \|\vec{AB}\| \|\vec{AD}\| \sin \widehat{BAD} = a^2$ et $\|\vec{AE}\| = a$;

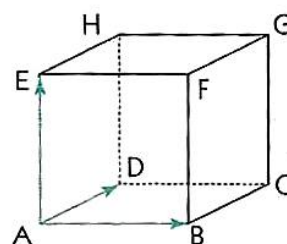
donc : $\vec{AB} \wedge \vec{AD} = a \vec{AE}$.

– On a : $\vec{AH} \wedge \vec{BF} = \vec{AH} \wedge \vec{AE}$.

Le vecteur $\vec{AH} \wedge \vec{AE}$ est colinéaire à $\vec{AB}$ et de même sens ;

de plus : $\|\vec{AH} \wedge \vec{AE}\| = \|\vec{AH}\| \|\vec{AE}\| \sin \widehat{HAE} = a\sqrt{2} \times a \times \frac{1}{\sqrt{2}} = a^2$;

donc : $\vec{AH} \wedge \vec{BF} = a \vec{AB}$.



Propriétés du produit vectoriel

Propriété 1

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$, on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Cette propriété découle de la définition du produit vectoriel.

Propriétés 2

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$, pour tout nombre réel k , on a :

- | | | |
|--|---|--|
| (1) $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$ | ; | (2) $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$ |
| (3) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ | ; | (4) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ |

Démonstration

(1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{0}$; donc : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$ ont même direction et même norme ; la règle du bonhomme d'Ampère permet de dire qu'ils sont de sens contraires.

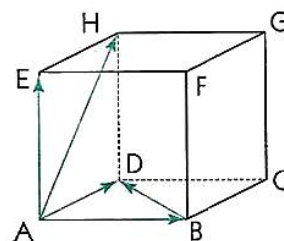
Donc : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(2) (3) et (4) Une démonstration de ces propriétés est proposée en fin de chapitre (cf. exercice n°44).

Exemples

• Dans le cube ABCDEFGH d'arête a , on a :

$$\begin{aligned} \vec{AH} \wedge \vec{AE} &= (\vec{AD} + \vec{AE}) \wedge \vec{AE} = \vec{AD} \wedge \vec{AE} = a\vec{AB} ; \\ \vec{AH} \wedge \vec{BD} &= (\vec{AD} + \vec{AE}) \wedge (\vec{AD} - \vec{AB}) \\ &= \vec{AD} \wedge \vec{AD} - \vec{AD} \wedge \vec{AB} + \vec{AE} \wedge \vec{AD} - \vec{AE} \wedge \vec{AB} \\ &= \vec{0} + a\vec{AE} - a\vec{AB} - a\vec{AD} \\ &= a(\vec{AE} - \vec{AB} - \vec{AD}) = a\vec{CE}. \end{aligned}$$



• Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$. Exprimer $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{u} + \vec{v})$ en fonction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } (\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \wedge \vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{v} \wedge \vec{u} - \vec{v} \wedge \vec{v} \\ &= 2\vec{u} \wedge \vec{v}. \end{aligned}$$

Expression analytique du produit vectoriel

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$ et les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Les propriétés précédentes permettent d'écrire : } \vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}. \end{aligned}$$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$ et les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont : $(yz' - zy' ; zx' - xz' ; xy' - yx')$.

Remarque

La notation à l'aide des déterminants permet une mémorisation plus facile des résultats :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Exemples

- Soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right)$; c'est-à-dire : (2 ; 4 ; 0).

- Soit les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right)$; c'est-à-dire : (-4 ; 8 ; -4).

On a : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$; donc les points A, B et C ne sont pas alignés.



Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, on peut démontrer que : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$.

3.3. Utilisations du produit vectoriel

$\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Équation d'un plan déterminé par trois points

Vérifier que les points $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ définissent un plan $(\mathcal{P})$, dont on déterminera une équation.

Solution

- On a : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$; c'est-à-dire : (4 ; -10 ; 2).

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan dont $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal.

- Soit M un point de coordonnées $(x ; y ; z)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } M \in (\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(x+1) - 10(y-1) + 2(z-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 5y + z + 5 = 0. \end{aligned}$$

2. Positions relatives de deux plans

Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $x + 4y + 2z - 1 = 0$ et $(\mathcal{P}')$ le plan passant par le point $A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires.

b) Vérifier que A est un point de $(\mathcal{P})$ et déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) , intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Solution

a) $(\mathcal{P})$ a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$; donc les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires.

b) On a : $1 \times (-1) + 4 \times 0 + 2 \times 1 - 1 = 0$; donc : A appartient à $(\mathcal{P})$.

Le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{u}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right)$; c'est-à-dire (-14 ; 7 ; -7).

Or $\vec{n} \wedge \vec{u}$, vecteur orthogonal à $\vec{n}$ et à $\vec{u}$, est un vecteur directeur de la droite (Δ) .

Donc, une représentation paramétrique de (Δ) est :
$$\begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Pour étudier la position relative de deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$, on peut déterminer deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ respectivement normaux à $(\mathcal{P})$ et à $(\mathcal{P}')$.

- Si le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est égal au vecteur nul, alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles.
- Si le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est différent du vecteur nul, alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants suivant une droite dont $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur.

De plus, lorsque le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{n}'$ est nul, $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires.

3. Distance d'un point à une droite, à un plan

1. Soit $(\mathcal{D})$ une droite de repère $(A, \vec{u})$, M un point de $\mathcal{E}$ et H son projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$.

Démontrer que : $MH = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Application

Soit les points $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $M\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer la distance de M à la droite (AB).

2. Soit $(\mathcal{P})$ un plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$, M un point de $\mathcal{E}$ et K son projeté orthogonal sur $(\mathcal{P})$.

Démontrer que : $MK = \frac{|\vec{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

Application

Soit le point $C\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer la distance de M au plan (ABC).

Solution

1. On a : $\vec{MA} \wedge \vec{u} = (\vec{MH} + \vec{HA}) \wedge \vec{u}$
 $= \vec{MH} \wedge \vec{u} + \vec{HA} \wedge \vec{u} = \vec{MH} \wedge \vec{u}$.

Or, $\vec{MH}$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs orthogonaux ;

donc : $\|\vec{MH} \wedge \vec{u}\| = MH \times \|\vec{u}\|$.

On en déduit que : $MH = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Application

La distance de M à la droite (AB) est : $d = \frac{\|\vec{MA} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}$.

Or, $\vec{AB}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{MA}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$;

donc $\vec{MA} \wedge \vec{AB}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right)$; c'est-à-dire : $(6 ; -1 ; -5)$.

On en déduit que : $d = \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{186}}{3}$.

2. Les vecteurs $\vec{MK}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont colinéaires ;

K est le projeté orthogonal de A sur (MK) ;

donc : $|\vec{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})| = |\vec{MK} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})| = MK \times \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

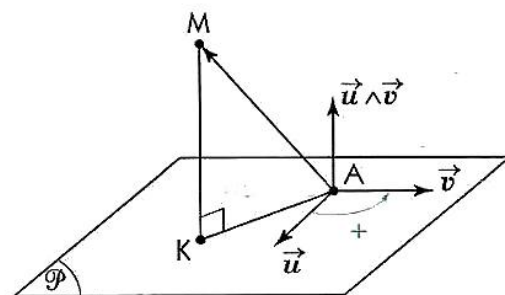
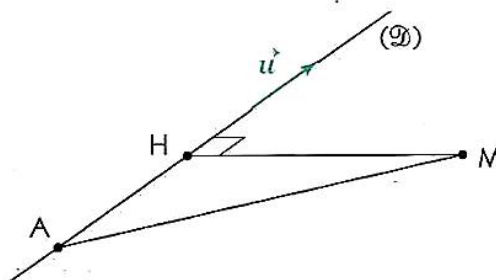
On en déduit que : $MK = \frac{|\vec{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

Application

On a : $\vec{AB}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{AC}\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$;

donc : $\vec{AB} \wedge \vec{AC}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et les points A, B, C définissent un plan.

La distance de M au plan (ABC) est : $d' = \frac{|\vec{MA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$.



Or, $\vec{MA} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc : $d' = \frac{|-2 - 12 - 2|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$.

Remarque

Lorsque $(\mathcal{P})$ est déterminé par son équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, on peut remplacer dans le raisonnement précédent $\vec{u} \wedge \vec{v}$ par $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tous deux vecteurs normaux à $(\mathcal{P})$;

on retrouve la formule vue en classe de première : $MK = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, avec $M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

4. Calculs d'aire et de volume

Soit ABCD un tétraèdre et V son volume.

a) Démontrer que l'aire du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.

b) En déduire que : $V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$.

Application

Soit les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Solution

a) On sait que l'aire du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \sin \widehat{BAC}$;

donc : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.

b) Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

On a : $V = \frac{1}{3} DH \times \mathcal{A}(ABC)$.

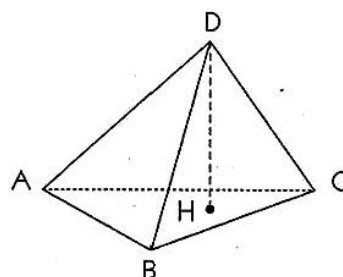
Or : $DH = \frac{|(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$.

On en déduit que : $V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$.

Application

On a : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

donc : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.



Exercices

3.a Soit ABCDEFGH un cube tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est une base directe de $\mathcal{W}$.

Préciser si chacune des bases suivantes est directe ou indirecte.

- a) $(\vec{BC}, \vec{BA}, \vec{BF})$ b) $(\vec{FG}, \vec{FE}, \vec{FB})$
c) $(\vec{CB}, \vec{CD}, \vec{CG})$ d) $(\vec{EF}, \vec{EA}, \vec{EH})$.

3.b Soit ABCDEFGH un cube tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

Déterminer les vecteurs :

- a) $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$ b) $\vec{BA} \wedge \vec{BC}$ c) $\vec{GC} \wedge \vec{GF}$
d) $\vec{BE} \wedge \vec{HC}$ e) $\vec{AC} \wedge \vec{FH}$ f) $\vec{HG} \wedge \vec{BF}$.

3.c Démontrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$, on a : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$.

3.d Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3.e L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du plan passant par le point A, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.f L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points $A \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.

2. Calculer le volume du tétraèdre OABC.

Exercices

APPRENTISSAGE

Barycentres

1 1. Soit ABCD un tétraèdre, A', B', C' et D' les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC.

Démontrer que les tétraèdres ABCD et A'B'C'D' ont même centre de gravité.

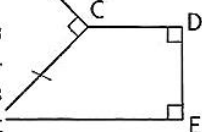
2. Démontrer que deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' ont même centre de gravité si et seulement si :

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'} = \vec{0}.$$

2 Soit ABC un triangle et M un point de [BC]. Démontrer que M est le barycentre des points pondérés (B, aire(CAM)) et (C, aire(BAM)).

3 Soit ABCDE un pentagone tel que ACDE est un trapèze rectangle et ABC un triangle isocèle rectangle.

En utilisant les barycentres partiels, construire le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 6) et (E, 3).



4 Soit ABCDE une pyramide à base ABCD. Construire le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1) et (E, 4).

5 Soit ABC un triangle.

1. Construire le point G tel que : $\vec{GB} = \frac{2}{3} \vec{AC}$.

2. Écrire G comme barycentre des points A, B et C.

3. Pour tout point M, exprimer $\vec{MG}$ en fonction de $\vec{MA}$, $\vec{MB}$ et $\vec{MC}$.

6 Soit A et B deux points distincts.

Démontrer que le segment [AB] est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients de même signe.

7 Soit A, B, C trois points non alignés et α, β, γ trois nombres réels tels que : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ).

1. Démontrer que si $\beta + \gamma = 0$, alors G appartient à la droite parallèle à (BC) passant par A.

2. Soit α un nombre réel non nul. Démontrer que β et γ varient de telle sorte que si $\beta + \gamma = \alpha$, alors G décrit une droite parallèle à (BC).

8 L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

On considère les points A $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

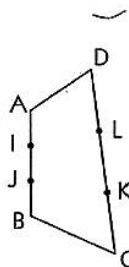
Déterminer les coordonnées du barycentre des points pondérés (A, -2), (B, 1) et (C, 4).

9 Soit ABCD un quadrilatère.

I et J sont les points de [AB] tels que : AI = IJ = JB.

K et L sont les points de [CD] tels que : CK = KL = LD.

On désigne par M, N, O et P les milieux respectifs des segments [AD], [IL], [JK] et [BC].



1. Écrire chacun des points I et J comme barycentre des points A et B.

Écrire chacun des points K et L comme barycentre des points C et D.

2. Démontrer que les points M, N, O et P sont alignés.

10 Soit ABCD un quadrilatère. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2), (C, 1) et (D, 2).

1. Construire les points K et L tels que :

$$\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0} \text{ et } \vec{LC} + 2\vec{LD} = \vec{0}.$$

2. Démontrer que G est le milieu de [KL].

3. Construire G.

11 Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par :

- I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC] ;
- K et L les points tels que :

$$\vec{AK} = \frac{1}{3} \vec{AB} \text{ et } \vec{CL} = \frac{2}{3} \vec{CD} ;$$

- G le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, -1), (C, 1) et (D, 2).

1. Démontrer que les points I, J et G sont alignés.

Démontrer que les points K, L et G sont alignés.

2. En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

12 Soit ABC un triangle, G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 2). Les droites (BG) et (CG) coupent (AC) et (AB) respectivement en B' et C'.

1. En utilisant les barycentres partiels, démontrer que :

$$2\vec{GB} + 3\vec{GB'} = \vec{0} \text{ et } 2\vec{GC} + 3\vec{GC'} = \vec{0}.$$

2. En déduire que les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.

13 Soit ABC un triangle. On désigne par :

- A' le barycentre des points pondérés (B, 2) et (C, -3) ;
- B' le barycentre des points pondérés (C, -3) et (A, 1).

1. Démontrer que les droites (AA') et (BB') sont parallèles.

2. Soit C' le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b). Pour quelles valeurs des nombres réels a et b les droites (AA') et (CC') sont-elles parallèles ?

14 Soit ABCD un tétraèdre, G et H les centres de gravité respectifs des triangles ABC et ADC.

Démontrer que les droites (GH) et (BD) sont parallèles.

15 Soit ABC un triangle.

1. Construire les points I, J et K tels que :

$$\vec{BI} = \frac{3}{5} \vec{BC}, \vec{CJ} = \frac{1}{2} \vec{AC} \text{ et } \vec{AK} = 2\vec{AB}.$$

2. Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

16 Soit ABC un triangle.

1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 3), (B, 4) et (C, 5).
2. Les droites (AG), (BG) et (CG) coupent les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement en I, J et K. Déterminer les nombres réels α , β et γ tels que :

$$\vec{IB} = \alpha \vec{IC}, \quad \vec{JC} = \beta \vec{JA} \quad \text{et} \quad \vec{KA} = \gamma \vec{KB}.$$

17 Soit ABCD un quadrilatère.

1. Construire les points E, F, I, J, K et L tels que :

$$\vec{AE} = \frac{2}{3} \vec{AC}, \quad \vec{BF} = \frac{2}{3} \vec{BD}, \quad \vec{AI} = \frac{3}{5} \vec{AB},$$

$$\vec{BJ} = \frac{4}{7} \vec{BC}, \quad \vec{CK} = \frac{3}{5} \vec{CD}, \quad \vec{AL} = \frac{3}{4} \vec{AD}.$$
2. Démontrer que les droites (EF), (IK) et (JL) sont concourantes.

18 Soit ABCD un quadrilatère convexe. On désigne par E, F, G et H les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC. Démontrer que les droites (AE), (BF), (CG) et (DH) sont concourantes.

19 Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par :

- I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD] ;
 - G_1, G_2, G_3 et G_4 les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, ABD et ABC.
- En utilisant les barycentres partiels, démontrer que les sept droites (AG₁), (BG₂), (CG₃), (DG₄), (IK), (JL) et (MN) sont concourantes.

Lignes de niveau

20 Soit ABCD un carré.

1. Écrire A comme barycentre des points B, C et D.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MD} - \vec{MC}^2 = 0.$$

21 Soit ABCD un carré.

1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 2), (B, -1) et (C, 1).
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AB}\|.$

22 Soit ABC un triangle.

1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 1).
2. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|.$$
 - a) Vérifier que B appartient à (Γ).
 - b) Déterminer et construire (Γ).

23 Soit ABC un triangle tel que : AB = 7, BC = 4 et AC = 5. On désigne par I le milieu du segment [BC].

1. En utilisant le théorème de la médiane, calculer AI.
 2. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 58.$
(On pourra développer $2MA^2 - MB^2 - MC^2$ par rapport à I).
 3. On désigne par D le barycentre des points pondérés (A, -1), (B, 1) et (C, 1).
- a) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 - MC^2 = 25.$

24 Soit A et B deux points distincts d'un cercle

(C) de centre O tels que : $\text{Mes}(\widehat{O\vec{A}, O\vec{B}}) = \frac{2\pi}{3}.$
 Les tangentes à (C) en A et B se coupent en C.
 Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

25 Soit A et B deux points distincts, (Δ) et (Δ')

deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
 Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$(\vec{MA}, \vec{u}) = (\vec{MB}, \vec{v}).$$

26 Soit ABC un triangle isocèle en A, (Δ) une

droite variable passant par A et C' l'image de C par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

1. Déterminer le lieu de C' lorsque (Δ) varie.
2. Soit M le point d'intersection, s'il existe, des droites (BC') et (Δ).

 Déterminer le lieu de M lorsque (Δ) varie.

27 Soit A et B deux points distincts d'un cercle (C).

À tout point M de (C), distinct de A et B, on associe le point P de la demi-droite opposée à [MA] tel que :

$$MP = MB.$$

 Déterminer le lieu de P lorsque M décrit le cercle (C) privé des points A et B.

Produit vectoriel

28 Soit ABCDEFGH un cube tel que ($\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}$)

est une base directe de $\mathcal{W}$.
 Préciser si chacune des bases suivantes est directe ou indirecte.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) ($\vec{EF}, \vec{FG}, \vec{GC}$) | b) ($\vec{FG}, \vec{EA}, \vec{CD}$) |
| c) ($\vec{EH}, \vec{FB}, \vec{CD}$) | d) ($\vec{AB}, \vec{CG}, \vec{HE}$). |

29 Soit ABCDEFGH un cube tel que ($\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}$)

est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.
 Déterminer les vecteurs :

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| a) $\vec{AB} \wedge \vec{HD}$ | b) $\vec{BC} \wedge \vec{EF}$ | c) $\vec{EF} \wedge \vec{DC}$. |
|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|

30 Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et

de centre de gravité G.
 Calculer en fonction de a :
 $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|, \quad \|\vec{GB} \wedge \vec{GC}\| \quad \text{et} \quad \|\vec{AG} \wedge \vec{BC}\|.$

31 Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel

que I est le milieu du segment [BC] et $AB = AC = a$.
 Calculer en fonction de a :
 $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|, \quad \|\vec{AB} \wedge \vec{BC}\|, \quad \|\vec{IA} \wedge \vec{BC}\| \quad \text{et} \quad \|\vec{AB} \wedge \vec{AI}\|.$

32 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

On pose : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$.
 Calculer en fonction de $\vec{w}$:

a) $\vec{u} \wedge (2\vec{u} + \vec{v})$	b) $(3\vec{u} - \vec{v}) \wedge \vec{v}$
c) $(\vec{u} + 2\vec{v}) \wedge (2\vec{u} - \vec{v})$	d) $5\vec{v} \wedge (3\vec{u} + \vec{v}).$

33 Soit ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

Dans chacun des cas suivants, démontrer que ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) est une base orthonormée et préciser si elle est directe ou indirecte.

$$a) \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b) \vec{u} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

34 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

$$a) \vec{u} = \frac{1}{9}(\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}), \vec{v} = \frac{1}{9}(-4\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k})$$

$$b) \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).$$

35 L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, vérifier que les points A, B et C définissent un plan dont on déterminera une équation.

$$a) A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b) A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

36 L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur de la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

$$a) (\mathcal{P}) : 2x + y - z = 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}') : x - 3y + 2z + 4 = 0.$$

$$b) (\mathcal{P}) : x - y + z - 5 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}') : x + y - z + 7 = 0.$$

37 Le théorème des sinus

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$.

1. Démontrer que : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{CA} \wedge \vec{CB} = \vec{BC} \wedge \vec{BA}$.

$$2. \text{ En déduire que : } \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{CA}{\sin \widehat{CBA}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}}.$$

38 Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$a) \vec{AB} \wedge \vec{AM} = \vec{0} \quad b) \vec{AB} \wedge \vec{CM} = \vec{0} \quad c) \vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{0}.$$

39 Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$. On désigne par I le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, -1) et par J le barycentre des points pondérés (B, 1), (C, 3). Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

$$(2\vec{MA} - \vec{MB}) \wedge (\vec{MB} + 3\vec{MC}) = \vec{0}.$$

40 L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$.

Application

Dans chacun des cas suivants, dire si les points A, B, C et D sont coplanaires.

$$a) A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } D \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } D \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c) A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

41 L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points $A \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.

2. Dans le plan (ABC), soit I le milieu de [AC] et D l'image de B par s_I . Préciser la nature du quadrilatère ABDC et calculer son aire.

42 1. Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$ et M un point quelconque.

a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ tel que :

$$\vec{u} = \vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} + \vec{MC} \wedge \vec{MA}$$

est indépendant du point M.

b) Interpréter géométriquement $\|\vec{u}\|$.

2. Étudier le cas où A, B et C sont alignés.

43 Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$ et I le milieu de [BC]. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\vec{MA} \wedge \vec{MB} = \vec{MC} \wedge \vec{MA}.$$

44 Soit A et B deux points de l'espace orienté $\mathcal{E}$ tels que : $AB = 6$. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\|\vec{MA} \wedge \vec{MB}\| = 24.$$

(On pourra utiliser l'interprétation géométrique de $\|\vec{MA} \wedge \vec{MB}\|$.)

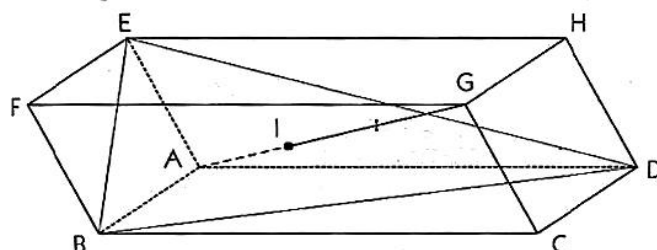
APPROFONDISSEMENT

45 Soit ABCDEFGH un pavé.

Démontrer que la diagonale (AG) est sécante avec le plan (BDE) en un point I tel que :

• I est le centre de gravité du triangle BDE ;

$$\bullet \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AG}.$$



46 Soit ABC un triangle isocèle tel que :

$$BC = 2, \quad AC = AB = 3.$$

On désigne par A' le milieu du segment [BC] et H l'orthocentre de ABC.

1. Démontrer que : $\cos \widehat{BAC} = \frac{7}{9}$.

2. Soit B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

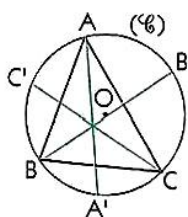
$$a) \text{ Calculer } \frac{B'A}{B'C}.$$

b) Déterminer deux nombres réels α et γ tels que B' est le barycentre des points pondérés (A, α) et (C, γ) .

3. En déduire trois nombres réels a, b et c tels que H est le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b)$ et (C, c) .

47 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O . On désigne par :

- A' le milieu de l'arc de corde $[BC]$, ne contenant pas A ,
 - B' le milieu de l'arc de corde $[CA]$, ne contenant pas B ,
 - C' le milieu de l'arc de corde $[AB]$, ne contenant pas C .
- Démontrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.



48 Soit ABC un triangle.

P, Q et R sont des points distincts de A, B et C , appartenant respectivement aux droites $(BC), (CA)$ et (AB) .

1. Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles CPQ, AQR et BRP passent par un même point I .
2. Démontrer que A, B, C et I sont cocycliques si et seulement si P, Q et R sont alignés.

49 Soit $ABCD$ un losange de centre O tel que :
 $OB = 2OA$.

1. Démontrer que le barycentre des points pondérés $(B, 2), (C, -1)$ et $(D, 1)$ est le milieu du segment $[AB]$.

2. Soit k un nombre réel.

a) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des barycentres G_k des points pondérés $(A, k), (B, 2), (C, k-1)$ et $(D, 1-2k)$.

b) Préciser la valeur de k pour laquelle G_k est un point de la droite (AC) .

3. Déterminer et construire :

a) l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{MA} + \vec{MC} - 2\vec{MD}$ et $2\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}$ sont colinéaires ;

b) l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{MA} + \vec{MC} - 2\vec{MD}$ et $2\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}$ ont la même norme.

50 Soit ABC un triangle équilatéral tel que :

$$AB = a \quad (a > 0).$$

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$.

2. a) Construire le barycentre G des points pondérés $(A, -1), (B, 4)$ et $(C, 1)$.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{2}$.

51 Soit $ABCD$ un tétraèdre.

1. Construire les centres de gravité respectifs I, J et K des faces ABC, ACD et ADB .

2. Démontrer que les plans (BCD) et (IJK) sont parallèles.

3. On désigne par :

• G et H les centres de gravité respectifs des triangles BCD et IJK ;

• O le centre de gravité de $ABCD$.

Démontrer que les points A, H, O et G sont alignés.

Exprimer le vecteur $\vec{GH}$ en fonction du vecteur $\vec{AO}$.

4. Déterminer quatre nombres réels a, b, c et d tels que H est le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b), (C, c)$ et (D, d) .

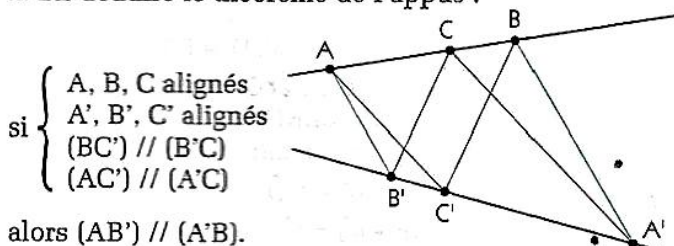
52 Le théorème de Pappus

1. Soit A, B, C trois points alignés et A', B', C' trois points alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$.

Vérifier la relation :

$$\vec{B'A} \wedge \vec{B'A'} + \vec{C'B} \wedge \vec{C'B'} + \vec{A'C} \wedge \vec{A'C'} = \vec{0}.$$

2. En déduire le théorème de Pappus :



si $\begin{cases} A, B, C \text{ alignés} \\ A', B', C' \text{ alignés} \\ (BC') \parallel (B'C) \\ (AC') \parallel (A'C) \end{cases}$

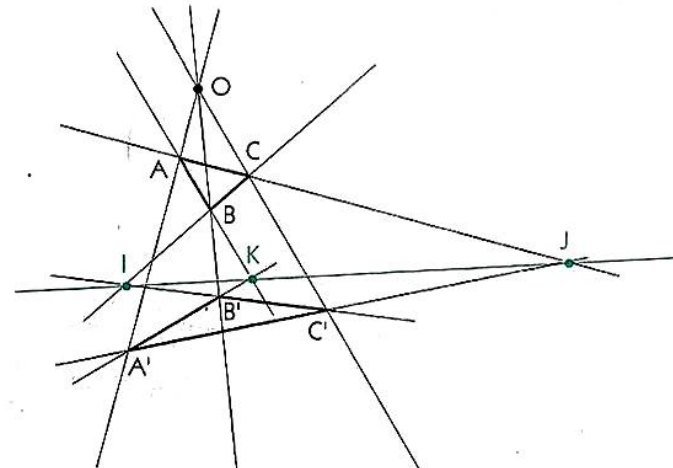
alors $(AB') \parallel (A'B)$.

53 Le théorème de Desargues

Soit deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan tels que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en un point O .

On suppose que :

- les droites (BC) et $(B'C')$ sont sécantes en un point I ,
- les droites (CA) et $(C'A')$ sont sécantes en un point J ,
- les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en un point K .



Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

(On pourra considérer O comme barycentre des points A et A' , des points B et B' , des points C et C' .)

54 Soit A, B, C trois points non alignés et α, β, γ trois nombres réels tels que :

- les points pondérés $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ admettent un barycentre G ;
- les points pondérés $(A, -\alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ admettent un barycentre G_1 ;
- les points pondérés $(A, \alpha), (B, -\beta), (C, \gamma)$ admettent un barycentre G_2 ;
- les points pondérés $(A, \alpha), (B, \beta), (C, -\gamma)$ admettent un barycentre G_3 .

1. Démontrer que les droites $(AG_1), (BG_2)$ et (CG_3) concourent en G .

2. Démontrer que les droites $(G_2G_3), (G_3G_1)$ et (G_1G_2) passent respectivement par A, B et C .

55 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{W}$, O un point quelconque de $\mathcal{E}$, A et B les points tels que :

$$\vec{OA} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{OB} = \vec{v}.$$

1. On désigne par $(\mathcal{P})$ le plan orthogonal à (OA) en O , par B_1 le projeté orthogonal de B sur $(\mathcal{P})$ et par B' l'image de B_1 par la rotation r dans $(\mathcal{P})$ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$[(\mathcal{P}) \text{ est orienté par le choix du vecteur normal } \vec{u}.]$

a) Démontrer que :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = OA \times OB_1 \quad \text{et} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = OA \times \vec{OB}.$$

b) Soit k un nombre réel, C le point tel que $\vec{OC} = k\vec{v}$, C_1 le projeté orthogonal de C sur $(\mathcal{P})$ et C' l'image de C_1 par la rotation r .

Démontrer que : $\vec{OC}' = k\vec{OB}$.

En déduire que : $\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

2. Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$, D et E les points tels que $\vec{OD} = \vec{w}$ et $\vec{OE} = \vec{v} + \vec{w}$, D_1 et E_1 les projetés orthogonaux respectifs de D et E sur $(\mathcal{P})$, D' et E' les images respectives de D_1 et E_1 par la rotation r .

Démontrer que : $\vec{OE}' = \vec{OB}' + \vec{OD}$.

En déduire que : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

56 Soit deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sécantes en O , A et B deux points distincts de $(\mathcal{D})$, C et D deux points distincts de $(\mathcal{D}')$ avec A, B, C, D distincts de O .

1. Démontrer que pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a :

$$\vec{MA} \wedge \vec{MB} - \vec{MC} \wedge \vec{MD} = \vec{MO} \wedge (\vec{AB} + \vec{DC}).$$

2. Déterminer le lieu des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

$$\vec{MA} \wedge \vec{MB} = \vec{MC} \wedge \vec{MD}.$$

57 Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par J le centre du carré $ADHE$.

1. Vérifier que : $\vec{IG} \wedge \vec{IA} = \vec{BJ}$.

En déduire l'aire du triangle IGA .

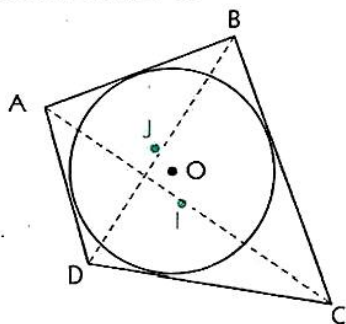
2. Calculer le volume du tétraèdre $ABIG$ et en déduire la distance du point B au plan (IGA) .

58 Soit ABC un triangle et M un point de $\mathcal{E}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer le lieu des points M tels que $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{AC}$:

a) ABC n'est pas un triangle rectangle en A ;

b) ABC est un triangle rectangle en A .

59 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe admettant un cercle inscrit de centre O .



1. a) Démontrer que :

$$\mathcal{A}(AOB) + \mathcal{A}(COD) = \mathcal{A}(BOC) + \mathcal{A}(DOA).$$

b) En déduire que :

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} + \vec{OC} \wedge \vec{OD} = \vec{OB} \wedge \vec{OC} + \vec{OD} \wedge \vec{OA} \quad (1).$$

2. On désigne par I et J les milieux respectifs des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

a) Démontrer, en utilisant (1), que les vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$ sont colinéaires.

b) Conclure et énoncer la propriété ainsi démontrée.

60 Distance entre deux droites

Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites non coplanaires de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u}')$.

1. On pose : $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$.

a) Justifier que $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $(A', \vec{u}', \vec{v})$ sont des repères de deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

b) Démontrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants suivant une droite (Δ) , qui coupe perpendiculairement $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

La droite (Δ) est appelée *perpendiculaire commune* à $(\mathcal{D})$ et à $(\mathcal{D}')$.

2. On désigne par H et H' les points d'intersection respectifs de (Δ) avec $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

a) Démontrer que le produit scalaire $\vec{MM'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')$ reste constant lorsque M décrit $(\mathcal{D})$ et M' décrit $(\mathcal{D}')$.

b) En déduire que :

• pour tous points M de $(\mathcal{D})$ et M' de $(\mathcal{D}')$, $HH' \leq MM'$;

$$\bullet \quad HH' = \frac{|\vec{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}.$$

HH' , plus petite distance entre un point M de $(\mathcal{D})$ et un point M' de $(\mathcal{D}')$, est par définition la distance entre les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Application

a) On donne les points $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $A'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$,

les vecteurs $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{u}'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Calculer la distance entre les droites de repères $(A, \vec{u})$ et $(A', \vec{u}')$.

b) Calculer la distance entre les diagonales (EG) et (CF) du cube $ABCDEFGH$ d'arête a .

Nombres complexes

Introduction

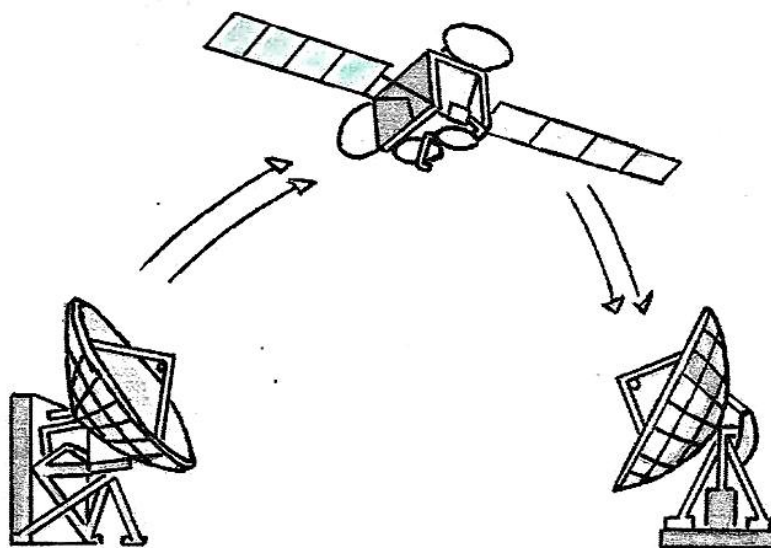
« **A**insi, y a-t-il ou non une racine carrée de -1 ?

Si oui, de quelle sorte d'animal s'agit-il ?

En quoi ce divertissement intellectuel gratuit peut-il concerner les esprits pratiques ? »

Cette réflexion de Ian Stewart fait allusion aux débats philosophiques et aux trois siècles de recherche qui ont abouti au formalisme actuel des nombres complexes.

Ces nombres, que certains mathématiciens du XVI^e siècle qualifiaient d'« impossibles » et d'« inutiles », ont aujourd'hui de nombreuses applications en aérodynamique, en mécanique des fluides, en théorie quantique et en électrotechnique.



$H = A_0 e^{j\omega t}$ est une représentation complexe de l'onde électromagnétique.
(A_0 est l'amplitude et ω la phase.)

SOMMAIRE

1. Étude algébrique	56
2. Étude trigonométrique	62
3. Utilisations des nombres complexes	68

1 Étude algébrique

1.1. Notion de nombre complexe

Définition et propriétés

1. Soit l'équation (E) : $x^2 + 4x + 5 = 0$.

• Vérifier que : $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$.

• En déduire que : (E) $\Leftrightarrow (x + 2)^2 = -1$.

• Cette équation a-t-elle une solution dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

Supposons qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$ et conservons les règles de calcul utilisées dans $\mathbb{R}$.

• Démontrer alors que (E) admet deux solutions que l'on exprimera en fonction de i .

2. Résoudre de même les équations : $x^2 - 6x + 13 = 0$ et $x^2 + 5 = 0$.

Définition

On appelle **nombre complexe** tout nombre de la forme $a + ib$, tel que a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Notation et vocabulaire

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

• L'écriture $a + ib$ est appelée **forme algébrique** de z .

Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et noté $\text{Re}(z)$.

Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et noté $\text{Im}(z)$.

• Si $b = 0$, alors $z = a$; z est un nombre réel ; tout nombre réel est un nombre complexe ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

• Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$; le nombre z est dit **imaginaire pur**.

Nous admettons les propriétés suivantes.

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes. On a :

• $z = z'$ si et seulement si $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$;

• $z = 0$ si et seulement si $\text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 0$.

0 est appelé **nombre complexe nul**.

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

• L'application qui à tout nombre complexe $a + ib$ associe le point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{P}$.

$M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est appelé **point image** du nombre complexe $a + ib$;

$a + ib$ est appelé **affiche** du point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

• L'application qui à tout nombre complexe $a + ib$ associe le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers l'ensemble des vecteurs du plan.

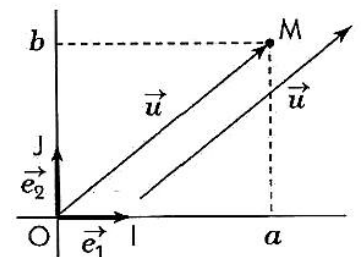
$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est appelé **vecteur image** du nombre complexe $a + ib$;

$a + ib$ est appelé **affiche** du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

• Le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est appelé **plan complexe**.

Un point M d'afixe z de ce plan est souvent noté $M(z)$.

• Les droites de repères $(O, \vec{e}_1)$ et $(O, \vec{e}_2)$ sont respectivement appelées **axe réel** et **axe imaginaire**.



Exemples

- O, I et J sont les points d'affixes respectives 0, 1 et i.
- $\vec{0}$, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont les vecteurs d'affixes respectives 0, 1 et i.

1.2. Opérations dans $\mathbb{C}$

Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

En appliquant les règles de calcul utilisées dans $\mathbb{R}$ et la convention $i^2 = -1$, on définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$.

Définitions

Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

- La somme de z et z' est le nombre complexe : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.
- Le produit de z et z' est le nombre complexe : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Exemples

- $(4 - 5i) + (3 + 2i) = 7 - 3i$
- $(4 - 5i)(3 + 2i) = 22 - 7i$
- $3(4 - 5i) = 12 - 15i$
- $(2 + 5i)^2 = -21 + 20i$
- $2i(4 - 5i) = 10 + 8i$
- $(-1 + 3i)^3 = 26 - 18i$.

L'addition et la multiplication ont les propriétés suivantes.

Propriétés 1

- (1) $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif.
- (2) $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif.
- (3) La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

On dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

Démonstration

- On vérifie aisément que l'addition et la multiplication, lois de composition internes dans $\mathbb{C}$, sont associatives et commutatives et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$; 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$.
- L'**opposé** de tout nombre complexe $a + ib$ est le nombre complexe $-a - ib$.
- L'**inverse** de tout nombre complexe non nul $a + ib$ est le nombre complexe :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Remarques

- $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.
- L'expression de l'inverse du nombre complexe $a + ib$ n'est pas à retenir ; on la retrouve facilement en remarquant que : $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.
- On convient que pour tout nombre complexe non nul z : $z^0 = 1$.

Exemple

$$\frac{1}{4 - 3i} = \frac{4 + 3i}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i.$$

Propriétés 2

Soit z et z' deux nombres complexes.

On a : $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

La démonstration de cette propriété est laissée au soin du lecteur.

Soustraction et division dans $\mathbb{C}$

Les propriétés 1 et 2 précédentes conduisent aux définitions suivantes.

Définitions

Soit z et z' deux nombres complexes.

- La différence de z et z' est le nombre complexe : $z - z' = z + (-z')$.
- Si $z' \neq 0$, le quotient de z par z' est le nombre complexe : $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Exemples

- $(4 - 3i) - (5 + 6i) = (4 - 3i) + (-5 - 6i) = -1 - 9i$.
- $\frac{5 + 6i}{4 - 3i} = (5 + 6i) \times \frac{1}{4 - 3i} = (5 + 6i) \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i \right) = \frac{2}{25} + \frac{39}{25}i$.

Produits remarquables

Les propriétés suivantes, démontrées dans $\mathbb{R}$, restent valables dans $\mathbb{C}$.

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' , pour tout entier naturel n non nul, on a :

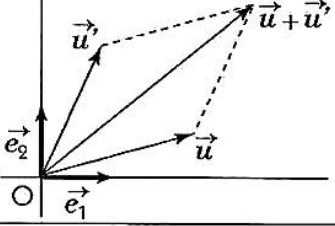
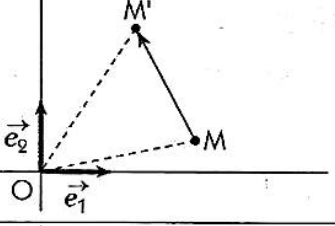
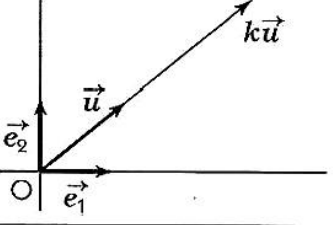
- $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$; $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$;
- $(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2$; $(z + z')^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^{n-k} z'^k$ (formule du binôme de Newton).

Exemples

- $(2 - 3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$
- $(1 + i)^3 = 1 + 3i - i - 2 = 2 + 2i$.

Affixes de $\vec{u} + \vec{u}'$, $\vec{MM}'$ et $k\vec{u}$ ($k \in \mathbb{R}$)

Le tableau suivant donne les interprétations géométriques de certaines opérations dans $\mathbb{C}$.

Somme		$z_{\vec{u}} + z_{\vec{u}'} = z_{\vec{u} + \vec{u}'}$
Différence		$z_{M'} - z_M = z_{\vec{MM}'}$
Produit par un nombre réel		$kz_{\vec{u}} = z_{k\vec{u}}$

Affixe du barycentre de n points pondérés

Propriété

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$, n points d'affixes respectives $z_{A_1}, z_{A_2}, \dots, z_{A_n}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, n nombres réels dont la somme est non nulle.

L'affixe du barycentre G de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ est : $z_G = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_{A_k}}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$.

Cette propriété est déduite de la définition du barycentre et des propriétés des affixes de vecteurs.

Exemples

- L'abscisse du milieu d'un segment $[AB]$ est : $\frac{z_A + z_B}{2}$.
- L'abscisse du centre de gravité d'un triangle ABC est : $\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

1.3. Conjugué et module d'un nombre complexe

Conjugué d'un nombre complexe

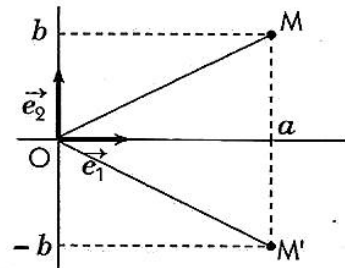
Définition

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

On appelle conjugué de z le nombre complexe, noté $\bar{z}$, tel que : $\bar{z} = a - ib$.

Interprétation géométrique

Les points M et M' d'abscisses respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



Exemples

$$\overline{1+i} = 1-i \quad ; \quad \overline{3-2i} = 3+2i \quad ; \quad \overline{-2+i} = -2-i.$$

Les propriétés suivantes se déduisent de la définition.

Propriétés 1

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$. On a :

- $\bar{\bar{z}} = z$;
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$;
- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$;
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$;
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$ et $z \neq 0$.

Exemples

$$\begin{aligned} \overline{-3+2i} &= -3-2i = -3+2i & ; & & (-3+2i)(-3-2i) &= 9 - (-4) = 13 & ; \\ (-3+2i) + (-3-2i) &= -6 & ; & & (-3+2i) - (-3-2i) &= 4i. \end{aligned}$$

Propriétés 2

Pour tous nombres complexes z et z' , pour tout entier relatif n , on a :

- $$\begin{aligned} (1) \quad \overline{z+z'} &= \bar{z} + \bar{z'} & ; & & (2) \quad \overline{-z} &= -\bar{z} & ; & & (3) \quad \overline{zz'} &= \bar{z} \times \bar{z'} & ; \\ (4) \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}} \quad (z \neq 0) & ; & & (5) \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z' \neq 0) & ; & & (6) \quad \overline{z^n} &= (\bar{z})^n \quad (z \neq 0). \end{aligned}$$

Démonstration

Posons : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

(1) et (2) Ces propriétés se déduisent immédiatement de la définition.

(3) On a : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ et $\bar{z} \times \bar{z'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$;
donc : $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

(4) Si $z \neq 0$, on a : $z \times \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{\left(z \times \frac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1 \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

(5) Si $z' \neq 0$, on a : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.

(6) Si $z \neq 0$, on démontre par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

Pour $n < 0$, on a : $-n > 0$; donc : $\overline{z^n} = \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)} = \frac{1}{\overline{z^{-n}}} = \frac{1}{(\bar{z})^{-n}} = (\bar{z})^n$.

Module d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

On a : $z\bar{z} = a^2 + b^2$; donc $z\bar{z}$ est un nombre réel positif.

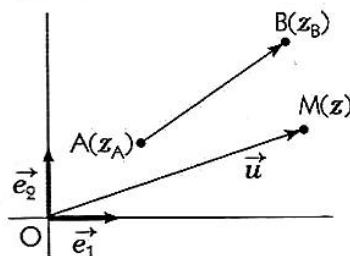
Définition

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$.

On appelle module de z le nombre réel positif, noté $|z|$, tel que : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Interprétation géométrique

- Si z est l'afixe d'un point M , on a : $|z| = OM$.
- Si z est l'afixe d'un vecteur $\vec{u}$, on a : $|z| = \|\vec{u}\|$.
- Si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B , on a : $|z_B - z_A| = AB$.



Exemples

$$\bullet |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5 \quad ; \quad \bullet \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad ; \quad \bullet |-3i| = \sqrt{0 + 9} = 3.$$

Remarques

- Si $b = 0$, on a : $|z| = |a| = \sqrt{a^2}$; la notation utilisée est cohérente avec celle de la valeur absolue d'un nombre réel.
- Pour tout nombre complexe z , on a : $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$.
- Soit z un nombre complexe, on a : $|z| = 1$ si et seulement si $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$) ;
 $|z| = 1$ si et seulement si $z = 0$.

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' , pour tout entier relatif n , on a :

- (1) $|zz'| = |z| \times |z'|$;
- (2) $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ ($z \neq 0$) ;
- (3) $|z^n| = |z|^n$ ($z \neq 0$) ;
- (4) $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ($z' \neq 0$) ;
- (5) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Démonstration

Posons : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

(1) On a : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Donc : $|zz'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = |z| \times |z'|$.

(2) Si $z \neq 0$, on a : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$; donc : $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}$.

(3) Si $z \neq 0$, pour $n > 0$ la propriété (1) et un raisonnement par récurrence permet de démontrer le résultat.

Pour $n < 0$, on a : $-n > 0$; donc : $|z^n| = \left| \frac{1}{z^{-n}} \right| = \frac{1}{|z^{-n}|} = \frac{1}{|z|^{-n}} = |z|^n$.

(4) Si $z' \neq 0$, on a : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$.

(5) L'inégalité triangulaire est déduite de l'interprétation géométrique de $z + z'$.

Exemples

$$\bullet |(-\sqrt{3} + i)(1 + i)| = |-\sqrt{3} + i| \times |1 + i| = 2(\sqrt{2})^2 = 4 ;$$

$$\bullet \left| \frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2} \right| = \frac{|-\sqrt{3} + i|^3}{|1 + i|^2} = \frac{2^3}{(\sqrt{2})^2} = 4.$$

1.4. Travaux dirigés

On se propose de résoudre sur des exemples des équations du troisième degré du type $x^3 + px + q = 0$, où p et q sont des nombres réels.

1. Soit l'équation $(E_1) : x^3 - 6x - 6 = 0$.

a) Vérifier graphiquement que cette équation admet une unique solution réelle, dont on précisera un encadrement à 10^{-1} près.

b) Démontrer que si u et v sont deux nombres tels que $u^3 + v^3 = 6$ et $uv = 2$, alors $u + v$ est solution de (E_1) .

c) Démontrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2 - 6X + 8 = 0$.

Résoudre cette équation et en déduire la solution réelle de l'équation (E_1) .

Cette méthode de résolution est appelée « méthode de Cardan ».

2. Soit l'équation $(E_2) : x^3 - 15x - 4 = 0$.

a) Vérifier graphiquement que cette équation admet trois solutions réelles.

b) Démontrer que si u et v sont deux nombres tels que $u^3 + v^3 = 4$ et $uv = 5$, alors $u + v$ est solution de (E_2) .

c) Démontrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2 - 4X + 125 = 0$.

Cette équation a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$? La résoudre dans $\mathbb{C}$.

d) Calculer $(2 + i)^3$ et $(2 - i)^3$. En déduire les solutions de l'équation (E_2) .

Cette méthode, qui complète celle de Cardan en utilisant les nombres complexes, est due au mathématicien Bombelli (1572).

Solution

1. a) Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x - 6$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J) .

L'étude de f et la courbe $(\mathcal{C})$ permettent de vérifier que l'équation (E_1) a une unique solution réelle α ; on obtient un encadrement à 10^{-1} près de α à l'aide d'une calculatrice : $2,8 < \alpha < 2,9$.

b) On a : $(u + v)^3 - 6(u + v) - 6 = (u^3 + v^3) + 3uv(u + v) - 6(u + v) - 6$
 $= 6 + 6(u + v) - 6(u + v) - 6 = 0$.

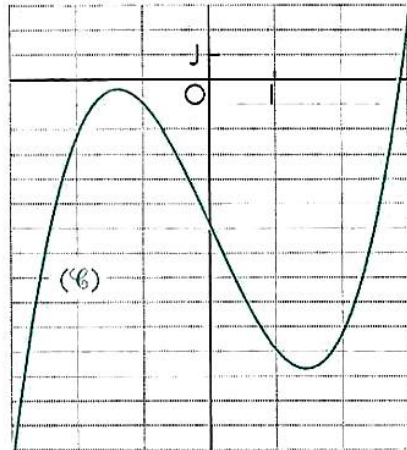
Donc, $u + v$ est solution de (E_1) .

c) On a : $u^3 + v^3 = 6$ et $u^3v^3 = 8$.

Donc, u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2 - 6X + 8 = 0$.

On obtient : $u^3 = 2$ et $v^3 = 4$.

On en déduit que $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ est la solution réelle de l'équation (E_1) .



2. a) Soit la fonction $g : x \mapsto x^3 - 15x - 4$ et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J) .

L'étude de g et la courbe $(\mathcal{C}')$ permettent de vérifier que l'équation (E_2) a trois solutions réelles.

b) On a : $(u + v)^3 - 15(u + v) - 4 = (u^3 + v^3) + 3uv(u + v) - 15(u + v) - 4$
 $= 4 + 15(u + v) - 15(u + v) - 4 = 0$.

Donc, $u + v$ est solution de (E_2) .

c) On a : $u^3 + v^3 = 4$ et $u^3v^3 = 125$.

Donc, u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $X^2 - 4X + 125 = 0$.

$\Delta' = -121$; donc cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

On a : $X^2 - 4X + 125 = 0 \Leftrightarrow (X - 2)^2 + 121 = 0$
 $\Leftrightarrow (X - 2 - 11i)(X - 2 + 11i) = 0$
 $\Leftrightarrow X = 2 + 11i$ ou $X = 2 - 11i$.

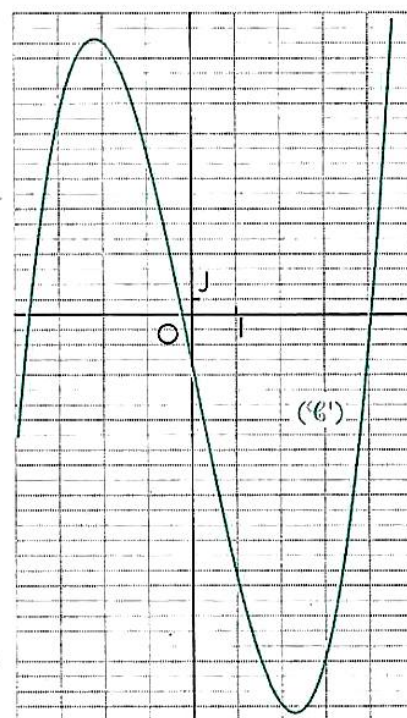
d) On obtient : $u^3 = 2 + 11i$ et $v^3 = 2 - 11i$.

On a : $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ et $(2 - i)^3 = 2 - 11i$.

On en déduit que 4 est une solution de l'équation (E_2) .

Pour déterminer les deux autres solutions de cette équation, on remarque que : $(E_2) \Leftrightarrow (x - 4)(x^2 + 4x + 1) = 0$.

Les solutions de (E_2) sont : 4, $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.



Remarque

Plus généralement une solution réelle de l'équation $x^3 + px + q = 0$, où p et q sont des nombres réels,

est donnée par la formule de Cardan : $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0 \right)$.

Exercices

1.a Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

- a) $(1 + 3i) - (2 - 5i)$ b) $(1 - 2i)(2 + i)$
c) $2i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ d) $(1 + i)(1 - 2i)(1 + 3i)$
e) $(2 - 3i)^2$ f) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$.

1.b Calculer et écrire sous forme algébrique les inverses des nombres complexes suivants.

- a) $-4 + 3i$ b) $\sqrt{2}(-1 + i)$ c) $-\sqrt{3} + i$ d) i .

1.c Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

- a) $\frac{3 - 2i}{1 + i}$ b) $\frac{4 + 2i}{4 - 3i}$ c) $\frac{i}{3 + 4i}$ d) $\frac{3 + 4i}{i}$.

1.d Placer dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $3 + i$, $-2 - i$ et $-1 + 4i$.

1. Déterminer les affixes des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AB} + \vec{AC}$ et $2\vec{AB} - 3\vec{AC}$.

2. Calculer l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC.

3. Calculer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

1.e Soit les nombres complexes :

$$z = 2 + i \text{ et } z' = 1 - i.$$

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

- a) $\overline{(2z + z')}$ b) $\overline{\left(z + \frac{2}{z'}\right)}$
c) $\overline{(z^2 + z'^2)}$ d) $\overline{(z + z')^2}$.

1.f Calculer le module des nombres complexes suivants.

- a) $-\sqrt{3} + i$ b) $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})(-3 + 4i)$
c) $\frac{2 + i}{-1 + i}$ d) $2(-\sqrt{3} - i)^4$.

2 Étude trigonométrique

Dans cette leçon, le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

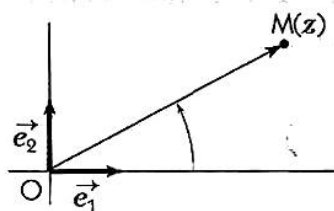
2.1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Arguments d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle argument de z toute mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \vec{OM})$.



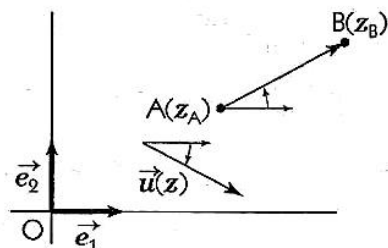
Notation

Si α et α' sont deux arguments de z , on a : $\alpha' = \alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

On note : $\arg(z) = \alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$.

Interprétation géométrique

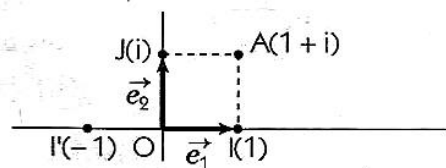
- Si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$, $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \vec{u})$.
- Si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B, $\arg(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \vec{AB})$.



Exemples

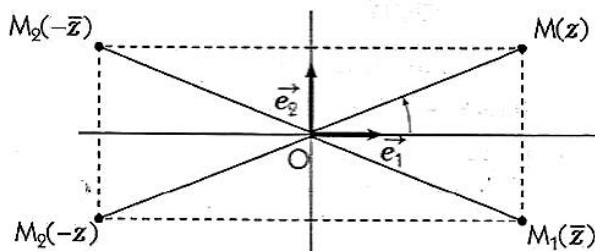
$$\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad ; \quad \arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] ;$$

$$\arg(-1) \equiv \pi [2\pi] \quad ; \quad \arg(1) \equiv 0 [2\pi].$$



Remarques

- Le nombre complexe nul n'a pas d'argument.
- z est réel $\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg(z) \equiv 0 [\pi]$;
 z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.
- Pour tout nombre complexe z non nul, on a :
 $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$;
 $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$;
 $\arg(-\bar{z}) \equiv \pi - \arg(z) [2\pi]$.



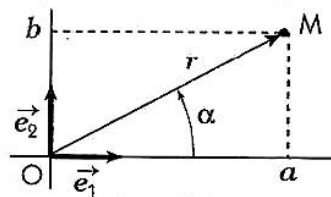
Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$ et M son image dans le plan complexe. Désignons par r le module de z et α un argument de z .
 On a : $a = r \cos \alpha$ et $b = r \sin \alpha$; donc : $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α .

On appelle forme trigonométrique de z l'écriture : $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.



Exemples

$$1+i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \quad ; \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Propriété

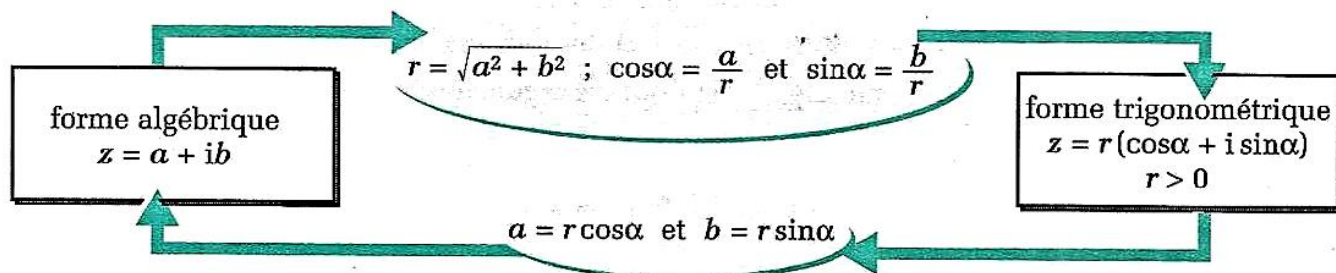
Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

On a : $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi]$.

Cette propriété se déduit des définitions du module et d'un argument d'un nombre complexe.

Remarques

- Soit z un nombre complexe non nul. Les règles de passage entre forme algébrique et forme trigonométrique de z sont résumées par le schéma suivant.



- Soit $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;
- si $r > 0$, la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$;
- si $r < 0$, la forme trigonométrique de z est $z = -r[\cos(\alpha + \pi) + i\sin(\alpha + \pi)]$ et $\arg(z) \equiv \alpha + \pi [2\pi]$.

Arguments d'un produit et d'un quotient

Propriétés 1

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' , pour tout entier relatif n , on a :

- (1) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$; (2) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$;
 (3) $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$; (4) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$.

Démonstration

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls de formes trigonométriques : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $z' = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$.

$$(1) \text{ On a : } zz' = rr'[(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha') + i(\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha')] \\ = rr'[(\cos(\alpha + \alpha') + i\sin(\alpha + \alpha'))], \text{ avec } rr' > 0.$$

On en déduit que $\alpha + \alpha'$ est un argument de zz' ; c'est-à-dire : $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$.

$$(2) \text{ On a : } \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \frac{1}{r}[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)], \text{ avec } \frac{1}{r} > 0.$$

On en déduit que : $-\alpha$ est un argument de $\frac{1}{z}$; c'est-à-dire : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$.

(3) Pour $n \geq 0$, la propriété (1) et un raisonnement par récurrence permet de démontrer le résultat. Pour $n < 0$, on a : $-n > 0$; donc : $z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n}$.

On en déduit que : $\arg(z^n) \equiv -n \arg\left(\frac{1}{z}\right) [2\pi]$; c'est-à-dire : $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$.

(4) L'égalité $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ et les propriétés (1), (2) permettent de démontrer le résultat.

Remarque

Soit A , B et C trois points deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

$$\text{On a : } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \text{Mes}(\widehat{AB, AC}) [2\pi].$$

Exemples

Déterminer les arguments des nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

$$z_1 = (-\sqrt{3} + i)(1 + i)^2 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}.$$

$$\text{On a : } \arg(-\sqrt{3} + i) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] ; \text{ donc :}$$

- $\arg(z_1) \equiv \frac{5\pi}{6} + (2 \times \frac{\pi}{4}) [2\pi]$; c'est-à-dire : $\arg(z_1) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$;
- $\arg(z_2) \equiv (3 \times \frac{5\pi}{6}) - (2 \times \frac{\pi}{4}) [2\pi]$; c'est-à-dire : $\arg(z_2) \equiv 0 [2\pi]$.

Propriétés 2

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, n un entier relatif.

- (1) zz' est le nombre complexe de module $|z| \times |z'|$ et dont un argument est $\arg(z) + \arg(z')$.
 (2) $\frac{1}{z}$ est le nombre complexe de module $\frac{1}{|z|}$ et dont un argument est $-\arg(z)$.
 (3) z^n est le nombre complexe de module $|z|^n$ et dont un argument est $n \arg(z)$.
 (4) $\frac{z}{z'}$ est le nombre complexe de module $\frac{|z|}{|z'|}$ et dont un argument est $\arg(z) - \arg(z')$.

Ces propriétés réunissent celles établies précédemment pour les modules et les arguments.

Formule de Moivre

Soit z le nombre complexe tel que : $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

z a pour module 1 et argument α ; donc, pour tout entier relatif n , z^n a pour module 1 et argument $n\alpha$.

On en déduit la propriété suivante appelée **formule de Moivre**.

Propriété

Pour tout nombre réel α et pour tout entier relatif n , on a : $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

Exemple

Calculer $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1999}$.

On a : $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$; donc : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1999} = \cos \frac{1999\pi}{4} + i \sin \frac{1999\pi}{4}$.

Or : $\frac{1999\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$; donc : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1999} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.2. Notation exponentielle d'un nombre complexe

Définition et propriétés

Considérons la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $f(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Pour tous nombres réels α et β , on a : $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$ et $f'(\alpha) = if(\alpha)$.

L'analogie de ces propriétés avec celles de la fonction exponentielle (cf. chapitre 12) conduit à la notation suivante.

Notation

Pour tout nombre réel α , on pose : $\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$.

On déduit de cette notation la définition suivante.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α .

On appelle **forme exponentielle** de z l'écriture $z = r e^{i\alpha}$.

Exemples

$$1 = e^{i0}$$

$$-1 = e^{i\pi}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Sous forme exponentielle, les propriétés établies précédemment s'écrivent de la façon suivante.

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = r e^{i\alpha}$ et $z' = r' e^{i\alpha'}$, n un entier relatif. On a :

$$(1) \quad zz' = rr' e^{i(\alpha+\alpha')} ; \quad (2) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\alpha} ; \quad (3) \quad z^n = r^n e^{in\alpha} ; \quad (4) \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\alpha-\alpha')}.$$

Exemples

Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z' = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\text{On a : } zz' = \frac{3}{2} e^{-i\frac{\pi}{12}} ; \quad z^5 = 243 e^{i\frac{5\pi}{4}} ; \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{3} e^{-i\frac{\pi}{4}} ; \quad \frac{z}{z'} = 6e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

Formules d'Euler

Soit α un nombre réel.

On a : $\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$; donc : $\cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha}$.

On en déduit les propriétés suivantes, appelées *formules d'Euler*.

Propriétés

Pour tout nombre réel α , on a : $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

Ces formules sont notamment utilisées en trigonométrie (cf. 3.2.).

2.3. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Définition et propriétés

Définition

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

On appelle racine n -ième de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

Soit Z et z les nombres complexes tels que : $Z = r e^{i\alpha}$ et $z = \rho e^{i\theta}$.

Pour tout entier naturel n ($n \geq 2$), on a : $z^n = Z \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = r e^{i\alpha}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta \equiv \frac{\alpha}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right] \end{cases}$$

Donc Z admet n racines n -ièmes :

$$z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\alpha}{n}}, z_1 = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n})}, \dots, z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \dots, z_{n-1} = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n})}.$$

Interprétation géométrique

On désigne par $M_0, M_1, \dots, M_k, \dots, M_{n-1}$ les images respectives de ces solutions dans le plan complexe.

On a : $OM_0 = OM_1 = \dots = OM_k = \dots = OM_{n-1} = \sqrt[n]{r}$.

De plus, pour tout couple de points (M_k, M_{k+1}) , on a :

$$\text{Mes}(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) \equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi].$$

Donc, les points M_k ($k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$) sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

On en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés

Soit $r e^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$).

- $r e^{i\alpha}$ admet n racines n -ièmes telles que : $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ ($k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$).
- Les images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

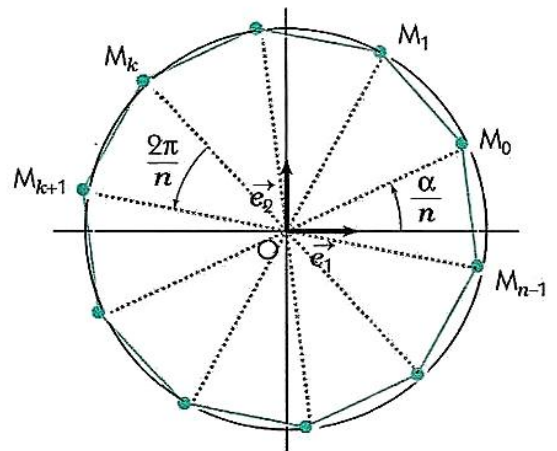
Remarques

- La somme des n racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle.
- 1 admet n racines n -ièmes telles que : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$).

Exemples de calculs de racines n -ièmes

1. Calculer les racines carrées de $1 - i\sqrt{3}$.

On a : $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Posons : $z = \rho e^{i\theta}$; donc : $z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$.



$$\text{On a : } z^2 = 1 - i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 2 \\ 2\theta \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta \equiv -\frac{\pi}{6} [\pi] \end{cases}$$

Donc, $1 - i\sqrt{3}$ admet deux racines carrées z_1 et z_2 telles que :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Calculer les racines cubiques de 1.

Posons : $z = \rho e^{i\theta}$; donc : $z^3 = \rho^3 e^{3i\theta}$.

$$\text{On a : } z^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0 [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$$

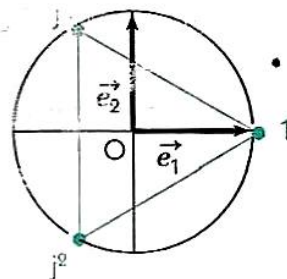
Donc, 1 admet trois racines cubiques z_1 , z_2 et z_3 telles que :

$$z_1 = 1, \quad z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

• Les images de z_1 , z_2 et z_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

• Si on pose $z_2 = j$, on a : $z_3 = j^2 = \bar{j}$ et $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Donc : $1 + j + j^2 = 0$.



Exercices

2.a Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

a) $2i$ b) $\sqrt{3} + 3i$ c) $\sqrt{6} + i\sqrt{2}$ d) -5 .

2.b Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

a) $(2 + 2i)(1 - i)$ b) $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{1 + i}$

d) $\frac{-2i}{1 + i\sqrt{3}}$ e) $(-1 - i)^4$ f) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^2$.

2.c Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .

b) Écrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit $z_1 z_2$.

c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

2.d Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

a) $\cos\alpha - i\sin\alpha$ b) $-\sin\alpha + i\cos\alpha$

c) $1 + i\tan\alpha$ d) $\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$.

2.e Placer dans le plan complexe les points d'affixes respectives :

$e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2.f 1. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z = 1 - i\sqrt{3}$ et $z' = -1 - i$.

2. En déduire le module et un argument des nombres complexes : $(\bar{z}z')^2$, $\frac{z^2}{z'}$.

2.g 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3}).$$

2. Écrire chacune des solutions sous forme algébrique.

3 Utilisations des nombres complexes

3.1. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Racines carrées d'un nombre complexe

On a vu dans la leçon précédente une méthode pour déterminer les racines n -ièmes d'un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique.

On peut cependant déterminer les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique en utilisant les produits remarquables et les modules. Cette méthode est décrite dans l'exemple ci-après.

Calculer les racines carrées de $3 - 4i$.

Posons : $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$) ; on a : $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ et $|z^2| = x^2 + y^2$.

$$\text{Donc : } z^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases}.$$

Le dernier système a deux solutions : $(2 ; -1)$ et $(-2 ; 1)$.

Donc, $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -2 + i$ sont les racines carrées de $3 - 4i$.

Équations du second degré

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des nombres complexes ($a \neq 0$).

On a : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$; posons : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution double : $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, alors Δ admet deux racines carrées dans $\mathbb{C}$: δ et $-\delta$.

$$\text{On a : (E)} \Leftrightarrow a\left[\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\right] = 0.$$

Donc, (E) a deux solutions distinctes : $-\frac{b+\delta}{2a}$ et $-\frac{b-\delta}{2a}$.

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des nombres complexes ($a \neq 0$).

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par δ et $-\delta$ les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de Δ .

- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution double : $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, alors (E) a deux solutions distinctes : $-\frac{b+\delta}{2a}$ et $-\frac{b-\delta}{2a}$.

Exemples

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $z^2 + z + 1 = 0$.

$$\text{On a : } \Delta = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2.$$

$$\text{Les solutions de } (E_1) \text{ dans } \mathbb{C} \text{ sont : } z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) : $iz^2 - iz - 3 - i = 0$.

$$\text{On a : } \Delta = -1 + 4i(3 + i) = -5 + 12i.$$

Déterminons les racines carrées du nombre complexe $-5 + 12i$.

$$\text{On a : } (x + iy)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy = 6 \end{cases}.$$

Ce système a deux solutions : $(2 ; 3)$ et $(-2 ; -3)$.

$$\text{Donc, } (E_2) \text{ a deux solutions dans } \mathbb{C} : z_1 = \frac{i + (2 + 3i)}{2i} \text{ et } z_2 = \frac{i - (2 + 3i)}{2i} ;$$

c'est-à-dire : $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -1 + i$.

Équations se ramenant au second degré

1. Soit l'équation (E) : $z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$.

a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure.

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

a) Posons : $z_1 = ib$ ($b \in \mathbb{R}^*$).

z_1 est solution de (E) $\Leftrightarrow (ib)^3 + (4 - 5i)(ib)^2 + (8 - 20i)ib - 40i = 0$ ($b \in \mathbb{R}^*$)

$$\Leftrightarrow 4b(b - 5) + i(b^3 - 5b^2 - 8b + 40) = 0 \quad (b \in \mathbb{R}^*)$$

$$\Leftrightarrow b = 5.$$

Donc, (E) admet une solution imaginaire pure : $z_1 = 5i$.

b) L'équation (E) peut s'écrire : $(z - 5i)(z^2 + az + b) = 0$ ($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}$).

Par identification de polynômes, on obtient : $(z - 5i)(z^2 + 4z + 8) = 0$.

• Soit l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$; on a : $\Delta = -16 = (4i)^2$.

Donc, cette équation a deux solutions : $z_2 = -2 + 2i$ et $z_3 = -2 - 2i$.

• On en déduit que les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont : $z_1 = 5i$, $z_2 = -2 + 2i$ et $z_3 = -2 - 2i$.

2. Soit l'équation (E) : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$.

a) Démontrer que (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$.

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

a) On a : (E) $\Leftrightarrow z^2(z^2 - 5z + 6 - \frac{5}{z} + \frac{1}{z^2}) = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 5 \left(z + \frac{1}{z} \right) + 4 \right] = 0.$$

Or, 0 n'est pas solution de (E) ; donc, (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$.

b) L'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$ a pour solutions : 1 et 4.

Donc : (E) $\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 1$ ou $z + \frac{1}{z} = 4$

$$\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 4z + 1 = 0.$$

On en déduit que les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont : $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$,

$$z_3 = 2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_4 = 2 - \sqrt{3}.$$

3.2. Trigonométrie et nombres complexes

Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ ($n \in \mathbb{N}$)

La formule de Moivre permet de retrouver les deux formules de duplication établies en classe de première et de généraliser ces résultats.

• Ainsi : $\cos 2x + i \sin 2x = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x$;

donc : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

• De même : $\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i(3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x)$;

donc : $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$ et $\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$;

c'est-à-dire : $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ et $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

• Plus généralement et pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos^k x i^{n-k} \sin^{n-k} x.$$

On en déduit le point méthode suivant.

M

Pour exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$) en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, on peut utiliser la formule de Moivre : $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$.

$\cos nx$ et $\sin nx$ sont alors respectivement les parties réelle et imaginaire du développement de $(\cos x + i \sin x)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$ ($n \in \mathbb{N}$)

Les formules d'Euler permettent de retrouver les deux formules de linéarisation établies en classe de première et de généraliser ces résultats.

- Ainsi : $\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2$ et $\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2$;
c'est-à-dire : $\cos^2 x = \frac{1}{4}(e^{i2x} + 2 + e^{-i2x})$ et $\sin^2 x = -\frac{1}{4}(e^{i2x} - 2 + e^{-i2x})$;
donc : $\cos^2 x = \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$.
- De même : $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x})$
 $= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)$;
donc : $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$.

Plus généralement, on a la méthode suivante.

M

Pour linéariser $\cos^n x$ et $\sin^n x$ ($n \in \mathbb{N}$) on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules d'Euler et du binôme de Newton :

- développer et réduire $\cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n$ et $\sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n$;
- regrouper deux à deux les termes d'exposants opposés et exprimer chacun d'eux en fonction de termes de la forme $\cos kx$ ou $\sin kx$.

Transformation de produit en somme et de somme en produit

Propriétés 1

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$;
- $\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$;
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

Démonstration

- En appliquant les formules d'Euler, on a :

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \right) \times \left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \right) = \frac{1}{4} (e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}) \\ &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]. \end{aligned}$$

- On démontre de façon analogue les deux autres propriétés.

Propriétés 2

Pour tous nombres réels p et q , on a :

- $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$;
- $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$;
- $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$;
- $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$.

Démonstration

Soit p et q deux nombres réels.

- On a : $e^{ip} + e^{iq} = (\cos p + \cos q) + i(\sin p + \sin q)$ (1).

En remarquant que $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$, on obtient :

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2 \left(\cos \frac{p+q}{2} + i \sin \frac{p+q}{2} \right) \cos \frac{p-q}{2}$$

$$e^{ip} + e^{iq} = \left(2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\right) + i\left(2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\right) \quad (2).$$

En comparant (1) et (2), on déduit que :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$$

• En utilisant $e^{ip} - e^{iq} = (\cos p - \cos q) + i(\sin p - \sin q)$, on démontre de façon analogue que :

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

Exemple

Linéariser l'expression $\sin 3x \cos^2 2x$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sin 3x \cos^2 2x &= \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8i} (e^{i3x} - e^{-i3x})(e^{i4x} + 2 + e^{-i4x}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{i7x} - e^{-i7x}}{2i}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right). \end{aligned}$$

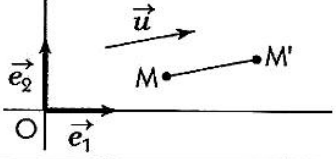
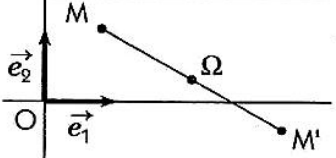
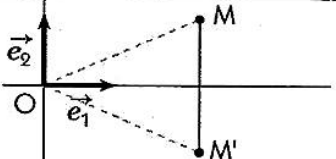
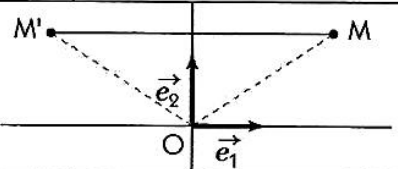
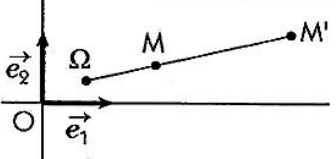
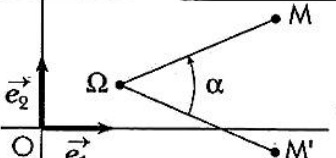
$$\text{Donc : } \sin 3x \cos^2 2x = \frac{1}{4} \sin 7x + \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin x.$$

3.3. Géométrie et nombres complexes

Dans tout ce paragraphe, le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Transformations et nombres complexes

Nous indiquons dans le tableau ci-dessous l'écriture complexe de certaines transformations du plan. Dans ce tableau, $M(z)$ et $M'(z')$ désignent un point et son image, ainsi que leurs affixes, par chacune de ces transformations.

Transformation	Image M' d'un point M	Définition géométrique	Écriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(a)$		$\vec{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + a$
Symétrie de centre $\Omega(\omega)$		$\vec{\Omega M'} = -\vec{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Symétrie par rapport à l'axe réel		$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{e}_1, \vec{OM'}) = -(\vec{e}_1, \vec{OM}) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$
Symétrie par rapport à l'axe imaginaire		$\begin{cases} OM' = OM \\ (\vec{e}_1, \vec{OM'}) = \pi - (\vec{e}_1, \vec{OM}) \end{cases}$	$z' = -\bar{z}$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k		$\vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{Mes}(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\alpha} (z - \omega)$

Exemples

• La rotation de centre $\Omega\left(\frac{0}{2}\right)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ a pour écriture complexe : $z' - 2i = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - 2i)$;
c'est-à-dire : $z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i$.

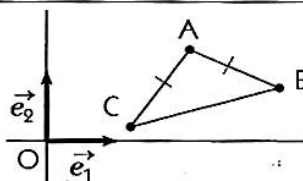
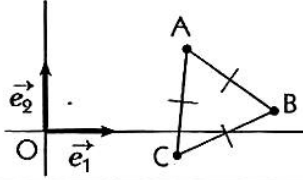
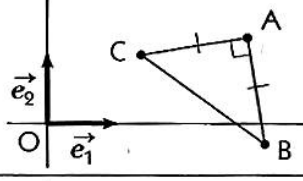
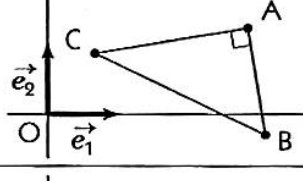
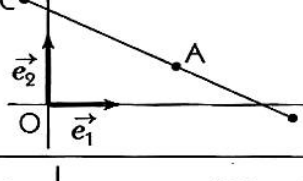
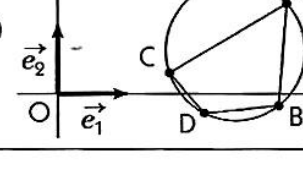
Le point $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ a pour affixe $1 + i\sqrt{3}$; son image par cette rotation est le point A' d'affixe $2 - \sqrt{3} + i$,
c'est-à-dire le point $A'\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{1}\right)$.

• La transformation h d'écriture complexe $z' = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i$ est l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre son unique point invariant.

L'affixe ω de ce point est telle que : $\omega = -\frac{1}{2}\omega + 3 - 6i$; c'est-à-dire : $\omega = 2 - 4i$.

Configurations du plan et nombres complexes

Dans le tableau ci-dessous, nous caractérisons certaines configurations géométriques à l'aide des nombres complexes.

Configuration	Caractérisation géométrique	Caractérisation complexe
Triangle ABC isocèle en A 	$AB = AC$ et $\text{mes } \hat{A} = \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$)	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$ $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
Triangle ABC équilatéral 	$AB = AC$ et $\text{mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A 	$AB = AC$ et $\text{mes } \hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A 	$\text{mes } \hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$ ($b \in \mathbb{R}^*$)
Points A, B, C alignés 	$\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0 [\pi]$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques 	$\text{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \text{Mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) [\pi]$ ($\text{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \neq 0 [\pi]$)	$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}^*$

Démonstration

- Les caractérisations des triangles isocèle, équilatéral et rectangle isocèle se font à l'aide de la caractérisation complexe d'une rotation.
- Les caractérisations du triangle rectangle et des points alignés se font à l'aide des caractérisations complexes d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire pur.
- La caractérisation des points cocycliques se fait à l'aide de la caractérisation complexe d'un nombre réel et des lignes de niveau $M \mapsto \text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

Lieux géométriques et nombres complexes

1. Soit A le point d'affixe z_A tel que : $z_A = 1 + i$.

Déterminer le lieu des points M dont l'affixe z vérifie :

- a) $|z - z_A| = 2$.
 b) $\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{6} [\pi]$; $\arg(z - z_A) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Solution

a) • On a : $|z - z_A| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$.

Le lieu de M est le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon 2.

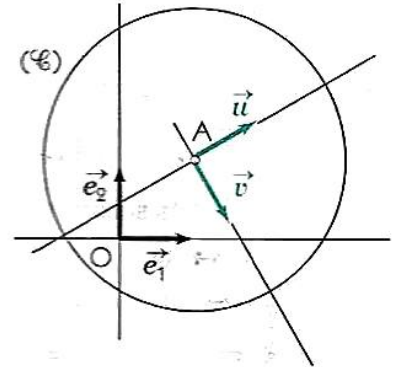
b) • On a : $\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{6} [\pi] \Leftrightarrow \text{Mes}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{6} [\pi]$.

Le lieu de M est la droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$, privée de A,

avec $\text{Mes}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}) = \frac{\pi}{6} [\pi]$.

• On a : $\arg(z - z_A) = -\frac{\pi}{3} [2\pi] \Leftrightarrow \text{Mes}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Le lieu de M est la demi-droite de repère $(A, \overrightarrow{v})$, privée de A, avec $\text{Mes}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.



Les propriétés suivantes généralisent l'étude précédente.

Propriétés

Soit A le point d'affixe z_A et M un point d'affixe z .

- Si R est un nombre réel strictement positif, le lieu des points M dont l'affixe z vérifie $|z - z_A| = R$ est le cercle de centre A et de rayon R.
- Si α est un nombre réel, le lieu des points M dont l'affixe z vérifie $\arg(z - z_A) = \alpha [\pi]$ est la droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$, privée de A, avec $\text{Mes}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}) = \alpha [\pi]$.

Remarque

Le lieu des points M dont l'affixe z vérifie $\arg(z - z_A) = \alpha [2\pi]$ est la demi-droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$, privée de A, avec $\text{Mes}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}) = \alpha [2\pi]$.

2. À tout nombre complexe z , différent de $-2 - i$, on associe le nombre complexe Z tel que :

$$Z = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}.$$

Déterminer, géométriquement puis analytiquement, le lieu des points M d'affixe z tels que :

a) $|Z| = 1$; $|Z| = \frac{1}{2}$.

b) Z est un nombre réel ; Z est un nombre imaginaire pur.

Solution

Méthode géométrique

Soit A et B les points d'affixes respectifs : $z_A = -2 - i$ et $z_B = 4 + 2i$; on a : $Z = \frac{z - z_B}{z - z_A}$.

a) • $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z - z_B}{z - z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow MA = MB$.

Le lieu de M est la médiatrice (Δ) de $[AB]$.

• $|Z| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{z - z_B}{z - z_A} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{1}{2}$.

Le lieu de M est le cercle (Γ) de diamètre $[CD]$ tel que :

$C = \text{bar}\{(A, 1) ; (B, 2)\}$, c'est-à-dire : $C(2 + i)$

$D = \text{bar}\{(A, 1) ; (B, -2)\}$, c'est-à-dire : $D(10 + 5i)$.

$$b) \bullet Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = z_B \text{ ou } \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]$$

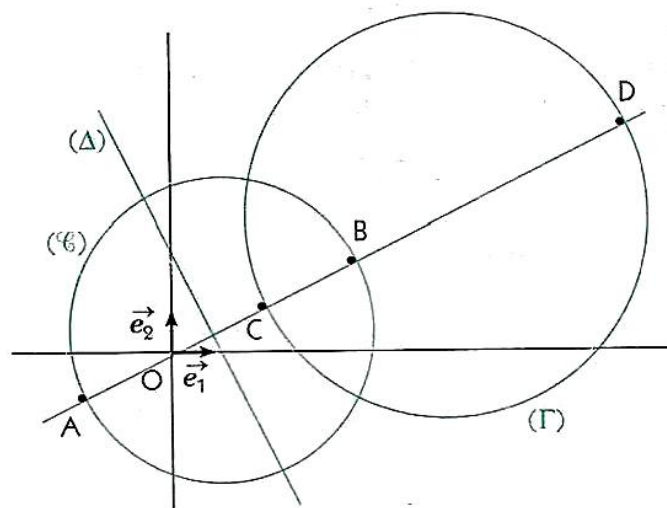
$$\Leftrightarrow M = B \text{ ou } \text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 0 [\pi].$$

Le lieu de M est la droite (AB), privée du point A.

$$\bullet Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Le lieu de M est le cercle (C) de diamètre [AB] privé des points A et B.



Méthode algébrique

Posons : $z = x + iy$; on a : $Z = \frac{(x-4) + i(y-2)}{(x+2) + i(y+1)} = \frac{(x^2 + y^2 - 2x - y - 10) + i(-3x + 6y)}{(x+2)^2 + (y+1)^2}$.

Les lieux cherchés seront déterminés par leurs équations.

$$a) \bullet |Z| = 1 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow 4x + 2y - 5 = 0.$$

$$\bullet |Z| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4[(x-4)^2 + (y-2)^2] = (x+2)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 6y + 25 = 0.$$

$$b) \bullet Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3x + 6y = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

$$\bullet Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - y - 10 = 0.$$

c) On désigne par α l'argument de Z.

$$\text{On a : } \arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \Leftrightarrow \tan \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{-3x + 6y}{x^2 + y^2 - 2x - y - 10} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 7y - 10 = 0.$$

3.4. Travaux dirigés

1. Soit ABC un triangle et A' le milieu de [BC]. On construit, à l'extérieur de ce triangle, les triangles rectangles isocèles ABB' et ACC', de sommet A. Démontrer en utilisant les nombres complexes que les droites (AA') et (B'C') sont perpendiculaires et que $B'C' = 2AA'$.

Solution

• Prenons A pour origine du repère orthonormé direct du plan complexe et supposons le triangle ABC de sens direct.

$$\text{On a : } z_{A'} = \frac{z_B + z_C}{2}, \quad \frac{z_{B'}}{z_B} = -i \text{ et } \frac{z_{C'}}{z_C} = i.$$

$$\text{Donc : } \frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_{A'}} = \frac{-iz_B - iz_C}{\frac{z_B + z_C}{2}} = -2i;$$

$$\text{c'est-à-dire : } B'C' = 2AA' \text{ et } \text{Mes}(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'B'}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi].$$

• Lorsque le triangle ABC est de sens indirect, un raisonnement analogue conduit à :

$$B'C' = 2AA' \text{ et } \text{Mes}(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'B'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Dans les deux cas, les droites (AA') et (B'C') sont perpendiculaires et $B'C' = 2AA'$.

