

2. Soit ABCD un quadrilatère convexe.

On construit, à l'extérieur de ce quadrilatère, les triangles rectangles isocèles AM_1B , BM_2C , CM_3D et DM_4A de sommets respectifs M_1 , M_2 , M_3 et M_4 .

Démontrer en utilisant les nombres complexes que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ sont orthogonaux et de même longueur.

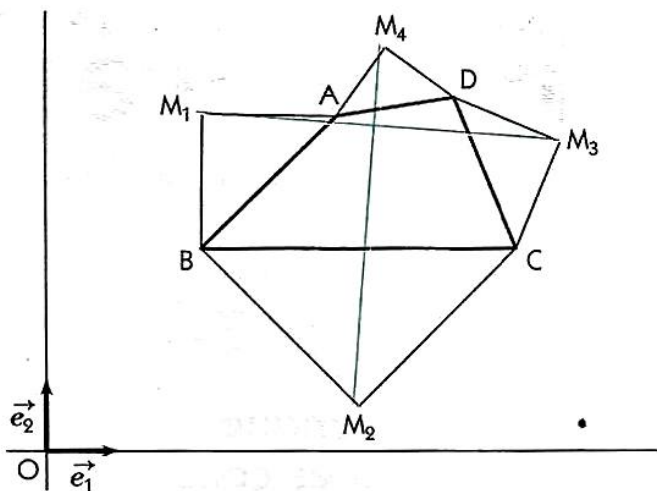
Solution guidée

Désignons par z_A , z_B , z_C et z_D les affixes respectives des points A, B, C et D, par z_1 , z_2 , z_3 et z_4 les affixes respectives des points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 .

Supposons le quadrilatère ABCD de sens direct.

- Démontrer que AM_1B est un triangle rectangle isocèle en M_1 si et seulement si $z_1 = \frac{z_A(1-i) + z_B(1+i)}{2}$.
- À quelles conditions les triangles BM_2C , CM_3D et DM_4A sont-ils rectangles isocèles respectivement en M_2 , M_3 et M_4 ?
- En déduire que : $\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1} = i$.
- Conclure.

Que se passe-t-il lorsque le quadrilatère ABCD est de sens indirect ?



Exercices

- 3.a Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants.
a) $15 - 8i$ b) $2i$ c) $11 + 4i\sqrt{3}$ d) $-i$.
- 3.b Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
a) $iz^2 + z - 3 + i = 0$
b) $(-2 + i)z^2 + (4 - 5i)z + 3 - i = 0$.
- 3.c Soit l'équation (E) :
 $z^3 + (1 - i)z^2 + (4 - i)z - 4i = 0$.
1. Vérifier que i est une solution de (E).
2. Trouver un polynôme P du second degré tel que : $z^3 + (1 - i)z^2 + (4 - i)z - 4i = (z - i)P(z)$.
3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
- 3.d 1. Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.
2. Exprimer $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$.
- 3.e Linéariser :
a) $\cos^4 x + \sin^4 x$ b) $\sin^4 x + \sin^2 x$
c) $\cos^3 x \sin^3 x$ d) $\cos^3 x \sin^2 x$.
- 3.f Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $\cos 5x + 2\cos 3x + \cos x = 0$
b) $\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x = 0$
c) $\cos 2x + \cos 6x = \sin 3x - \sin 5x$
d) $\sin 3x - \sin 2x = \sin x$.
- 3.g Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .
a) $z' = -z + 2 + i$ b) $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2 - 4i$
c) $z' = -\frac{1}{3}z + 2 - i$ d) $z' = -iz + 1 + i$.
- 3.h Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.
a) $|\bar{z} - 1 + 2i| = 3$ b) $|z - 3 + i| = 3$
c) $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2} [\pi]$ d) $\arg(iz + i) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- 3.i Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.
a) $|z - 2 + i| = |\bar{z} - i|$ b) $|z - 2 + i| = |z|$
c) $\left| \frac{z - 3i}{z - 2 + i} \right| = 1$ d) $|z - 3 + i| = |2z - 4i|$.
- 3.j À tout nombre complexe z , différent de $2 - i$, on associe le nombre complexe :
 $Z = \frac{z + 3 - 2i}{z - 2 + i}$.
Déterminer les ensembles de points M d'affixe z tels que :
a) Z soit un nombre réel ;
b) Z soit un nombre imaginaire pur.

Exercices

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

APPRENTISSAGE

Étude algébrique des nombres complexes

1 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$$a) \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right) \quad b) \frac{1}{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$$

$$c) \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i} \quad d) \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$$

$$e) \frac{(-1-2i)^3}{(1+i)^4} \quad f) \left(\frac{3-i}{1-2i} \right)^2$$

2 Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants.

$$a) (3+4i)^3 \quad b) (2-i)^3$$

$$c) \frac{2+i}{3+4i} - \frac{3-4i}{2-i} \quad d) (3+4i)^3 - (2-i)^3$$

3 Pour quelles valeurs du nombre réel x le nombre complexe $[10-x+i(2+x)](x-i)$ est-il un nombre réel ? un nombre imaginaire pur ?

4 Vérifier que : $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} - 1 = 0$.

- 5** 1. Calculer i^3 , i^4 et i^5 . En déduire i^{18} et i^{19} .
 2. Calculer $1+i+i^2+i^3$, puis $i^{199}+i^{200}+i^{201}+i^{202}$.
 3. Calculer $\sum_{k=0}^{2000} i^k$ et $\sum_{k=0}^{2002} (-i)^k$.

6 Écrire sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants.

$$a) (4-i\sqrt{3})(1+i) \quad b) \frac{2-i}{-3+i}$$

$$c) \frac{(1-i)(2+i)}{2i(-3+i)} \quad d) \frac{(2-3i)(1+i)}{(2-i)^2}$$

7 Soit $z_1 = \frac{3+2i}{-5+7i}$ et $z_2 = \frac{3-2i}{5+7i}$.

Démontrer, sans calcul, que $z_1 - z_2$ est un nombre réel et $z_1 + z_2$ un nombre imaginaire pur.

8 Calculer le module des nombres complexes suivants.

$$a) \frac{2}{1-i} \quad b) -\frac{1}{4i}$$

$$c) \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)} \quad d) \frac{(-5+7i)(4-2i)}{(3+4i)(7+5i)}$$

$$e) \frac{(1-i)^2}{(1+i)^3} \quad f) \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i} \right)^3$$

9 Déterminer les nombres complexes z tels que : $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z-1|$.

10 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants.

$$a) \begin{cases} (1+i)z - iz' = 2+i \\ (2+i)z + (2-i)z' = 7-4i \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (2+i)z + 7z' = 1+2i \\ (1-i)\bar{z} - i\bar{z}' = 4-i \end{cases}$$

Étude trigonométrique des nombres complexes

11 Dans chacun des cas suivants :

- déterminer le module et un argument de z ;
- en déduire la forme algébrique de z .

a) $z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3$

b) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

c) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

d) $z = (1+i)^2$

e) $z = (1-i)^4$

f) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

g) $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i} \right)^3$

12 Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1-i$.

- a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .
 b) Écrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{z_1}{z_2}$.
 c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

13 Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.

a) $(-1-i)i$ b) $(\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3})$

c) $\frac{i}{1-i}$

d) $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{4}}$

e) $\frac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

f) $\frac{5-5i}{10e^{i\frac{\pi}{4}}}$

g) $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i} \right)^{10}$

14 Soit z un nombre complexe tel que :

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta.$$

15 Soit $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$.

a) Écrire sous forme exponentielle z_1 et z_2 .

5) En déduire la forme algébrique des nombres complexes : $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^3$ et $\frac{z_2^6}{z_1^3}$.

16 Soit $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ et $u = 1 + j$.

1. Démontrer que : $1 + j + j^2 = 0$.
2. Calculer u^n ($n \in \mathbb{N}^*$) en fonction de n .

17 Soit $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

1. Écrire i en fonction de j puis démontrer que tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme :
 $z = \alpha + j\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$).
2. Déterminer une relation entre α et β pour que le nombre complexe $\alpha + j\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$) ait pour module 1.

- 18** 1. Déterminer le module, un argument, la partie réelle et la partie imaginaire des racines 4-ièmes de $-i$.
2. Placer dans le plan complexe les points images de ces racines.
3. Calculer la somme et le produit de ces racines.

- 19** 1. Calculer : $(2 + i)^3$.
2. En déduire les racines cubiques de $2 + 11i$.

20 Déterminer les nombres complexes vérifiant $2z^3 = 8i$, puis représenter leurs images dans le plan.

21 Soit (z_n) la suite définie dans $\mathbb{C}$ par :

$$z_0 = 1 + i \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = -\frac{1}{2} z_n.$$

1. Démontrer que $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer $\arg(z_n)$ en fonction de n , puis z_n en fonction de z_0 et n .

22 Soit n un entier naturel.

On pose : $A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos kx$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin kx$.

1. Calculer et écrire sous forme exponentielle $A + iB$.
2. En déduire des expressions plus simples de A et B .

Résolutions d'équations

23 Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants.

a) $z = 5 - 12i$ b) $z = -8i$ c) $z = 7 + 24i$.

24 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - 2 = 0$.
2. On désigne par z_1 et z_2 les solutions de cette équation, avec $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2)$.

Calculer : $2z_1 + 3z_2$; $(z_1 - z_2)^2$; $(z_1)^8$; $(z_2)^{10}$.

25 1. Calculer : $(1 + 8i)^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 $(2 + i)z^2 - (9 + 2i)z + 5(3 - i) = 0$.

26 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^2 - 4z + 5 + i(z + 1) = 0 \quad (1)$$

$$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0 \quad (2).$$

2. En déduire qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d que l'on précisera tels que pour tout nombre réel x , on a : $(x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$.

27 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et représenter graphiquement les images des solutions.

a) $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$ b) $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

28 Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (3 - i)z - 2(1 - i).$$

1. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

29 Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^4 + (5 - 2i)z^3 + (8 - 10i)z^2 + (6 - 16i)z - 12i.$$

1. Vérifier que : $P(2i) = P(-3) = 0$.
2. Déterminer un polynôme Q du second degré tel que pour tout nombre complexe z , on a :

$$P(z) = [z^2 + (3 - 2i)z - 6i]Q(z).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

30 Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42.$$

1. Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation : $P(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

31 Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i).$$

1. Démontrer qu'il existe un imaginaire pur $i\beta$ solution de l'équation : $P(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - i\beta)Q(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

Transformations et nombres complexes

32 Soit les points $\Omega \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dans chacun des cas suivants :

- donner l'écriture complexe de la transformation ;
- déterminer l'image de A par la transformation.

- a) Symétrie de centre Ω .
- b) Homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.
- c) Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

33 1. Donner l'écriture complexe des transformations suivantes :

- a) s : symétrie par rapport à la droite d'équation $x = -2$.
- b) s' : symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 1$.

2. Donner l'écriture complexe de $s \circ s'$ et $s' \circ s$.
En déduire que $s \circ s' = s' \circ s$ et préciser la nature de cette transformation.

34 Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation dont on donne l'écriture complexe.

- a) $z' = \bar{z} - 4i$ b) $z' = \pm \bar{z} + 2$
- c) $z' = -4z + 10 - 5i$ d) $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}} z + 1 + \sqrt{2} - i$.

35 Soit f la transformation du plan dont l'écriture complexe est : $z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}} z + 4\sqrt{3} - 2i$.

1. Déterminer le nombre complexe z_0 tel que :

$$z' - z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_0).$$

2. En déduire que f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre, que l'on précisera.

Configurations planes

36 Soit a un nombre complexe non nul et $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Démontrer que les points $A(a)$, $B(ja)$ et $C(j^2a)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral de sens direct.

37 Soit $A(3 + i)$, $B(2i)$, $C(2 - 2i)$.

1. Placer les points A , B et C et démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
2. Déterminer l'axe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer le point D .
3. Déterminer l'axe du point E , symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$.

38 Soit A , B et C les points d'axes respectives $-\frac{1}{3} - 2i$, $1 + 2i$ et $\frac{7}{3} + 6i$.

1. Démontrer que B est le milieu de $[AC]$.
2. Déterminer les axes des points D et E tels que $ADCE$ soit un carré de sens direct.

39 Soit A , B et C les points d'axes respectives $1 + 2i$, $2 + i$ et $2 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B et déterminer une mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.
2. Déterminer le point D , symétrique de A par rapport à B . Quelle est la nature du triangle ADC ?

40 Soit les points $A(-1 + i)$, $B(-1 - i)$, $C(2i)$ et $D(2 - 2i)$.

1. Étudier la nature des triangles ACD et BCD .
2. Démontrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Lieux géométriques

41 Déterminer et représenter les ensembles de points M du plan dont l'axe z vérifie la condition indiquée.

- a) $|z + \bar{z} - 1| = 4$ b) $|z - \bar{z} - 1 + i| = 2$
 c) $\arg(3i - z) \equiv 0 [2\pi]$ d) $\arg(\bar{z} - 3 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$
 e) $\arg\left(\frac{1}{z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ f) $\arg(z^2 - 4) \equiv \arg(z + 2) [2\pi]$.

42 Déterminer les ensembles de points M dont l'axe z vérifie la condition indiquée.

- a) $|z + 5 - 2i| = |\bar{z} - 2 + i|$
 b) $|z + 1 + i| = |3z - 9 - 3i|$.

43 À tout nombre complexe z distinct de i , on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z+i}{z-i}$.

Déterminer et représenter les ensembles de points M du plan dont l'axe z vérifie la condition indiquée.

- a) Z est un nombre réel strictement positif.
 b) Z est un nombre réel strictement négatif.
 c) Z est un nombre imaginaire pur.

- d) $|Z| = 1$.
 e) $|Z| = 3$.

44 À tout nombre complexe z distinct de $-1 + 2i$, on associe le nombre complexe Z tel que :

$$Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}.$$

Déterminer les ensembles de points M dont l'axe z vérifie la condition indiquée.

- a) $|Z| = 1$. c) Z est un nombre réel.
 b) $|Z| = 2$. d) Z est un nombre imaginaire pur.

45 Déterminer et contruire l'ensemble des points du plan dont l'axe z vérifie la condition indiquée.

- a) $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 3 = 0$ b) $(z\bar{z})^2 - z\bar{z} - 6 = 0$.

46 Déterminer l'ensemble des points M dont l'axe z vérifie la condition indiquée.

- a) $(z - 1 - i)(\bar{z} - 1 + i) = 5$
 b) $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$
 c) $z^2 - (1 - 2i)^2 = \bar{z}^2 - (1 + 2i)^2$.

47 Déterminer et contruire l'ensemble des points du plan dont l'axe z vérifie la condition indiquée.

- a) $\frac{2z-1}{z^2}$ est un nombre réel.
 b) $\frac{4 - (z + \bar{z})i}{1 - i + \frac{1}{2}(z - \bar{z})}$ est un nombre réel.

APPROFONDISSEMENT

48 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

- a) $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}$ b) $\frac{1 - \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\alpha - i\sin\alpha}$, $\alpha \in [0; \pi[$.

49 Soit α un nombre réel tel que $-\pi < \alpha < \pi$ et z le nombre complexe défini par : $z = 1 + \cos\alpha - i\sin\alpha$.

1. Calculer $|z|$, $\arg(z)$ et $\arg(\frac{1}{z})$ en fonction de α .
2. Préciser les ensembles des images de z et de $\frac{1}{z}$.

50 Démontrer que si A , B et C désignent les mesures des angles d'un triangle, on a :

- a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
 b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

51 1. Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument α ($0 \leq \alpha < 2\pi$).

Préciser, selon les valeurs de α , le module et un argument de $z + 1$.

Conjecturer et vérifier ces résultats par des considérations géométriques, illustrées par des figures.

2. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1, d'arguments respectifs α_1 et α_2 tels que :

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < 2\pi.$$

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_2}{z_1}$ et de $z_1 + z_2$.

(On pourra utiliser la question 1 en posant : $z = \frac{z_2}{z_1}$.)

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1 + z_2| = 1$; illustrer par une figure.

c) Déterminer l'ensemble des triplets $(z_1; z_2; z_3)$ de nombres complexes de module 1 tels que :

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ et } 0 \leq \arg(z_1) \leq \arg(z_2) \leq \arg(z_3) < 2\pi.$$

52 Construction d'un pentagone régulier

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. On pose : $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

a) Démontrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation (E) :

$$Z^2 + Z - 1 = 0.$$

b) Exprimer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

c) Résoudre (E) et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

2. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives 1, z_0, z_0^2, z_0^3 et z_0^4 .

a) Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec la droite de repère $(O, \vec{e}_1)$.

Démontrer que l'abscisse du point H est $\cos\frac{2\pi}{5}$.

b) Soit (Γ) le cercle de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i .

(Γ) coupe la droite de repère $(O, \vec{e}_1)$ en M et N, M étant le point d'abscisse positive.

Démontrer que M et N ont pour abscisses respectives α et β et que H est le milieu de $[OM]$.

c) En déduire une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0 .

53 1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$. Écrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b) Placer les images A et B des solutions, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative. Quelle est la nature du triangle OAB ?

2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

b) Déterminer sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique l'affixe du point A', image de A par f. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

54 On considère les nombres complexes :

$$a = -\sqrt{3} + i, b = 3 + 2i \text{ et } c = 7 - 2i.$$

1. a) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a.

En déduire les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

b) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre réel.

c) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pur.

2. Déterminer et construire les ensembles de points M d'affixe z tels que :

$$a) |z - b| = |z - c| \quad b) 2|z - b| = |a|.$$

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

a) Démontrer que f admet un seul point invariant Ω .

b) Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω .

Préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.

c) Déterminer et construire les images par f des ensembles déterminés à la question 2.

55 Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

On pose : $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive.

2. Calculer a + b et ab. En déduire a et b.

56 Soit a et b deux nombres complexes non nuls, A et B leurs images respectives.

1. a) Démontrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $\overline{ab}$ est un nombre réel.

b) Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel si et seulement si les points O, A et B sont alignés ou si OA = OB.

2. On suppose dans cette question que les points O, A et B ne sont pas alignés et que les nombres complexes a et b ont pour module 1.

Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel strictement positif.

3. Application

Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 , tels que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

a) Calculer, en fonction de z_1 et z_2 , l'affixe Z du barycentre I du système $\{(M_1, |z_2|); (M_2, |z_1|)\}$.

b) Démontrer que $\frac{Z^2}{z_1 z_2}$ est un nombre réel.

c) En déduire que $\vec{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$.

57 Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et 2i.

À tout nombre complexe z distinct de 2i, on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z-1}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C}_1)$ des points M d'affixe z tels que : $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

2. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C}_2)$ des points M d'affixe z tels que : $|Z| = 2$.

3. Démontrer que $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ ont un unique point commun dont on précisera l'affixe.

58 Soit A le point d'affixe 2i et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}.$$

1. Démontrer que f admet deux points invariants.

2. Démontrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

3. Démontrer que la droite de repère $(O, \vec{e}_2)$, privée de A, est globalement invariante par f.

4. a) Démontrer que : $|z' - 2i| |z - 2i| = 9$.

b) En déduire l'image par f du cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon R.

Déterminer R pour que $(\mathcal{C})$ soit globalement invariant par f.

59 Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et

-1 et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que : $zz' = 1$.

1. a) Déterminer et construire l'image par f du point C d'affixe 1 + i.

b) Démontrer que pour tout point M et son image M', la droite (AB) est bissectrice de l'angle MOM' et que $OM \times OM' = OA^2$.

2. a) Vérifier que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \left(\frac{z+z'}{2} - 1 \right) \left(\frac{z+z'}{2} + 1 \right) = \left(\frac{z-z'}{2} \right)^2.$$

b) Soit I le milieu de [MM'].

Démontrer que $IA \times IB = IM^2$ et que pour tout point M distinct de A et B, la droite (MM') est bissectrice de l'angle AIB.

60 Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et -3 . À tout point M d'affixe z , distinct de A et B, on associe, s'ils existent, le(s) point(s) M' d'affixe z' tel(s) que : $\frac{z'+3}{z+3}$ est imaginaire pur et $\frac{z'-1-i}{z-1-i}$ est réel.

1. Donner une interprétation géométrique de

$$\arg\left(\frac{z'+3}{z+3}\right) \text{ et } \arg\left(\frac{z'-1-i}{z-1-i}\right).$$

2. Démontrer géométriquement qu'il existe un cercle ($\mathcal{C}$) tel que si $M \notin (\mathcal{C})$, alors M' existe et est unique. Construire alors l'image M' d'un point M donné.

61 Soit A et B deux points d'affixes respectives a et b .

1. Démontrer qu'il existe un unique point M dont l'affixe z vérifie : $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = 2$ et $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

2. Construire ce point et calculer son affixe lorsque : $a = -4 + 2i$ et $b = 2 - i$.

62 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^4 = 1 \quad (1)$$

$$\left(\frac{z-i}{z+i} \right)^4 = 1 \quad (2).$$

2. Soit n un entier naturel non nul, a un nombre complexe et l'équation (E) : $\left(\frac{z-i}{z+i} \right)^n = a$.

On désigne par P, Q et M les points d'affixes respectives i , $-i$ et z .

a) Démontrer que si z est solution de (E), alors :

$$\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|a|}.$$

b) Démontrer que si (E) admet au moins une solution réelle, alors : $|a| = 1$.

c) En déduire que si (E) admet au moins une solution réelle, alors toutes ses solutions sont réelles.

63 Soit l'équation (E) :

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

1. Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est solution de (E).

2. a) Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$(E) \Leftrightarrow z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right] = 0.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$, puis l'équation (E).

3. Démontrer que les images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle ($\mathcal{C}$) dont on précisera le centre et le rayon.

64 Soit l'équation (E) : $z^5 = 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et représenter les images des solutions.

2. Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle et en déduire que : $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

3. Démontrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation :

$$4X^2 + 2X - 1 = 0.$$

En déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

4. Soit l'équation (E') : $(z-1)^5 = (z+1)^5$ ($z \in \mathbb{C}$).

a) Démontrer que si z_0 est solution de (E'), alors :

$$\left| \frac{z_0-1}{z_0+1} \right| = 1.$$

En déduire que les solutions de (E') sont imaginaires pures.

b) Résoudre (E').

4

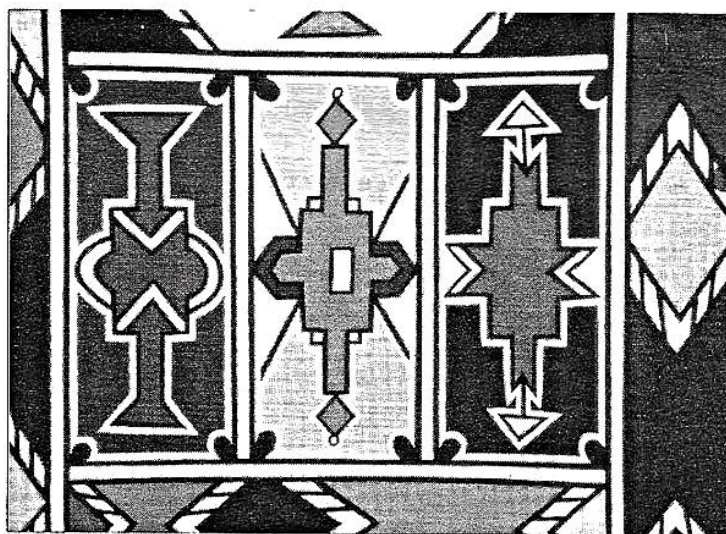
Isométries du plan – Applications affines

Introduction

Dans les classes précédentes, nous avons étudié certaines isométries du plan (translations, symétries, rotations) et utilisé ces transformations pour rechercher des lieux géométriques, résoudre des problèmes de construction et démontrer des propriétés.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de compléter cette étude en déterminant les autres isométries du plan et en classant l'ensemble de ces isométries à partir de deux critères : les points invariants et l'effet sur les angles orientés.

La dernière partie du chapitre est consacrée à l'étude générale des applications affines du plan.



© Courtney Clark / Hooqui.

Décoration de maison en Afrique du Sud.

SOMMAIRE

1.	Composition d'isométries	82
2.	Classification des isométries du plan	86
3.	Applications affines	92

1

Composition d'isométries

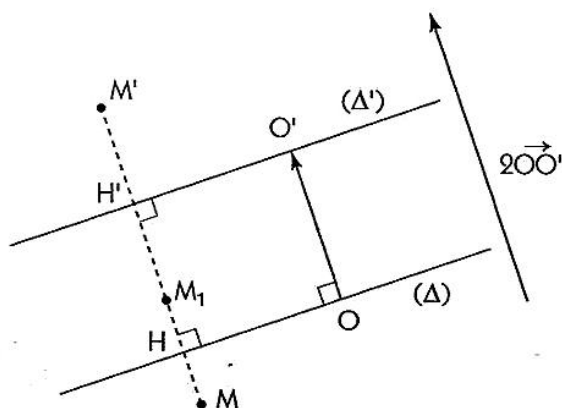
1.1. Composition de symétries et translations

Composée de symétries orthogonales

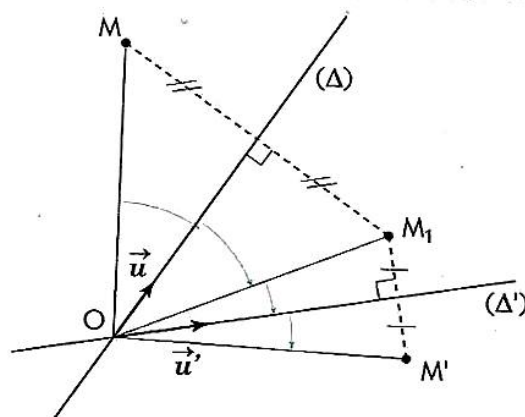
Les propriétés suivantes ont été établies en classe de première.

Propriétés

• Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, O un point de (Δ) et O' son projeté orthogonal sur (Δ') . La composée $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la translation de vecteur $2\vec{OO'}$.



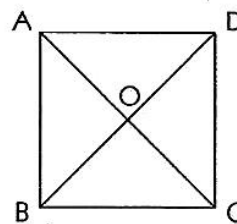
• Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O , de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$. La composée $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{u}, \vec{u'})$.



Exemples

ABCD est un carré de sens direct et de centre O .

- $s_{(DC)} \circ s_{(AB)} = t_{2\vec{BC}}$;
- $s_{(AC)} \circ s_{(AB)} = r_{(A, \frac{\pi}{2})}$ (quart de tour direct de centre A) ;
- $s_{(DC)} \circ s_{(AC)} = r_{(C, -\frac{\pi}{2})}$ (quart de tour indirect de centre C) ;
- $s_{(BD)} \circ s_{(AC)} = r_{(O, \pi)}$ (symétrie de centre O).



Décomposition de translations, de rotations

Les propriétés suivantes ont également été établies en classe de première.

Propriétés

• Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul. Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite (Δ') et une seule telle que :

$$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{u}}.$$

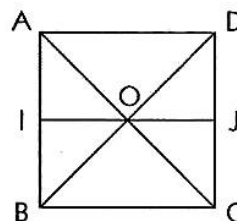
• Soit $r_{(O, \alpha)}$ une rotation de centre O et d'angle α . Pour toute droite (Δ) passant par O , il existe une droite (Δ') et une seule telle que :

$$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = r_{(O, \alpha)}.$$

Exemples

ABCD est un carré de sens direct et de centre O , I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

- $t_{\vec{AB}} = s_{(BC)} \circ s_{(IJ)} = s_{(IJ)} \circ s_{(AD)}$;
- $r_{(B, \frac{\pi}{2})} = s_{(BD)} \circ s_{(BC)} = s_{(AB)} \circ s_{(BD)}$;
- $r_{(O, -\frac{\pi}{2})} = s_{(IJ)} \circ s_{(BD)} = s_{(AC)} \circ s_{(IJ)}$.

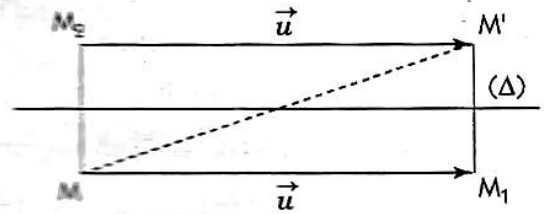


Composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation

(Δ) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Soit M un point, M_1 son image par $t_{\vec{u}}$, M' l'image de M_1 par s_{Δ} et M_2 l'image de M par s_{Δ} .

- Démontrer que : $t_{\vec{u}}(M_2) = M'$.
- En déduire que : $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.
- Démontrer que la transformation $s_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ n'admet pas de point invariant.



Cette étude justifie la définition et la propriété suivante.

Définition

Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

On appelle **symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$** la composée de la **symétrie orthogonale d'axe (Δ)** et de la **translation de vecteur $\vec{u}$** .

On a : $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.

Propriété 1

Une symétrie glissée n'admet pas de point invariant.

Les propriétés suivantes précisent la nature de la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.

Propriétés 2

Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

- Si $\vec{u}$ est normal à (Δ) , alors $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$ est une symétrie orthogonale.
- Si $\vec{u}$ n'est pas normal à (Δ) , alors $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$ est une symétrie glissée.

Démonstration guidée

Soit O un point de (Δ) et A le point tel que : $\vec{OA} = \vec{u}$.

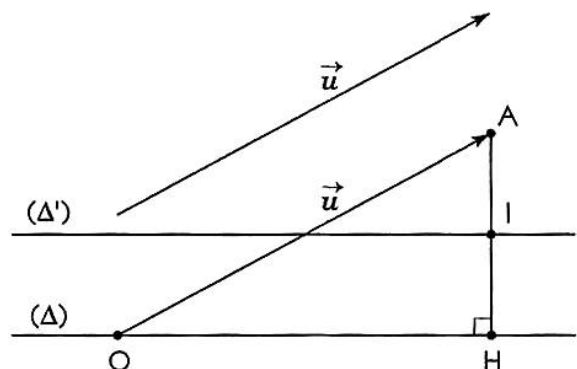
Désignons par :

H le projeté orthogonal de A sur (Δ) ,

I le milieu de $[AH]$,

(Δ') la parallèle à (Δ) passant par I .

- Démontrer que : $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{HA}}$.
- Démontrer que : $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta} = t_{\vec{OH}} \circ s_{\Delta'}$.
- Conclure.



1.2. Composition de rotations et translations

Composée de rotations

La propriété suivante a été établie en classe de première.

Propriété

Soit r et r' deux rotations d'angles respectifs α et α' .

- Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} \neq \widehat{0}$, alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.
- Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \widehat{0}$, alors $r' \circ r$ est une translation.

Exemples

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et B' est le milieu de [AC].

• $r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{3})}$ est une translation.

De plus : $r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{3})}(A) = B$.

Donc : $r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{3})} = t_{\vec{AB}}$.

• $r_{(B, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(C, \frac{2\pi}{3})}$ est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

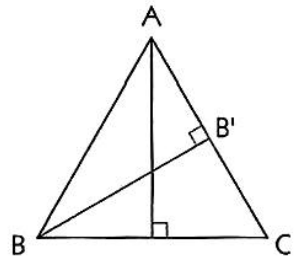
De plus : $r_{(B, \frac{2\pi}{3})} = s_{(AB)} \circ s_{(BC)}$ et $r_{(C, \frac{2\pi}{3})} = s_{(BC)} \circ s_{(AC)}$.

Donc : $r_{(B, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(C, \frac{2\pi}{3})} = s_{(AB)} \circ s_{(AC)} = r_{(A, -\frac{2\pi}{3})} = r_{(A, \frac{4\pi}{3})}$.

• $r_{(A, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{3})}$ est une rotation d'angle π , c'est-à-dire une symétrie centrale.

De plus : $r_{(A, \frac{2\pi}{3})} = s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$ et $r_{(B, \frac{\pi}{3})} = s_{(AB)} \circ s_{(BB')}$.

Donc : $r_{(A, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{3})} = s_{(AC)} \circ s_{(BB')} = s_{B'}$.



M

Pour déterminer la composée $r_{(B, \beta)} \circ r_{(A, \alpha)}$ de deux rotations de centres distincts A et B, on peut utiliser les droites (Δ) et (Δ') telles que : $r_{(A, \alpha)} = s_{(AB)} \circ s_{\Delta}$ et $r_{(B, \beta)} = s_{\Delta'} \circ s_{(AB)}$.

On a : $r_{(B, \beta)} \circ r_{(A, \alpha)} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$.

Composée d'une rotation et d'une translation

Propriété

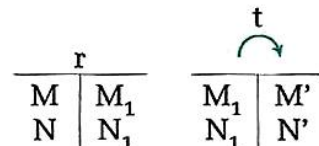
Soit r une rotation d'angle α non nul et t une translation.

$t \circ r$ est une rotation d'angle α .

Démonstration

Soit M et N deux points distincts.

Posons : $r(M) = M_1$, $r(N) = N_1$, $t(M_1) = M'$ et $t(N_1) = N'$.



D'après les propriétés caractéristiques des rotations et des translations, on a :

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}) = \widehat{\alpha}$ et $(\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \widehat{0}$; donc : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}) + (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \widehat{\alpha}$.

De plus : $M'N' = M_1N_1 = MN$.

Donc, $t \circ r$ est une rotation d'angle α .

Cette démonstration ne donne aucune indication sur le centre de la rotation.

Construction du centre de la rotation $t \circ r$

Soit O le centre de la rotation r et $\vec{u}$ le vecteur de la translation t .

• Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors : $t \circ r = r$.

• Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, construisons les droites $(\mathcal{D})$, (Δ) et (Δ') telles que :

– $(\mathcal{D})$ est la droite passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$;

– $r = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\Delta}$ et $t = s_{\Delta'} \circ s_{\mathcal{D}}$.

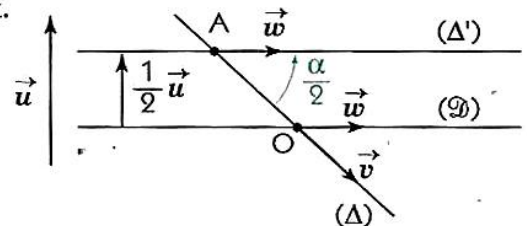
On a : $t \circ r = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$.

$(\mathcal{D})$ et (Δ) sont sécantes en O, $(\mathcal{D})$ et (Δ') sont parallèles ; donc (Δ) et (Δ') sont sécantes en un point A.

Désignons par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs directeurs respectifs de (Δ) et (Δ') .

$\vec{w}$ est aussi un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$; donc : $2(\vec{v}, \vec{w}) = \widehat{\alpha}$.

On en déduit que $t \circ r$ est la rotation de centre A et d'angle α .



Remarques

- On démontre de manière analogue que $r \circ t$ est une **rotation d'angle α** .
- On a en général : $t \circ r \neq r \circ t$.

Exemples

ABCD est un carré de sens direct et de centre O, C' est le **symétrique de C par rapport à B**.

- $r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ t_{\vec{CB}}$ est un quart de tour direct.

Soit (Δ) la médiatrice du segment [BC].

On a : $t_{\vec{CB}} = s_{(AB)} \circ s_{(\Delta)}$ et $r_{(A, \frac{\pi}{2})} = s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$.

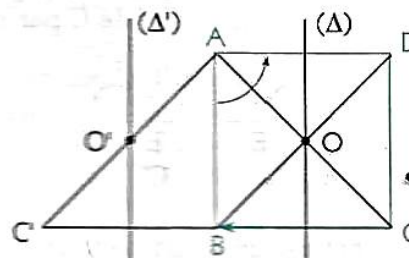
Donc : $r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ t_{\vec{CB}} = s_{(AC)} \circ s_{(\Delta)} = r_{(O, \frac{\pi}{2})}$.

- $t_{\vec{CB}} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$ est un quart de tour direct.

Soit (Δ') la médiatrice du segment [BC'].

On a : $t_{\vec{CB}} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})} = (s_{(\Delta')} \circ s_{(AB)}) \circ (s_{(AB)} \circ s_{(AC)}) = s_{(\Delta')} \circ s_{(AC')}$.

Donc, $t_{\vec{CB}} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$ est le quart de tour direct dont le centre est le point O', symétrique de O par rapport à (AB).



M

Pour déterminer la composée $t_{\vec{u}} \circ r_{(O, \alpha)}$ d'une rotation et d'une translation de vecteur non nul, on peut utiliser les droites $(\mathcal{D})$, (Δ) et (Δ') telles que :

– $(\mathcal{D})$ est la droite passant par O et de vecteur normal $\vec{u}$;

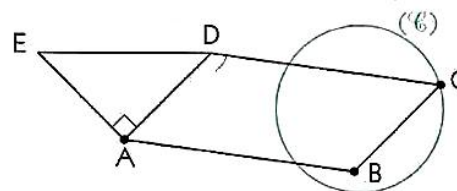
– $r = s_{(\mathcal{D})} \circ s_{(\Delta)}$ et $t = s_{(\Delta')} \circ s_{(\mathcal{D})}$.

On a : $t \circ r = s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$.

1.3. Travaux dirigés

Isométries et recherche de lieux

ABCD est un parallélogramme dont les points A et B sont fixes. C décrit un cercle $(\mathcal{C})$. On construit le triangle rectangle isocèle direct ADE de sommet A. Déterminer le lieu des points E.



Solution guidée

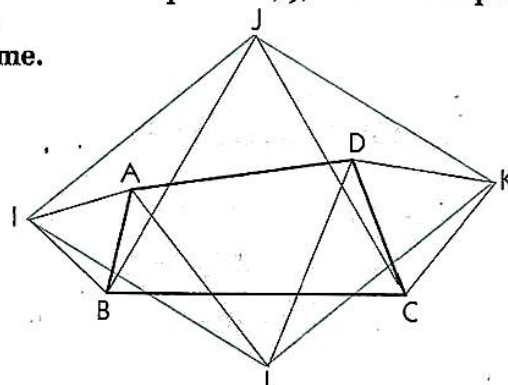
Soit t la translation de vecteur $\vec{BA}$ et r le quart de tour direct de centre A.

- Déterminer l'image du point C, puis du cercle $(\mathcal{C})$ par la transformation $r \circ t$.
- Conclure.

Isométries et démonstration de propriétés

1. ABCD est un quadrilatère convexe de sens direct. On construit les points I, J, K et L tels que les triangles AIB, BCJ, CKD et DAL soient équilatéraux directs.

Démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.



Solution guidée

Désignons par :

r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$;

r_2 la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

- Déterminer la nature de $r_2 \circ r_1$.
- Déterminer les images de I et L par $r_2 \circ r_1$.
- Conclure.

2. ABCD et AEFG sont des carrés de sens direct et H est le point tel que ADHE soit un parallélogramme. Démontrer que les droites (BH) et (CG) sont perpendiculaires et que $BH = CG$.

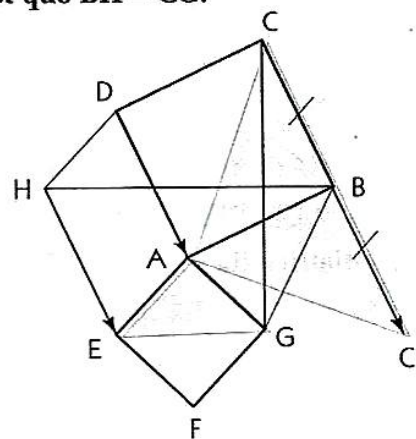
Solution

Désignons par :

t la translation de vecteur $\vec{DA}$;
 r le quart de tour direct de centre A ;
 C' le symétrique de C par rapport à B.

On a : $\begin{array}{c|c} H & E \\ \hline B & C' \end{array} \xrightarrow{t} \begin{array}{c|c} E & G \\ \hline C' & C \end{array} \xrightarrow{r} \begin{array}{c|c} H & G \\ \hline B & C \end{array}$ donc :

Or : $r \circ t$ est un quart de tour direct ;
 donc : $(BH) \perp (CG)$ et $BH = CG$.



Exercices

1.a ABCD est un rectangle. Déterminer la transformation f telle que : $f = s_{(AD)} \circ s_{(CD)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(AB)}$.

1.b ABCD est un carré de sens direct et de centre O. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes.

a) $s_{(AC)} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$

b) $r_{(D, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$

c) $r_{(C, -\frac{\pi}{2})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$

d) $r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ t_{\vec{CB}}$

1.c Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par s et s' les symétries orthogonales d'axes respectifs $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $s \circ s'$.

a) $(\mathcal{D}) : x = 4$ et $(\mathcal{D}') : x = y$

b) $(\mathcal{D}) : x - y = 1$ et $(\mathcal{D}') : x + y = 1$

c) $(\mathcal{D}) : y = -1$ et $(\mathcal{D}') : y = 2$

d) $(\mathcal{D}) : x + 2y = 0$ et $(\mathcal{D}') : 2x - y + 1 = 0$.

1.d Soit ABC un triangle isocèle en A et r la rotation de centre A et d'angle $\widehat{\alpha} = (\vec{AB}, \vec{AC})$.

À tout point M, distinct de B et C, on associe le point M' tel que : $M' = r(M)$.

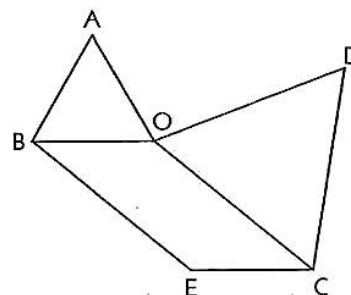
1. Démontrer que :

$$\text{Mes}(\vec{MC}, \vec{M'C}) = \text{Mes}(\vec{MC}, \vec{MB}) + \alpha [\pi].$$

2. En déduire le lieu des points M tels que les points C, M et M' sont alignés.

1.e OAB et OCD sont des triangles équilatéraux de sens direct. E est le point tel que BOCE soit un parallélogramme.

Démontrer que AED est un triangle équilatéral. (On pourra utiliser la transformation $r_{(O, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{BO}}$.)



2 Classification des isométries du plan

2.1. Classification à l'aide des points invariants

Décomposition d'une isométrie

Théorème

Soit f une isométrie du plan et A un point.

Il existe une unique isométrie g et une unique translation t telles que : $g(A) = A$ et $f = t \circ g$.

Démonstration

Existence

Désignons par A' l'image de A par f et par t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Posons : $g = t^{-1} \circ f$.

g , composée de deux isométries, est une isométrie.

De plus : $g(A) = t^{-1} \circ f(A) = t^{-1}(A') = A$.

Donc, f est la composée d'une isométrie laissant A invariant et d'une translation.

Unicité

Supposons qu'il existe une isométrie g' laissant A invariant et une translation t' telles que : $f = t' \circ g'$.

On a : $f(A) = t'(A) = t(A)$; donc : $t' = t$.

On en déduit que : $t \circ g = t \circ g'$; donc : $g = g'$.

Isométries laissant invariants trois points non alignés

Soit f une isométrie laissant invariants trois points A , B et C non alignés.

Pour tout point M d'image M' par f , on a : $M'A = MA$, $M'B = MB$ et $M'C = MC$.

Les points M et M' sont confondus, sinon A , B et C appartiendraient à la médiatrice de $[MM']$ et seraient alignés.

On en déduit que tout point du plan est invariant par f .

Propriété

Une isométrie du plan qui laisse invariants trois points non alignés est l'application identique.

Isométries laissant invariants deux points distincts

Soit f une isométrie, distincte de l'application identique, laissant invariants deux points A et B distincts.

• Désignons par C un point extérieur à la droite (AB) et par C' son image par f .

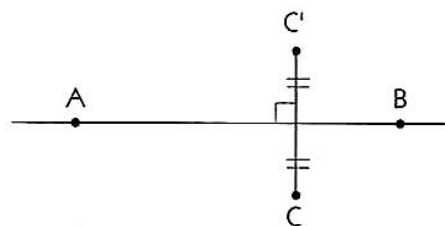
Les points C et C' sont distincts, sinon f laisserait invariants trois points non alignés et serait l'application identique.

De plus : $AC' = AC$ et $BC' = BC$; donc (AB) est la médiatrice du segment $[CC']$.

• Désignons par s la symétrie orthogonale d'axe (AB) .

$s \circ f$, isométrie laissant invariants les trois points non alignés A , B et C , est l'application identique.

On en déduit que : $f = s$.



Propriété

Une isométrie du plan qui laisse invariants deux points A et B distincts et qui n'est pas l'application identique, est la symétrie orthogonale d'axe (AB) .

Isométries laissant invariant un point

Soit f une isométrie laissant invariant un seul point A .

Désignons par B un point distinct de A et par B' son image par f .

On a : $B' \neq B$ et $AB' = AB$; donc A appartient à la médiatrice (Δ) de $[BB']$.

Désignons par s la symétrie orthogonale d'axe (Δ) .

On a : $s \circ f(A) = s(A) = A$;

$s \circ f(B) = s(B') = B$.

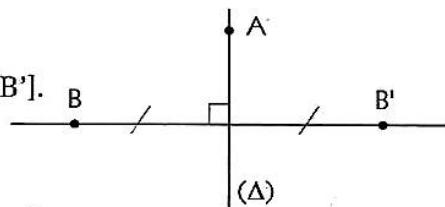
$s \circ f$ est une isométrie qui laisse invariants les deux points distincts A et B .

$s \circ f$ n'est pas l'application identique, sinon f serait une symétrie orthogonale et n'aurait pas un seul point invariant.

D'après la propriété précédente, $s \circ f$ est la symétrie orthogonale d'axe (AB) .

On a : $s_{\Delta} \circ f = s_{(AB)}$; donc : $f = s_{\Delta} \circ s_{(AB)}$.

On en déduit que f est une rotation de centre A .



Propriété

Une isométrie du plan qui laisse invariant un seul point A est une rotation de centre A .

Conséquence

D'après les propriétés précédentes, toute isométrie du plan qui laisse invariant au moins un point A est :

- soit l'application identique ;
- soit une symétrie orthogonale dont l'axe passe par A ;
- soit une rotation de centre A.

Donc, d'après le théorème précédent, toute isométrie du plan est :

- soit une translation ;
- soit la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation ;
- soit la composée d'une rotation et d'une translation.

On en déduit le théorème suivant.

Théorème

Toute isométrie du plan est une translation, une rotation, une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.

2.2. Déplacements et antidéplacements

Définitions et propriétés

Définitions

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés.
- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Nous savons que toute symétrie orthogonale est un antidéplacement.

Les résultats établis dans le paragraphe précédent permettent de classer les isométries suivant deux critères :

- l'effet sur les angles orientés ;
- l'existence ou non de points invariants.

	avec point invariant	sans point invariant
Déplacement	rotation	translation
Antidéplacement	symétrie orthogonale	symétrie glissée

On en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés

- Toute isométrie est un déplacement ou un antidéplacement.
- Tout déplacement est une translation ou une rotation.
- Tout antidéplacement est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.

Composition de déplacements et antidéplacements

Propriétés 1

- La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

On retrouve que la composée de deux isométries est une isométrie.

Propriétés 2

- La transformation réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La transformation réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Remarques

- L'ensemble des isométries du plan, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
- L'ensemble des déplacements du plan, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
- L'ensemble des antidéplacements du plan, muni de la loi $\circ$, n'est pas un groupe.

Déterminations d'une isométrie

Propriété 1

Soit A, B, A' et B' quatre points tels que : $AB = A'B'$ et $A \neq B$.
Il existe un déplacement et un seul transformant A en A' et B en B' .

Démonstration guidée

Existence

Désignons par :

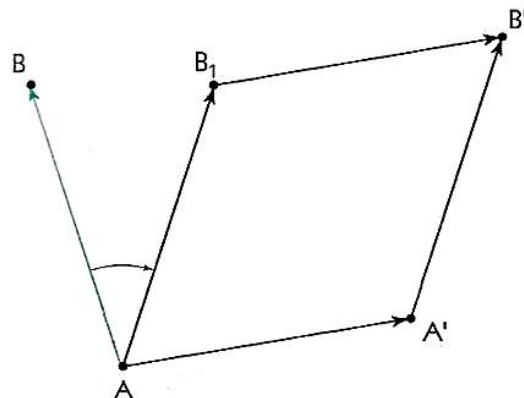
- r la rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$;
- t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Démontrer que la transformation f , telle que $f = t \circ r$, est un déplacement qui convient.

Unicité

Soit g un déplacement transformant A en A' et B en B' .

- Démontrer que : $f^{-1} \circ g(A) = A$ et $f^{-1} \circ g(B) = B$.
- En déduire que $f^{-1} \circ g$ est l'application identique.
- Conclure.



Remarques

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
- Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, alors f est une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

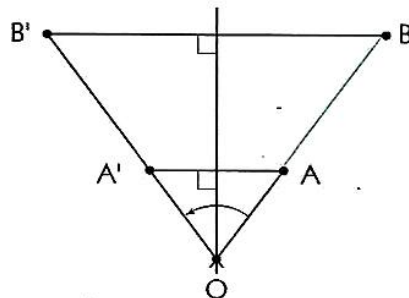
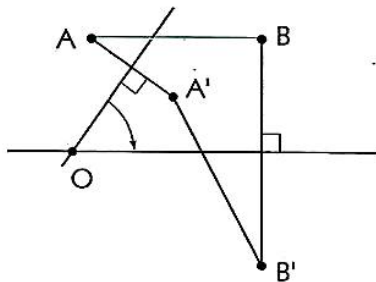
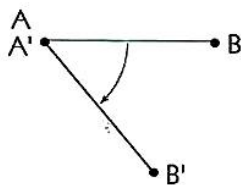
Pour construire son centre, trois cas sont à envisager.

1^{er} cas : $A = A'$ ou $B = B'$

- Si $A = A'$, alors A est le centre de la rotation.
- Si $B = B'$, alors B est le centre de la rotation.

2^e cas : (AA') et (BB') sont sécantes
Le centre de la rotation est O , point d'intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$.

3^e cas : $(AA') \parallel (BB')$
Le centre de la rotation est O , point d'intersection de la droite (AB) et de la médiatrice commune à $[AA']$ et $[BB']$.



Propriété 2

Soit A, B, A' et B' quatre points tels que : $AB = A'B'$ et $A \neq B$.
Il existe un antidéplacement et un seul transformant A en A' et B en B' .

Démonstration guidée

Désignons par s la symétrie orthogonale d'axe $(A'B')$.

Soit g un antidéplacement transformant A en A' et B en B' .

- Démontrer que $s \circ g$ est un déplacement transformant A en A' et B en B' .
- Utiliser la propriété précédente pour conclure.

Remarques

- Étant donnés quatre points A, B, A' et B' tels que $AB = A'B'$ et $A \neq B$, il existe donc exactement deux isométries qui transforment A en A' et B en B' ; l'une est un déplacement et l'autre un antidéplacement.
- Si l'on note f l'une de ces isométries, alors l'autre est $s_{(A'B')} \circ f$.

2.3. Travaux dirigés

Isométries et problème de construction

1°) Soit s_1, s_2 et s_3 les symétries orthogonales d'axes respectifs $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) .

Démontrer que $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ est une symétrie orthogonale si et seulement si les droites $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) sont parallèles ou concourantes.

2°) Soit $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) trois droites concourantes en un point O .

Construire un triangle ABC tel que $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) soient les médiatrices respectives des côtés $[AC], [BC]$ et $[AB]$.

Solution

1°) *Étude directe*

Supposons que $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ soit une symétrie orthogonale ; notons s cette symétrie.

On a : $s_1 \circ s_2 \circ s_3 = s$; donc : $s_1 \circ s_2 = s \circ s_3$.

• Si (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles, alors $s_1 \circ s_2$ est une translation de vecteur orthogonal à (Δ_1) et (Δ_2) .

De même $s \circ s_3$ est une translation de vecteur orthogonal à (Δ_3) et à l'axe de s .

Donc, les droites $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) sont parallèles.

• Si (Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes en un point O , alors $s_1 \circ s_2$ est une rotation de centre O .

De même $s \circ s_3$ est une rotation de centre O .

Donc (Δ_3) passe par O et les droites $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) sont concourantes en O .

Étude réciproque

• 1^{er} cas : $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) sont parallèles.

On a : $s_1 \circ s_2 \circ s_3 = t_{\vec{u}} \circ s_3$, où $\vec{u}$ est un vecteur normal à (Δ_1) et (Δ_2) , donc normal à (Δ_3) .

On en déduit que $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ est une symétrie orthogonale.

• 2^e cas : $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) sont concourantes en O .

$s_1 \circ s_2 \circ s_3$, antidéplacement qui admet au moins un point invariant, est une symétrie orthogonale.

2°) *Analyse d'une figure répondant à la question*

Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Donc, $s_1 \circ s_2 \circ s_3$ est une symétrie orthogonale ; on désigne par $(\mathcal{D})$ son axe.

On a : $s_1 \circ s_2 \circ s_3 = s_{(\mathcal{D})}$.

De plus : $s_1 \circ s_2 \circ s_3(A) = s_1 \circ s_2(B) = s_1(C) = A$.

Donc : $A \in (\mathcal{D})$.

On en déduit que : $(\mathcal{D}) = (OA)$.

Construction de $(\mathcal{D})$

Soit M un point distinct de O et M' son image par $s_1 \circ s_2 \circ s_3$.

• Si $M' = M$, alors $(\mathcal{D}) = (OM)$.

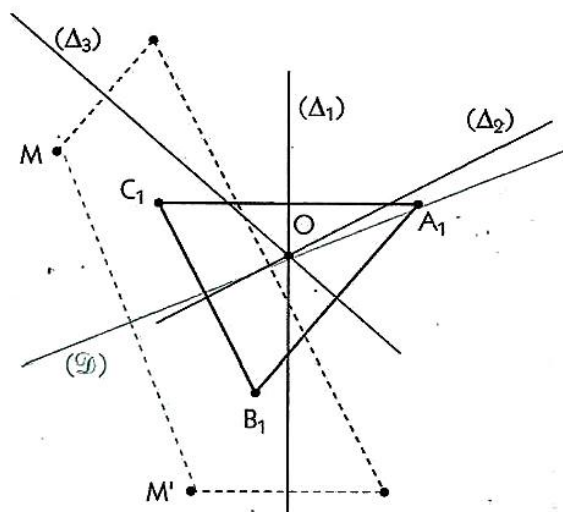
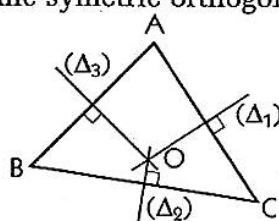
• Si $M' \neq M$, alors $(\mathcal{D})$ est la médiatrice de $[MM']$.

Discussion

Tout point A_1 de $(\mathcal{D})$ privée de O peut être considéré comme sommet d'un triangle cherché ;

les deux autres sommets de ce triangle sont :

$$B_1 = s_3(A_1) \text{ et } C_1 = s_1(A_1).$$



Groupe de transformations du triangle équilatéral

Déterminer toutes les isométries laissant invariant un triangle équilatéral ABC.

Établir le tableau de composition de ces isométries.

Solution

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, O son centre de gravité et f une isométrie laissant ABC invariant.

Toute isométrie conserve le barycentre ; donc : $f(O) = O$.

f est une isométrie laissant invariant au moins un point ; donc f est une rotation (éventuellement l'application identique) ou une symétrie orthogonale.

Supposons que f est distincte de l'application identique.

• Si f laisse invariants deux des points A, B ou C, alors f est une isométrie laissant invariants trois points non alignés ; donc f est égale à Id, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On en déduit que f laisse invariant au plus l'un des trois points A, B et C.

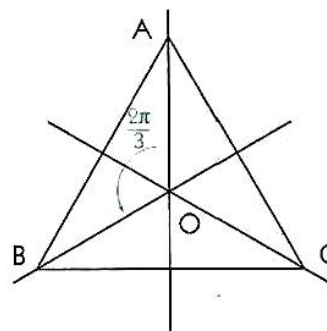
• Si f laisse invariant un seul des points A, B ou C, alors f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par O et ce point.

• Si f ne laisse invariant aucun des trois points A, B ou C, deux cas sont possibles :

- soit $f(A) = B, f(B) = C$ et $f(C) = A$; f est alors la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$;
- soit $f(A) = C, f(B) = A$ et $f(C) = B$; f est alors la rotation r^{-1} de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

On obtient le tableau de composition suivant.

$g \rightarrow$	Id	r	r^{-1}	$S_{(OA)}$	$S_{(OB)}$	$S_{(OC)}$
Id	Id	r	r^{-1}	$S_{(OA)}$	$S_{(OB)}$	$S_{(OC)}$
r	r	r^{-1}	Id	$S_{(OB)}$	$S_{(OC)}$	$S_{(OA)}$
r^{-1}	r^{-1}	Id	r	$S_{(OC)}$	$S_{(OA)}$	$S_{(OB)}$
$S_{(OA)}$	$S_{(OA)}$	$S_{(OC)}$	$S_{(OB)}$	Id	r	r^{-1}
$S_{(OB)}$	$S_{(OB)}$	$S_{(OA)}$	$S_{(OC)}$	r^{-1}	Id	r
$S_{(OC)}$	$S_{(OC)}$	$S_{(OB)}$	$S_{(OA)}$	r	r^{-1}	Id



Remarque

Si on désigne par $\mathcal{I}_{ABC}$ l'ensemble des isométries laissant invariant un triangle équilatéral ABC, $(\mathcal{I}_{ABC}, \circ)$ est un groupe.

Exercices

- 2.a Soit deux droites ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$), A un point de ($\mathcal{D}$) et A' un point de ($\mathcal{D}'$).
Démontrer qu'il existe deux déplacements qui transforment A en A' et ($\mathcal{D}$) en ($\mathcal{D}'$).

- 2.b ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}'$) sont deux cercles de même rayon et de centres distincts O et O'.
Soit A un point de ($\mathcal{C}$) et A' un point de ($\mathcal{C}'$).
Démontrer qu'il existe un unique déplacement transformant A en A' et ($\mathcal{C}$) en ($\mathcal{C}'$).

- 2.c Soit A, B, C et D quatre points distincts tels que C est le milieu de [AB] et B le milieu de [CD].

Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que : $r(A) = D$ et $r(B) = C$.
Préciser le centre et l'angle de cette rotation.

- 2.d ($\mathcal{C}$) est un cercle de centre O, A un point extérieur à ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{D}$) une droite.
Construire un triangle équilatéral ABC tel que :
 $B \in (\mathcal{C})$ et $C \in (\mathcal{D})$.

- 2.e 1. Déterminer toutes les isométries laissant invariant un carré ABCD.
2. Établir le tableau de composition de ces isométries.

3 Applications affines

Dans cette leçon, $\mathcal{P}$ désigne le plan et $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

3.1. Généralités

Introduction

• Soit $(\mathcal{D})$ et (Δ) deux droites sécantes et p la projection sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à (Δ) .

Soit A et B deux points distincts, λ un nombre réel et C le point tel que : $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$.

On désigne par A' , B' et C' les images respectives de A , B et C par p .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{AC} = \lambda \vec{AB} &\Leftrightarrow (1 - \lambda) \vec{CA} + \lambda \vec{CB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow C = \text{bar} \{(A, 1 - \lambda), (B, \lambda)\}. \end{aligned}$$

On a vu en classe de première que les projections conservent le barycentre de deux points.

Donc : $C' = \text{bar} \{(A', 1 - \lambda), (B', \lambda)\}$; c'est-à-dire : $\vec{A'C'} = \lambda \vec{A'B'}$.

On dit que p conserve le coefficient de colinéarité.

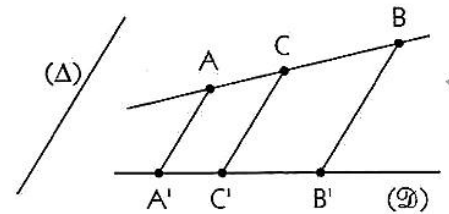
• Plus généralement, on démontre de façon analogue qu'une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui conserve le barycentre de deux points pondérés conserve le coefficient de colinéarité.

• Réciproquement, soit f une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui conserve le coefficient de colinéarité. Soit G le barycentre de deux points pondérés (A, a) et (B, b) ($a + b \neq 0$).

$$\text{On a : } \vec{AG} = \frac{b}{a+b} \vec{AB} ; \text{ donc : } f(\vec{A})f(\vec{G}) = \frac{b}{a+b} f(\vec{A})f(\vec{B}).$$

On en déduit que $f(G)$ est le barycentre des points pondérés $(f(A), a)$ et $(f(B), b)$.

Il est donc équivalent de dire qu'une application du plan conserve le coefficient de colinéarité et qu'elle conserve le barycentre de deux points pondérés.



Définition et propriétés

Définition

On appelle application affine du plan toute application de $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui conserve le coefficient de colinéarité.

Une application affine bijective du plan est appelée transformation affine du plan.

Propriété 1

Soit f une application du plan dans lui-même.
 f est une application affine si et seulement si f conserve le barycentre de deux points.

Exemples

- Toute projection du plan est une application affine du plan.
- Toute isométrie du plan est une transformation affine du plan.
- Toute homothétie du plan est une transformation affine du plan.

Propriétés 2

- La composée de deux applications affines du plan est une application affine du plan.
- La réciproque d'une transformation affine du plan est une transformation affine du plan.

Démonstration

- Soit f et g deux applications affines du plan.

Pour tous points A, B, G du plan et tout nombre réel λ , on a :

$$\begin{aligned}\vec{AG} = \lambda \vec{AB} &\Rightarrow f(\vec{A})f(\vec{G}) = \lambda f(\vec{A})f(\vec{B}) \\ &\Rightarrow g[f(\vec{A})]g[f(\vec{G})] = \lambda g[f(\vec{A})]g[f(\vec{B})].\end{aligned}$$

Donc la composée de deux applications affines du plan est une application affine du plan.

- Soit f une transformation affine du plan, G le barycentre de deux points pondérés (A, a) et (B, b) .

Désignons par G' le barycentre des points pondérés $(f^{-1}(A), a)$ et $(f^{-1}(B), b)$.

On a : $f(G') = \text{bar} \{(A, a) ; (B, b)\} = G$; donc : $f^{-1}(G) = \text{bar} \{(f^{-1}(A), a) ; (f^{-1}(B), b)\}$.

f^{-1} conserve le barycentre de deux points ; donc f^{-1} est une transformation affine du plan.

Exemple

Toute similitude, composée d'une isométrie et d'une homothétie, est une transformation affine du plan.

Remarque

L'ensemble des transformations affines du plan, muni de la loi $\circ$, est un groupe appelé **groupe affine du plan**.

Application vectorielle associée à une application affine

Soit f une application affine, A, B, C et D quatre points tels que $\vec{AD} = \vec{BC}$. On désigne par A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D par f .

f conserve le coefficient de colinéarité ; donc : $\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow \vec{A'D'} = \vec{B'C'}$.

La conservation de cette égalité vectorielle justifie la définition suivante.

Définition

Soit f une application affine de $\mathcal{P}$.

On appelle **application vectorielle associée à f** l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, notée φ , telle que pour tous points A et B de $\mathcal{P}$, on a : $\varphi(\vec{AB}) = f(\vec{A})f(\vec{B})$.

Exemples

- Une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est une translation si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a : $\vec{M'N'} = \vec{MN}$.

On en déduit que l'application vectorielle associée à une translation est l'application identique de $\mathcal{V}$.

- Une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est une homothétie de rapport k ($k \neq 0$ et $k \neq 1$) si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a : $\vec{M'N'} = k \vec{MN}$.

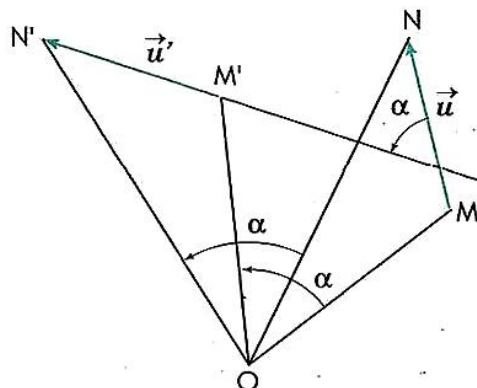
On en déduit que l'application vectorielle associée à une homothétie de rapport k est l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $k\vec{u}$.

Cette application est appelée **homothétie vectorielle** de rapport k .

- Une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est une rotation d'angle α si et seulement si pour tous points M et N distincts d'images respectives M' et N' , on a : $MN = M'N'$ et $(\vec{MN}, \vec{M'N'}) = \widehat{\alpha}$.

On en déduit que l'application vectorielle associée à une rotation d'angle α est l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ non nul associe le vecteur $\vec{u'}$ tel que : $\|\vec{u'}\| = \|\vec{u}\|$ et $(\vec{u}, \vec{u'}) = \widehat{\alpha}$.

Cette application est appelée **rotation vectorielle** d'angle α .



Propriétés

Soit f une application affine du plan, φ l'application vectorielle associée à f .

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ et pour tout nombre réel α , on a :

- $\varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$;
- $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.

On dit que φ est une application linéaire ; φ sera désormais appelée application linéaire associée à f .

Démonstration

- La première propriété traduit la conservation de la colinéarité.

Démontrons la seconde propriété.

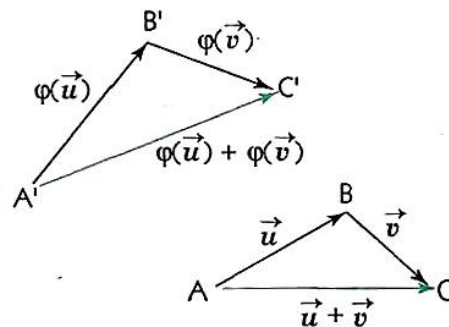
- Soit A, B et C trois points tels que : $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{BC} = \vec{v}$.

On désigne par A', B' et C' les images respectives de A, B et C par f .

On a : $\vec{A'C'} = \vec{A'B'} + \vec{B'C'} = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$;

$$\vec{A'C'} = \varphi(\vec{AC}) = \varphi(\vec{u} + \vec{v}).$$

On en déduit que : $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.



Remarques

- On a : $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$; en effet : $\varphi(\vec{AA}) = f(\vec{A})f(\vec{A}) = \vec{0}$.

- Plus généralement, on a : $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\vec{u}_i)$.

Conséquence

Toute application affine conserve le barycentre.

Démonstration

Soit f une application affine et φ l'application vectorielle associée à f .

f conserve le coefficient de colinéarité et φ est une application linéaire.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$; on a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$.

On désigne par G' et A'_i ($1 \leq i \leq n$) les images respectives des points G et A_i ($1 \leq i \leq n$) par f .

On a : $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\vec{GA}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{G'A'_i}$ et $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$; donc : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{G'A'_i} = \vec{0}$.

On en déduit que G' est le barycentre des points pondérés $(A'_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

3.2. Autres propriétés

Détermination d'une application affine

Soit A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{P}$ et f une application affine de $\mathcal{P}$.

Soit M un point du plan et $(x ; y)$ ses coordonnées dans le repère (A, B, C).

$$\text{On a : } \vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \Rightarrow x\vec{MB} + y\vec{MC} + (1-x-y)\vec{MA} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow M = \text{bar} \{(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)\}$$

$$\Rightarrow f(M) = \text{bar} \{(f(A), 1-x-y), (f(B), x), (f(C), y)\}.$$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Une application affine du plan est déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images.

Remarques

- Si deux applications affines du plan coïncident en trois points non alignés, alors elles sont égales. En particulier, l'application identique est la seule application affine du plan qui laisse invariants trois points non alignés.
- Une application affine du plan est bijective si et seulement si l'image d'un repère est un repère.

Exemples

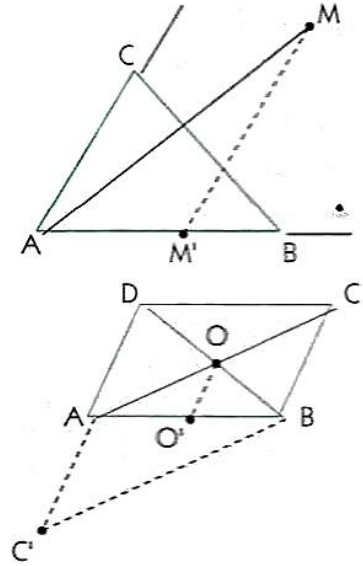
- Soit ABC un triangle et f l'application affine du plan définie par : $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = A$. Déterminer la nature de f .
Soit p la projection sur la droite (AB) parallèlement à la droite (AC).
On a : $p(A) = A$, $p(B) = B$ et $p(C) = A$; donc : $f = p$.

- Soit ABCD un parallélogramme de centre O et f l'application affine du plan définie par : $f(A) = C$, $f(B) = B$ et $f(D) = A$. Déterminer C' et O' , images respectives par f des points C et O.

$$\begin{aligned}\text{On a : } \vec{AB} = \vec{DC} &\Rightarrow f(A)f(B) = f(D)f(C) \\ &\Rightarrow \vec{CB} = \vec{AC'}.\end{aligned}$$

Donc, C' est tel que : $\vec{AC'} = \vec{CB}$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } O \text{ milieu de } [BD] &\Rightarrow O' \text{ milieu de } [f(B)f(D)] \\ &\Rightarrow O' \text{ milieu de } [BA].\end{aligned}$$



Points invariants par une application affine

Propriété

Soit f une application affine de $\mathcal{P}$.

L'ensemble des points invariants par f est $\emptyset$, un singleton, une droite ou $\mathcal{P}$.

Démonstration

Soit $(\mathcal{I}_f)$ l'ensemble des points invariants par f . Raisonnons par disjonction des cas.

- 1^{er} cas : il existe au moins trois points invariants non alignés A, B et C.

On a vu dans le paragraphe précédent que f est alors l'application identique de $\mathcal{P}$.

On en déduit que : $(\mathcal{I}_f) = \mathcal{P}$.

- 2^e cas : il n'existe pas trois points invariants non alignés, mais il existe deux points invariants distincts A et B.

– Tout point invariant M est tel que A, B et M sont alignés ; donc : $(\mathcal{I}_f) \subset (AB)$.

– Soit M un point de la droite (AB) ; il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{AM} = \lambda \vec{AB}$.

On a : $Af(M) = \lambda \vec{AB} = \vec{AM}$; donc M est invariant et $(AB) \subset (\mathcal{I}_f)$.

On en déduit que : $(\mathcal{I}_f) = (AB)$.

- 3^e cas : $(\mathcal{I}_f)$ ne contient pas deux points invariants distincts.

$(\mathcal{I}_f)$ est soit l'ensemble vide, soit un singleton.

Exemples

- Une translation de vecteur non nul n'a pas de point invariant.
- Une rotation d'angle non nul n'a qu'un point invariant, son centre.
- L'ensemble des points invariants par une symétrie orthogonale est l'axe de cette symétrie.

Images d'une droite, du plan par une application affine

Propriété 1

Soit f une application affine, (AB) une droite, A' et B' les images respectives de A et B par f .

- Si $A' = B'$, alors l'image de (AB) est le singleton $\{A'\}$.
- Si $A' \neq B'$, alors l'image de (AB) est la droite (A'B').

Démonstration

La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B , donc l'image de (AB) est l'ensemble des barycentres de $f(A)$ et $f(B)$. On en déduit que :

- si $A' = B'$, alors : $f(AB) = \{A'\}$;
- si $A' \neq B'$, alors : $f(AB) = (A'B')$.

Remarque

L'image d'une droite par une transformation affine est une droite.

Exemples

Soit $(\mathcal{D})$ et (Δ) deux droites sécantes et p la projection sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à (Δ) .

- L'image d'une droite parallèle à (Δ) est un singleton.
- L'image d'une droite sécante à (Δ) est $(\mathcal{D})$.

Propriété 2

Soit f une application affine du plan, (AB) et (CD) deux droites parallèles.

Si l'image de (AB) par f est une droite $(A'B')$, alors l'image de (CD) par f est une droite $(C'D')$ parallèle à $(A'B')$.

Démonstration

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ; donc, il existe un nombre réel k non nul tel que : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
 f est une application affine ; donc f conserve le coefficient de colinéarité et on a : $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

L'image de (AB) est une droite ; donc : $\overrightarrow{A'B'} \neq \vec{0}$.

On en déduit que $\overrightarrow{C'D'} \neq \vec{0}$ et que l'image de (CD) par f est une droite $(C'D')$ parallèle à $(A'B')$.

Remarques

- Les images par une transformation affine du plan de deux droites strictement parallèles sont deux droites strictement parallèles.
- Les images par une transformation affine du plan de deux droites sécantes sont deux droites sécantes.

Propriété 3

Soit f une application affine du plan.

- Si f est bijective, alors : $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.
- Si f n'est pas bijective, alors $f(\mathcal{P})$ est un singleton ou une droite.

Démonstration

Soit A, B, C trois points non alignés et A', B', C' leurs images respectives par f .

- 1^{er} cas : A', B' et C' sont non alignés

(A', B', C') est un repère du plan ; donc f est bijective et $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

- 2^e cas : A', B' et C' sont alignés et non tous confondus

On peut supposer par exemple que A' et B' sont distincts.

D'après la propriété 1, on a : $f(AB) = (A'B')$; donc $(A'B') \subset f(\mathcal{P})$.

De plus, l'image de tout point M du plan, considéré comme barycentre de A, B , et C , est un point M' barycentre de A', B' et C' ; donc : $f(\mathcal{P}) \subset (A'B')$.

On en déduit que : $f(\mathcal{P}) = (A'B')$.

- 3^e cas : $A' = B' = C'$

On a : $f(\mathcal{P}) = \{A'\}$.

Exemples

- L'image de $\mathcal{P}$ par une translation est $\mathcal{P}$.
- L'image de $\mathcal{P}$ par la projection orthogonale sur une droite $(\mathcal{D})$ du plan est $(\mathcal{D})$.

Expression analytique d'une application affine

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

• Soit f une application affine du plan, φ son application linéaire associée.

Désignons par O' l'image de O par f , $(a; a')$, $(b; b')$ et $(c; c')$ les coordonnées respectives de $\varphi(\vec{i})$, $\varphi(\vec{j})$ et de O' .

Pour tout point $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et son image $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ par f , on a : $\vec{O'M'} = \varphi(\vec{OM}) = \varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) = x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j})$.

Donc : $(x' - c)\vec{i} + (y' - c')\vec{j} = x(a\vec{i} + a'\vec{j}) + y(b\vec{i} + b'\vec{j})$; c'est-à-dire :
$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

• Réciproquement, soit f une application d'expression analytique :
$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Désignons par G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) , par A' , B' et G' les images respectives des points A , B et G par f .

On a : $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$; démontrons que : $\alpha\vec{G'A'} + \beta\vec{G'B'} = \vec{0}$.

On a : $\alpha(x'_A - x'_G) + \beta(x'_B - x'_G) = \alpha[a(x_A - x_G) + b(y_A - y_G)] + \beta[a(x_B - x_G) + b(y_B - y_G)]$
 $= a[\alpha(x_A - x_G) + \beta(x_B - x_G)] + b[\alpha(y_A - y_G) + \beta(y_B - y_G)]$
 $= 0$.

On démontre de même que : $\alpha(y'_A - y'_G) + \beta(y'_B - y'_G) = 0$.

On en déduit que G' est le barycentre des points pondérés (A', α) et (B', β) .

Donc, f est une application affine du plan.

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une application du plan dans lui-même.

f est une application affine du plan si et seulement si elle admet une expression analytique de la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Exemples

• L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est :
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

• L'expression analytique de l'homothétie de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et de rapport -2 est :
$$\begin{cases} x' = -2x + 6 \\ y' = -2y - 3 \end{cases}$$

• L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ d'expression analytique
$$\begin{cases} x' = 2x + 3y - 5 \\ y' = 3x - 7y + 11 \end{cases}$$
 est une application affine.

3.3. Affinités du plan

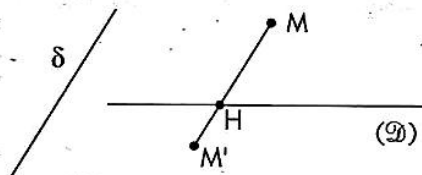
Affinité d'axe $(\mathcal{D})$, de direction δ et de rapport k

Définition

Soit $(\mathcal{D})$ une droite, δ une direction de droites distincte de celle de $(\mathcal{D})$ et k un nombre réel.

On appelle affinité d'axe $(\mathcal{D})$, de direction δ et de rapport k l'application f qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$\vec{HM'} = k\vec{HM}$, où H est le projeté de M sur $(\mathcal{D})$ suivant la direction δ .



Lorsque la direction de $(\mathcal{D})$ est orthogonale à δ , f est l'affinité orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ et de rapport k .

Remarques

• Si $k = 0$, alors f est la projection sur $(\mathcal{D})$ suivant la direction δ .

• Si $k = 1$, alors f est l'application identique du plan.

• Si $k = -1$ et si la direction de $(\mathcal{D})$ est orthogonale à δ , alors f est la symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$.

• L'ensemble des points invariants d'une affinité est son axe.

Expression analytique

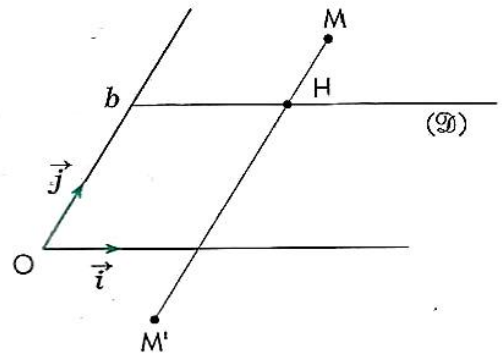
Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On ne donne l'expression analytique d'une affinité que dans le cas particulier où l'axe est parallèle à la droite de repère $(O, \vec{i})$ et la direction est celle de $\vec{j}$.

Soit f l'affinité d'axe $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = b$,
de direction celle de $\vec{j}$,
de rapport k .

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point du plan, $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ son image par f et
 H le projeté de M sur $(\mathcal{D})$ suivant la direction de $\vec{j}$.

$$\text{On a : } \vec{HM'} = k\vec{HM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' - b = k(y - b) \end{cases}$$



On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'expression analytique de l'affinité d'axe $(\mathcal{D})$ d'équation $y = b$, de direction celle de $\vec{j}$ et de rapport k

$$\text{est : } \begin{cases} x' = x \\ y' = ky + (1 - k)b \end{cases}$$

Remarques

- Toute affinité est une application affine.
- Soit f l'affinité d'axe $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}$, de direction celle de $\vec{v}$ et de rapport k .

L'application linéaire associée à f est l'application φ de $\mathcal{V}$ dans lui-même définie par : $\begin{cases} \varphi(\vec{u}) = \vec{u} \\ \varphi(\vec{v}) = k\vec{v} \end{cases}$
On en déduit qu'une affinité est bijective si et seulement si $k \neq 0$.

Exercices

- 3.a Soit ABC un triangle, A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, f l'application affine du plan définie par :

$$f(A) = A, f(B) = B' \text{ et } f(C) = C'.$$

1. Déterminer les images par f de A' , B' et C' .
2. Déterminer les images par f des droites (AA') , (BB') et (CC') .
3. Déterminer l'expression analytique de f dans le repère (A, B, C) .

- 3.b $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont deux droites sécantes en un point O . Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

- si $M \in (\Delta)$, alors $M' = M$;
- si $M \notin (\Delta)$, alors le milieu I de $[MM']$ appartient à (Δ) et $(MM') \parallel (\mathcal{D})$.

1. Construire les images par f de deux points

distincts A et B dans les cas suivants :

- a) les droites (AB) et (Δ) sont parallèles ;
- b) les droites (AB) et (Δ) sont sécantes.

2. Démontrer que f est une application affine du plan.

- 3.c Le plan est muni du repère (O, I, J) .

On considère l'application affine f telle que : $f(O) = I$, $f(I) = J$ et $f(J) = O$.

1. Démontrer que f est bijective.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

- 3.d On reprend l'application f de l'exercice 3b.

1. Déterminer une expression analytique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont vecteurs directeurs respectifs de $(\mathcal{D})$ et (Δ) .
2. Démontrer que f est bijective.

Exercices

APPRENTISSAGE

Décomposition et composition d'isométries

1 ABCD est un rectangle.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la droite (Δ) telle que :

- a) $t_{\vec{AB}} = s_{\Delta} \circ s_{(AD)}$ b) $t_{\vec{AB}} = s_{(AD)} \circ s_{\Delta}$
 c) $t_{\vec{AB}} = s_{\Delta} \circ s_{(BC)}$ d) $t_{\vec{AB}} = s_{(BC)} \circ s_{\Delta}$

2 Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) les médiatrices respectives de [BC], [CA] et [AB].

Déterminer les applications suivantes :

- a) $s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$ b) $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3}$
 c) $s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ d) $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3}$

3 ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. Dans chacun des cas suivants, déterminer la droite (Δ) telle que :

- a) $r_{(A, \frac{\pi}{3})} = s_{\Delta} \circ s_{(AB)}$ b) $r_{(A, \frac{\pi}{3})} = s_{(OA)} \circ s_{\Delta}$
 c) $r_{(O, \frac{2\pi}{3})} = s_{(OA)} \circ s_{\Delta}$ d) $r_{(O, \frac{2\pi}{3})} = s_{\Delta} \circ s_{(OA)}$

4 ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. Déterminer les applications suivantes :

- a) $r_{(B, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(C, \frac{\pi}{3})}$ b) $r_{(B, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{3})}$
 c) $r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(O, \frac{2\pi}{3})}$ d) $r_{(O, \frac{2\pi}{3})} \circ r_{(C, \frac{\pi}{3})}$

5 ABC est un triangle équilatéral de sens direct. Déterminer les applications suivantes :

- a) $r_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{AB}}$ b) $t_{\vec{AB}} \circ r_{(A, \frac{\pi}{3})}$
 c) $r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{3})}$ d) $r_{(C, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{3})}$

6 ABCD est un carré de sens direct et de centre O. Déterminer les applications suivantes :

- a) $r_{(A, \frac{\pi}{4})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{4})}$ b) $r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(B, \frac{\pi}{2})}$
 c) $r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ r_{(B, -\frac{\pi}{2})}$ d) $t_{\vec{AB}} \circ r_{(B, \frac{\pi}{4})}$
 e) $t_{\vec{AB}} \circ r_{(O, \frac{\pi}{2})} \circ t_{\vec{CD}}$ f) $t_{\vec{AB}} \circ r_{(B, \frac{\pi}{2})} \circ t_{\vec{BA}}$

7 ABC est un triangle.

On pose : $(\vec{AC}, \vec{AB}) = \alpha$, $(\vec{BA}, \vec{BC}) = \beta$, $(\vec{CB}, \vec{CA}) = \gamma$ et $f = r_{(C, \gamma)} \circ r_{(B, \beta)} \circ r_{(A, \alpha)}$.

- Démontrer que f est une symétrie centrale.
- Soit P le point de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec [AC]. Déterminer f(P) et en déduire la nature exacte de f.

8 ABC est un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par (Γ) le cercle circonscrit à ABC et O son centre. La médiatrice de [BC] coupe (Γ) en A et D.

On note A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1. Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$s_{(BD)} \circ s_{(DC)} ; s_{(CA)} \circ s_{(AB)} ; s_{(DC)} \circ s_{(CA)}$$

3. On note : $f = s_{(BD)} \circ s_{(DC)} \circ s_{(AB)}$.

a) Déterminer f(A) puis la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) En déduire la nature de la transformation $s_{(BD)} \circ s_{(DC)}$.

Isométries et démonstrations de propriétés

9 ABC est un triangle de sens direct.

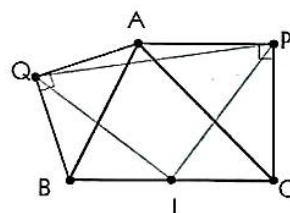
Les points P et Q sont tels que les triangles PAC et QAB sont extérieurs à ABC, isocèles rectangles respectivement en P et Q.

I est le milieu de [BC].

Soit r_P et r_Q les quarts de tour directs de centres respectifs P et Q.

1. Démontrer que : $r_P \circ r_Q = s_I$.

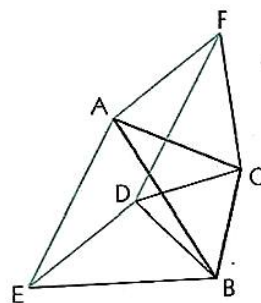
2. En déduire que IPQ est un triangle isocèle rectangle en I.



10 ABC est un triangle de sens direct. Les points D, E et F sont tels que les triangles BCD, AEB et CFA sont équilatéraux directs.

1. Préciser la nature de la transformation $r_{(B, \frac{\pi}{3})} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{3})}$.

2. Utiliser cette transformation pour démontrer que AEDF est un parallélogramme.

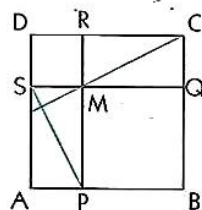


11 ABCD est un carré de sens direct et M un point de la droite (BD).

On désigne par P, Q, R et S les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AB), (BC), (CD) et (AD).

1. Démontrer qu'il existe un quart de tour direct r tel que : $r(C) = S$ et $r(M) = P$.

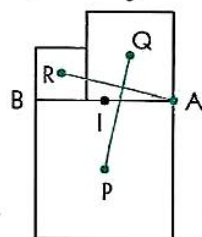
2. En déduire que les droites (MC) et (PS) sont perpendiculaires.



12 P, Q et R sont les centres des trois carrés, I est le milieu de [AB].

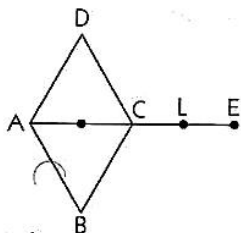
1. Démontrer que les triangles IPA et IQR sont rectangles isocèles en I.

2. En déduire que AR = PQ et que les droites (AR) et (PQ) sont perpendiculaires.



13 ABC et ACD sont deux triangles équilatéraux de sens direct.

Les points O et I sont les milieux respectifs de [AC] et [AB], les points L et E sont tels que : $\vec{OC} = \vec{CL} = \vec{LE}$.



Soit t la translation de vecteur $\vec{OA}$, r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note : $f = r \circ t$.

1. a) Quelle est l'image de O par f ?

b) Donner une mesure de l'angle $(\vec{IO}, \vec{IA})$.

c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .

2. M étant un point quelconque du plan, on note $N = r(M)$, J le milieu de [EM] et K le milieu de [ND].

a) Soit P l'antécédent de M par t . Quel est le milieu de [LP] ?

b) Lorsque I, J et K sont distincts, démontrer que le triangle IJK est équilatéral.

(On pourra utiliser $f(L)$ et $f(P)$.)

14 ABC est un triangle tel que :

$$\text{Mes}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3} \text{ et } AB < AC.$$

On désigne par (Γ) le cercle circonscrit à ABC et O son centre. Soit E le milieu de [BC] et P le point de [AC] tel que $AB = CP$. La droite (OE) coupe (Γ) en I et J, tels que J et A soient sur le même arc de corde [BC].

1. a) Faire une figure.

b) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\text{Mes}(\vec{MB}, \vec{MC}) = \frac{\pi}{3} ?$$

2. a) Justifier qu'il existe une unique rotation r telle que :

$$r(A) = P \text{ et } r(B) = C.$$

Déterminer son angle.

b) Démontrer que son centre est un point de (Γ) , que l'on précisera.

c) Quelle est la nature du triangle JAP ?

3. a) Déterminer l'image de B par $r \circ s_B$, où s_B est la symétrie de centre B.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r \circ s_B$.

Isométries et recherches de lieux géométriques

15 Soit $(\mathcal{D})$ une droite et A, B deux points extérieurs à cette droite. À tout point M de $(\mathcal{D})$, on associe le point M', second point d'intersection du cercle de centre A et de rayon AM avec le cercle de centre B et de rayon BM.

Déterminer le lieu géométrique des points M' lorsque le point M décrit la droite $(\mathcal{D})$.

16 $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et A un point de $(\mathcal{C})$. Soit M un point de $(\mathcal{C})$ et P le point tel que [MP] est un diamètre de $(\mathcal{C})$. La droite (AP) et la parallèle à (OA) passant par M se coupent en un point N.

Déterminer le lieu de N lorsque M décrit $(\mathcal{C})$.

17 $(\mathcal{C})$ est un cercle, A et B sont deux points extérieurs à $(\mathcal{C})$, M est un point de $(\mathcal{C})$. Soit ABMP un parallélogramme et Q le point tel que le triangle APQ soit équilatéral direct.

Déterminer le lieu de Q lorsque M décrit $(\mathcal{C})$.

18 $(\mathcal{C})$ est un cercle, A et B deux points distincts et non diamétralement opposés de $(\mathcal{C})$.

À tout point M du grand arc $\widehat{AB}$, privé du point B, on associe le point N de la demi-droite [BM) tel que :

$$AM = BN.$$

1. Démontrer que N est l'image de M par la composée d'une translation et d'une rotation que l'on précisera.

2. Déterminer le lieu de N lorsque M décrit $\widehat{AB}$, privé de B.

19 ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose :

$$N = r_1(M) \text{ et } M' = r_2(N).$$

Soit r la transformation telle que : $r = r_2 \circ r_1$.

1. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB) et Ω le milieu du segment [BD]. Déterminer $r(B)$.

En déduire la nature de r .

2. a) Démontrer que les points M, N et M' sont alignés

si et seulement si : $\text{Mes}(\vec{M\Omega}, \vec{MA}) = \frac{\pi}{3} [\pi]$.

b) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, N et M' sont alignés est un cercle passant par les points A et Ω . Construire (Γ) .

Isométries et problèmes de construction

20 ABC est un triangle et I un point du segment [AB]. Construire un triangle équilatéral IJK tel que :

$$J \in (BC) \text{ et } K \in (AC).$$

21 (Δ) est une droite, A et B sont deux points distincts n'appartenant pas à (Δ) , A' et B' sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à (Δ) .

Soit M un point du plan.

Construire, à la règle uniquement, le symétrique M' de M par rapport à (Δ) .

22 $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont deux cercles concentriques.

Construire un carré dont deux côtés opposés sont des cordes de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

23 Soit (Δ_1) , (Δ_2) et (Δ_3) trois droites concourantes en un point O et non perpendiculaires deux à deux. Construire un triangle ABC tel que (Δ_1) , (Δ_2) et (Δ_3) soient les bissectrices respectives des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

(On rappelle que le centre du cercle inscrit dans un triangle est le point d'intersection des bissectrices de ce triangle.)

24 (Δ) et (Δ') sont deux droites parallèles et A un point n'appartenant à aucune de ces deux droites.

Construire un triangle ABC tel que :

– ABC est rectangle et isocèle en A ;

– $B \in (\Delta)$ et $C \in (\Delta')$.

Préciser le nombre de solutions.

Déterminations d'isométries

25 ABCD est un carré de sens direct et de centre O. Soit r le quart de tour direct de centre O et t la translation de vecteur $\vec{BC}$. Caractériser les transformations rot et tor .

26 ABCD est un rectangle tel que : $AD = 2AB$.
1. Construire les points E et G tels que :

$$\vec{AE} = 2\vec{AB} \text{ et } \vec{AG} = -\frac{1}{2}\vec{AD}.$$

2. Démontrer qu'il existe deux rotations, dont on déterminera les éléments caractéristiques, qui transforment le rectangle ABCD en le rectangle AEFG.

27 Soit ABCD un losange ($AC > BD$) et O son centre.
1. Déterminer toutes les isométries laissant invariant ABCD.
2. Établir la table de composition de ces isométries.

28 Le groupe de Klein

Soit A et B deux points distincts, I le milieu de [AB].
1. Démontrer que toute isométrie f qui transforme [AB] en lui-même vérifie :
– soit $f(A) = A$ et $f(B) = B$
– soit $f(A) = B$ et $f(B) = A$
2. Déterminer toutes ces isométries.

29 ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].
1. Déterminer deux isométries f et g transformant le couple (A, B') en le couple (B, C').
2. Préciser l'image du couple (C, A') par chacune de ces transformations.

Applications affines

30 Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC$, B' et C' les milieux respectifs de [AC] et [AB], f l'application affine du plan définie par :
 $f(A) = A$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.
1. Démontrer qu'il existe une homothétie h dont on précisera le centre et le rapport telle que $h \circ f$ soit une isométrie.
2. Préciser la nature de $h \circ f$.

31 Soit ABCD un losange et f l'application affine de $\mathcal{P}$ définie par : $f(A) = A$, $f(B) = D$ et $f(C) = D$.
1. a) Déterminer les images par f du point D, de la droite (AD) et du plan $\mathcal{P}$.
b) Démontrer que $f \circ f$ est une application constante.
2. Soit g la symétrie orthogonale d'axe (AC).
a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application $g \circ f$.
b) En déduire la construction de l'image par f d'un point quelconque M de $\mathcal{P}$.

32 Soit ABC un triangle et f l'application affine du plan définie par : $f(A) = B$, $f(B) = A$ et $f(C) = C$.
1. Démontrer que : $f \circ f = Id$.
On dit que f est involutive.

2. Démontrer que le milieu I de [AB] est invariant par f .
3. Démontrer que la droite (IC) est invariante point par point par f .
4. Démontrer que la droite (AB) est globalement invariante par f .
5. Construire l'image d'un point M du plan par f .
(On distinguera trois cas :
 $M \in (IC)$, $M \in (AB)$ et $M \notin (IC) \cup (AB)$.)

33 ABCD est un parallélogramme tel que $AB = BD$. Soit f l'application affine de $\mathcal{P}$ définie par $f(A) = B$, $f(B) = D$, $f(D) = C$ et t la translation de vecteur $\vec{AB}$.
1. Préciser la nature de l'application g définie par :
 $g = t^{-1} \circ f$.
2. Construire l'image par f d'un point quelconque M de $\mathcal{P}$.
3. Démontrer que f n'admet pas de point invariant.

34 A, B, C sont trois points non alignés de $\mathcal{P}$ et D le point tel que C soit le milieu de [BD]. Soit f l'application affine de $\mathcal{P}$ définie par :
 $f(A) = A$, $f(B) = D$ et $f(C) = B$.
1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
2. En déduire qu'il existe un point G de la droite (BC), invariant par f , et exprimer $\vec{GB}$ en fonction de $\vec{GC}$.
3. Démontrer que f est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques.

35 Soit α et β deux nombres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$, f_1 et f_2 deux applications affines du plan et g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le barycentre des points pondérés $((f_1(M), \alpha)$ et $((f_2(M), \beta)$.
Démontrer que g est une application affine.

36 Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(-\frac{3}{2}; 2)$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\vec{OM'} = (\vec{u} \cdot \vec{OM})\vec{i} + (\vec{i} \cdot \vec{OM})\vec{u}$.
1. Donner l'expression analytique de f .
En déduire que f est une application affine.
2. Déterminer deux points A et B, distincts de O, tels que : $f(A) = A$ et $f(B) = -4\vec{OB}$.
En déduire que f est une affinité orthogonale dont on précisera l'axe et le rapport.
3. Exprimer analytiquement f dans le repère (O, A, B) .

37 Soit A un point du plan, $\vec{a}$ un vecteur de $\mathcal{V}$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

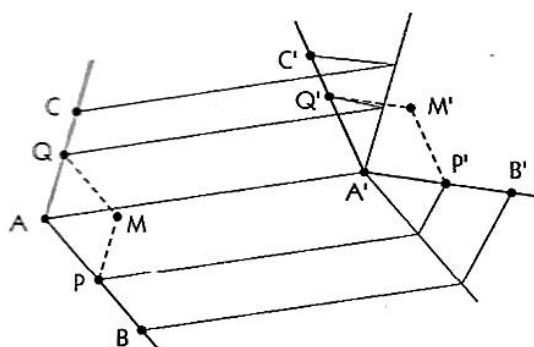
$$\vec{AM'} = 2(\vec{AM} \cdot \vec{a})\vec{a} - \vec{AM}.$$

$\mathcal{V}$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v})$ telle que :

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}.$$

1. Donner l'expression analytique de f en fonction de $\|\vec{a}\|$ dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.
En déduire que f est une application affine.
2. Démontrer que f est bijective si et seulement si :
 $\|\vec{a}\| \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f dans chacun des cas suivants :
a) $\|\vec{a}\| = 0$ b) $\|\vec{a}\| = 1$.

38 Soit (A, B, C) et (A', B', C') deux repères du plan et f l'application affine telle que A, B et C ont pour images respectives A', B' et C' par f . Justifier la construction suivante de l'image d'un point M par f .



39 Soit $(\mathcal{D})$ et (Δ) deux droites sécantes du plan. Pour tout point M du plan, on désigne par (Δ_M) l'image de (Δ) par la symétrie de centre M . L'application f qui à tout point M associe le point d'intersection des droites (Δ_M) et $(\mathcal{D})$ est-elle une application affine du plan ? Est-elle une bijection ? Quels sont ses points invariants ?

40 Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points :

$$A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), C\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right);$$

$$A'\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 10 \end{smallmatrix}\right), B'\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right), C'\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$$

Soit f l'application affine du plan telle que : $f(A) = A', f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

1. Démontrer que f est bijective.
2. Déterminer l'expression analytique de f .

41 Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12). \end{cases}$$

1. Démontrer que le vecteur $\vec{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.
2. Démontrer que : $f \circ f = f$.
3. a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

42 Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36). \end{cases}$$

1. Démontrer que : $f \circ f = \text{Id}$.
2. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite $(\mathcal{D})$ que l'on précisera.
3. Soit M un point du plan et M' son image par f .
a) Démontrer que le milieu de $[MM']$ appartient à $(\mathcal{D})$.

b) Démontrer que le vecteur $\vec{MM'}$ a une direction fixe, orthogonale à celle de $(\mathcal{D})$.

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

43 Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (5 + 4i)z + 3\bar{z} + 2 + 4i$.

f est-elle une application affine ?

44 Soit f une application affine telle que :

$$f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{P}}.$$

1. Démontrer que f est bijective.
2. Soit A un point du plan et M le milieu de $[A f(A)]$. Démontrer que M est invariant par f .
3. Soit $(\mathcal{F})$ l'ensemble des points invariants par f .
a) Justifier que $(\mathcal{F})$ n'est pas vide.
b) Démontrer que si $(\mathcal{F})$ est un singleton, alors f est une symétrie centrale.

45 Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$, associe le point M' de

coordonnées $(x'; y')$ telles que : $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$.

Déterminer les images par f des points O, I et J .

En déduire que f est une affinité dont on précisera l'axe, la direction et le rapport.

46 Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f l'application affine de $\mathcal{P}$ d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y + 2 \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Pour tout point M de $\mathcal{P}$, on désigne par M_1, M_2 et M_3 les points tels que : $M_1 = f(M), M_2 = f(M_1)$ et $M_3 = f(M_2)$.

1. a) Démontrer que l'image par f d'une droite $(\mathcal{D})$ est une droite $(\mathcal{D}')$ non parallèle à $(\mathcal{D})$.
b) En déduire que pour tout point M de $\mathcal{P}$, les points M, M_1 et M_2 , lorsqu'ils sont distincts, ne sont pas alignés.
2. Préciser la nature des applications $f \circ f$ et $f \circ f \circ f$.
3. a) Démontrer que l'isobarycentre G des points M, M_1, M_2 et M_3 est indépendant du point M et en déduire que G est le seul point invariant par f .
b) Faire une figure lorsque M est le point de coordonnées $(2; 1)$.

47 Soit $BB'B''$ un triangle isocèle en B' . On désigne par A, A' et C les milieux respectifs des segments $[BB']$, $[B'B'']$ et $[BB'']$, et par A'' le symétrique de A par rapport à A' .

On considère une application affine f du plan dans lui-même, telle que : $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

1. a) Déterminer $f(B'')$.
b) Quelle est la nature du quadrilatère $AB'A'C$?
2. Démontrer que $f \circ f$ est une translation si et seulement si : $f(A') = A''$.
3. Dans cette question, on suppose que : $f(A') = A''$. On désigne par ϕ l'application linéaire associée à f .
a) Déterminer $\phi(\vec{AA'})$ et $\phi(\vec{B'C})$.
b) Déterminer une symétrie orthogonale s et une translation t telles que : $f = s \circ t = t \circ s$.

APPROFONDISSEMENT

48 ABC est un triangle de sens direct, A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]. Soit P, Q et R les centres respectifs des carrés construits extérieurement sur les côtés [BC], [CA] et [AB] de ABC.

1. Vérifier que : $\vec{QR} = \vec{QB'} + \vec{C'R} - \frac{1}{2}\vec{BC}$.

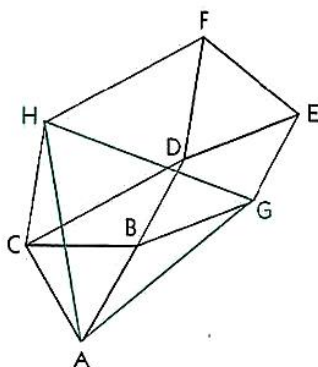
2. Soit ϕ la rotation vectorielle associée à un quart de tour direct du plan.

a) Démontrer que : $\phi(\vec{QR}) = -\vec{AP}$.

b) En déduire que $AP = QR$ et que les droites (AP) et (QR) sont perpendiculaires.

49 ABC et DEF sont deux triangles équilatéraux de sens direct, les points G et H sont tels que EDBG et CDFH sont des parallélogrammes.

Le but de l'exercice est de démontrer par deux méthodes (l'une utilisant les nombres complexes, l'autre utilisant les isométries) que le triangle AGH est équilatéral.



1. Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct, on désigne par a, b, c, d, e, f, g et h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G et H.

a) Démontrer que : $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

Exprimer $f - d$ en fonction de $e - d$.

b) Exprimer : g en fonction de b, d et e ,
 h en fonction de c, d et f .

c) Démontrer que : $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)$.

En déduire que le triangle AGH est équilatéral.

2. On désigne par :

- t_1 la translation de vecteur $\vec{BD}$,
- t_2 la translation de vecteur $\vec{DC}$,
- r la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose : $f = t_2 \circ r \circ t_1$.

a) Justifier que f est une rotation, dont on précisera l'angle.

Déterminer l'image de B par f ; en déduire le centre de la rotation f .

b) Déterminer l'image de G par f .

En déduire que le triangle AGH est équilatéral.

50 Théorème de Von Aubel

Soit ABCD un quadrilatère.

1. Démontrer que les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés de ABCD forment un quadrilatère dont les diagonales sont isométriques et perpendiculaires.

(On pourra utiliser le résultat de l'exercice 9.)

2. Préciser la nature de ce quadrilatère dans le cas particulier où ABCD est un parallélogramme.

51 ABCD est un carré de sens direct et de centre

I, (Γ) est le cercle passant par A, B, C et D.

Faire une figure.

On désigne par :

- t la translation de vecteur $\vec{DA}$,
- r_D la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

• r_1 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$,

• r_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

On se propose de déterminer les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$f = t \circ r_D ; g_1 = r_1 \circ f ; g_2 = r_2 \circ f.$$

1. Démontrer que f, g_1 et g_2 sont des rotations, dont on précisera les angles.

2. a) Déterminer $f(D)$ et $f(A)$. Quel est le centre de f ?

b) Déterminer $g_1(D)$ et $g_2(D)$.

3. Soit $A'_1 = g_1(A)$ et $A'_2 = g_2(A)$.

a) Démontrer, en utilisant $g_2 \circ g_1^{-1}$, que A est le milieu du segment $[A'_1, A'_2]$.

b) Démontrer, en déterminant une mesure de l'angle

$(\vec{AD}, \vec{AA'_1})$, que A'_1 est sur la tangente en A à (Γ).

4. a) Soit J le centre de g_1 et K celui de g_2 . Démontrer que J et K appartiennent à (Γ) et sont diamétralement opposés. Placer J et K sur la figure.

b) Démontrer que A'_1 est sur la droite (JB).

Placer les points A'_1 et A'_2 sur la figure.

52 Soit A et B deux points distincts.

On désigne par r_A et r_B les rotations de centres respectifs A et B, d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par r_A et r_B .

1. On considère la transformation $t = r_B \circ r_A^{-1}$.

a) Construire le point C, image de A par t .

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de t .

c) En déduire la nature du quadrilatère $M_1 M_2 C A$.

2. On suppose que le point M décrit le cercle (Γ) de diamètre [AB].

a) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) décrit par le point M_2 quand M décrit (Γ).

b) Soit Ω_1 et Ω_2 les milieux respectifs des segments [AB] et [BC] ; comparer les vecteurs $\vec{\Omega_1 \Omega_2}$ et $\vec{AC}$.

c) Déterminer l'ensemble décrit par le point I, milieu du segment $[M_1 M_2]$, lorsque M décrit (Γ).

53 Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points ($n \geq 3$) distincts du

plan. Existe-t-il un polygone $M_1 M_2 \dots M_n$ tel que :

A_1 est le milieu de $[M_1 M_2]$,

A_2 est le milieu de $[M_2 M_3]$,

...

A_{n-1} est le milieu de $[M_{n-1} M_n]$,

A_n est le milieu de $[M_n M_1]$?

(On distinguera deux cas : n pair et n impair.)

54 Le théorème de Hjelmslev

On se propose de démontrer la propriété suivante.

Soit f une isométrie du plan et (Δ) une droite.

Les milieux des segments $[Mf(M)]$, pour M appartenant à (Δ), sont alignés.

1. Cas d'un antidéplacement

Établir la propriété dans les cas suivants :

a) f est une symétrie orthogonale ;

b) f est une symétrie glissée.

2. Cas d'un déplacement

Soit f un déplacement et g la transformation définie par :

$$g = f \circ s_{\Delta}$$

a) Démontrer que g vérifie la propriété.

b) En déduire que f vérifie la propriété.

55 ABC est un triangle de sens direct.

On construit, à l'extérieur de ce triangle, les carrés BCDE, CAFG, ABHI, puis les parallélogrammes AFUI, BHVE, CDWG.

A.- Relations vectorielles

Soit ρ la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que :

$$\rho(\vec{AU}) = \vec{CB}; \rho(\vec{BV}) = \vec{AC}; \rho(\vec{CW}) = \vec{BA}.$$

2. En déduire que : $\vec{AU} = \vec{EB} = \vec{DC}$, ainsi que les relations analogues pour les vecteurs $\vec{BV}$ et $\vec{CW}$.

B.- Applications géométriques

1. Démontrer que les droites (AU), (BV) et (CW) sont concourantes en l'orthocentre du triangle ABC.

2. Démontrer que les triangles AVW, BWU et CUV sont rectangles isocèles et de sens direct.

3. Soit P, Q et R les centres respectifs des carrés BCDE, CAFG et ABHI.

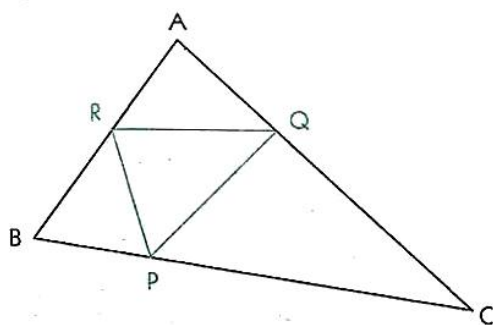
a) Démontrer que P, Q et R sont les milieux des côtés du triangle UVW.

b) Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en l'orthocentre du triangle PQR.

56 Problème de Fagnano

ABC est un triangle, dont les trois angles sont aigus.

On se propose de déterminer les points P, Q et R appartenant respectivement à [BC], [CA] et [AB] tels que le périmètre p du triangle PQR soit minimum.



1. On désigne par A', B' et C' les pieds des hauteurs du triangle ABC.

Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont les bissectrices du triangle A'B'C'.

2. Soit P un point de [BC].

On pose $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \hat{\alpha}$, et on désigne par P' et P'' les images respectives de P par $s_{(AB)}$ et $s_{(AC)}$.

a) Démontrer que P'' est l'image de P' par une rotation, dont on précisera les éléments caractéristiques..

b) Exprimer P'P'' en fonction de AP et α .

c) Comment choisir P pour que P'P'' soit minimum ?

3. On suppose que P est ainsi choisi.

Justifier que si Q $\in$ [CA], R $\in$ [AB] et p est le périmètre du triangle PQR, alors : $P'P'' \leq p$.

4. En déduire que PQR a un périmètre minimum lorsque P, Q et R sont les pieds des hauteurs du triangle ABC.

57 ABC est un triangle dont les trois angles ont une mesure strictement inférieure à 120° et tel que la mesure principale de $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est strictement positive.

A.- On se propose de déterminer un point M, intérieur au triangle ABC, tel que $d_M = MA + MB + MC$ soit minimum.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et M un point intérieur au triangle ABC.

On pose : $r(C) = C'$ et $r(M) = M'$.

1. Démontrer que : $d_M = MB + MM' + M'C'$.

En déduire que d_M est minimum si M et M' appartiennent au segment [BC'].

2. Démontrer que si $M' \in [BC']$, alors M appartient à un segment [B'C], où B' est un point que l'on précisera.

3. En déduire l'unique point M tel que :

$$M \in [B'C] \text{ et } M' \in [BC'].$$

Construire ce point.

B.- Soit P, Q et R les points tels que les triangles BPC, CQA et ARB soient équilatéraux directs.

1. a) En utilisant la rotation r , démontrer que : $CR = BQ$.

b) Démontrer que : $CR = BQ = AP$.

2. Soit I le point d'intersection de [RC] et [BQ].

Déterminer une mesure de $(\vec{IA}, \vec{IP})$ et en déduire que les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes.

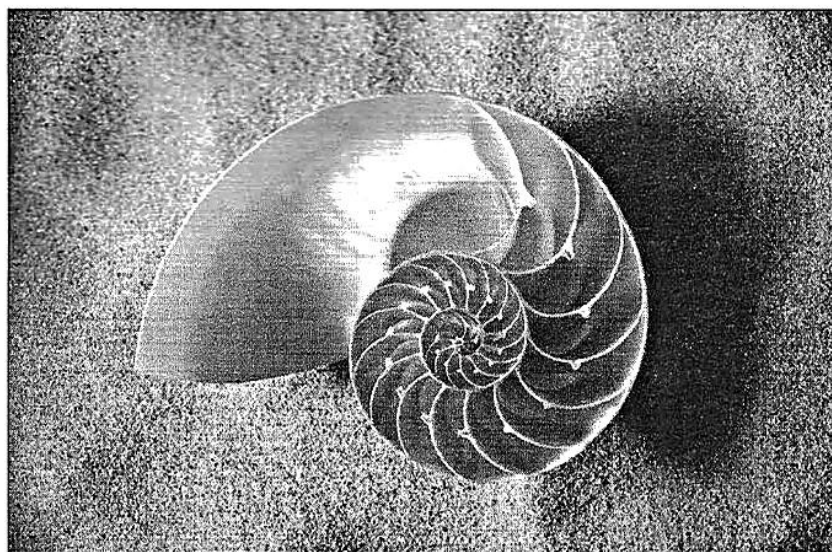
(On pourra utiliser la cocyclicité de A, I, B, R et de B, I, C, P.)

I est appelé point de Steiner du triangle ABC.

Introduction

Nous avons procédé en classe de première à une première étude des similitudes du plan, ce qui nous a permis entre autres de formuler une définition des triangles semblables à l'aide des transformations.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'approfondir l'étude des similitudes directes, en privilégiant tout d'abord l'outil « nombres complexes » dont l'efficacité en géométrie a déjà pu être remarquée (cf. chapitre 3, § 3.3), puis de mettre à profit ces nouvelles transformations pour la description de certaines configurations et la résolution de problèmes classiques de géométrie.



Coupe de la partie interne d'un nautilus.
Toutes les parties de la spirale sont semblables entre elles.

SOMMAIRE

1. Similitudes directes du plan 106
2. Similitudes directes et problèmes de géométrie 111

1 Similitudes directes du plan

1.1. Premières propriétés

Écriture complexe d'une similitude directe du plan

Nous avons défini en classe de première une similitude comme étant la composée d'une isométrie et d'une homothétie. Lorsque l'isométrie est un déplacement (respectivement un antidéplacement), on a une similitude directe (respectivement indirecte).

Soit h une homothétie et d un déplacement.

L'écriture complexe de h est de la forme : $z' = kz + l$ ($k \in \mathbb{R}^*, l \in \mathbb{C}$).

L'écriture complexe de d est de la forme : $z' = e^{i\alpha}z + c$ ($\alpha \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$).

Donc, l'écriture complexe de $h \circ d$ est de la forme : $z' = ke^{i\alpha}z + kc + l$ ($ke^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*, kc + l \in \mathbb{C}$) ;

l'écriture complexe de $d \circ h$ est de la forme : $z' = ke^{i\alpha}z + le^{i\alpha} + c$ ($ke^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*, le^{i\alpha} + c \in \mathbb{C}$).

On en déduit la propriété suivante.

Propriété 1

Toute similitude directe du plan a une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$).

Étudions le problème réciproque.

Soit s une application du plan dans lui-même, dont l'écriture complexe est de la forme :

$$z' = az + b \quad (a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}).$$

- Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .
- Si $a \neq 1$, alors l'équation $z = az + b$ a une solution unique : $\omega = \frac{b}{1-a}$.

On a : $z' = az + b$ et $\omega = a\omega + b$; donc : $z' - \omega = a(z - \omega)$.

Désignons par Ω le point d'affixe ω , k le module de a et α un argument de a .

On obtient : $z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$.

On en déduit que : $s = h \circ r = r \circ h$, où h est l'homothétie de centre Ω , de rapport k et r la rotation de centre Ω , d'angle α .

Propriété 2

Toute application s du plan dans lui-même dont l'écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$) est une similitude directe du plan.

- Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\vec{u}(b)$.
- Si $a \neq 1$, alors s admet un seul point invariant Ω . Soit α un argument de a et k son module ; s est la composée de l'homothétie h de centre Ω , de rapport k et de la rotation r de centre Ω , d'angle α .

Vocabulaire

- Ω , k et α sont appelés respectivement **centre**, **rapport** et **angle** de la similitude directe s .
- La composée $h \circ r$ (égale à $r \circ h$) est appelée **forme réduite** de s .
- Une similitude directe du plan, qui n'est pas une translation, est déterminée par son centre, son rapport et son angle, appelés **éléments caractéristiques** de cette similitude.

Remarques

- Une rotation d'angle α est une similitude directe de rapport 1 et d'angle α .
- Une homothétie de rapport k ($k > 0$) est une similitude directe de rapport k et d'angle nul ; une homothétie de rapport k ($k < 0$) est une similitude directe de rapport $-k$ et d'angle π .
- Une translation peut-être considérée comme une similitude directe de rapport 1 et d'angle nul ; dans ce cas le centre n'est pas défini.

Exemples

- Soit s la similitude directe de centre $\Omega \left(\frac{1}{1} \right)$, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

L'écriture complexe de s est : $z' - (1 + i) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} [z - (1 + i)]$;

c'est-à-dire : $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

- Soit s l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $z' = (1 + i)z - 2i$.

L'écriture complexe de s est de la forme : $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$) ; donc s est une similitude directe.

– L'équation $z = (1 + i)z - 2i$ a pour unique solution : 2.

– De plus : $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On en déduit que s est la similitude directe de centre $\Omega \left(\frac{2}{0} \right)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

M

Pour déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe s d'écriture complexe $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}, b \in \mathbb{C}$), on peut procéder de la façon suivante :

- résoudre l'équation $z = az + b$; on obtient le centre de s ;
- calculer le module de a ; on obtient le rapport de s ;
- déterminer un argument de a ; on obtient l'angle de s .

Composée de similitudes directes du plan

Propriétés

Soit s une similitude directe de rapport k et d'angle α , s' une similitude directe de rapport k' et d'angle α' .

- La composée $s' \circ s$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.
- La réciproque de s est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.

L'ensemble des similitudes directes du plan est donc un groupe de transformations.

Démonstration

Soit s la similitude directe d'écriture complexe : $z' = ke^{i\alpha} z + b$;

s' la similitude directe d'écriture complexe : $z' = k' e^{i\alpha'} z + b'$.

- L'écriture complexe de $s' \circ s$ est : $z' = kk' e^{i(\alpha + \alpha')} z + (k' e^{i\alpha'} b + b')$;
donc $s' \circ s$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.

- L'écriture complexe de s^{-1} est : $z' = \frac{1}{k} e^{-i\alpha} z - \frac{1}{k} e^{-i\alpha} b$;

donc s^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.

Exemples

- La composée des similitudes directes d'écritures complexes $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2i$ et $z' = 3e^{i\frac{\pi}{6}} z - 5$ est une similitude directe de rapport 6 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- La composée des similitudes directes d'écritures complexes $z' = (1 + i)z + 2i$ et $z' = \frac{1}{2}(1 - i)z - 5$ est une translation.

- La réciproque de la similitude directe d'écriture complexe $z' = (1 + i)z - 2i$ est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

1.2. Propriétés géométriques

Propriété caractéristique d'une similitude directe

Propriété 1

Soit f une application du plan dans lui-même, k un nombre réel strictement positif et α un nombre réel.

f est une similitude directe de rapport k et d'angle α si et seulement si, pour tous points distincts M et N d'images respectives M' et N' par f , on a : $M'N' = k MN$ et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \hat{\alpha}$.

Démonstration

• Soit f une similitude directe de rapport k et d'angle α .

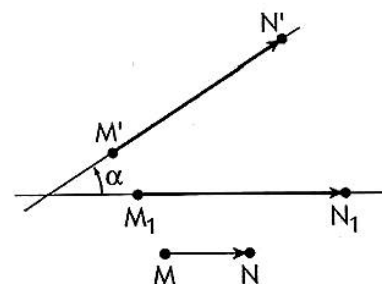
Il existe une homothétie h de rapport k ($k > 0$) et une rotation r d'angle α telles que : $f = r \circ h$.

Soit M et N deux points distincts, M_1 et N_1 leurs images respectives par h , M' et N' les images respectives de M_1 et N_1 par r .

$$\text{On a : } \overrightarrow{M_1N_1} = k \overrightarrow{MN} \quad (k > 0) \quad \text{et} \quad \begin{cases} M'N' = M_1N_1 \\ (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \hat{\alpha} \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} M_1N_1 = k MN \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}) = \hat{0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} M'N' = M_1N_1 \\ (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \hat{\alpha} \end{cases}$$

On en déduit que : $M'N' = k MN$ et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \hat{\alpha}$.



• Réciproquement, soit f une application du plan dans lui-même telle que pour tous points distincts M et N d'images respectives M' et N' par f , on a : $M'N' = k MN$ et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \hat{\alpha}$.

Désignons par s une similitude directe de rapport k et d'angle α , par M'' et N'' les images respectives de M' et N' par s^{-1} .

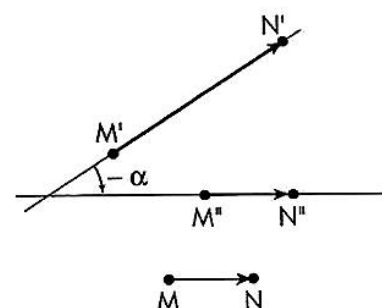
$$\text{On a : } \begin{cases} M''N'' = \frac{1}{k} M'N' \\ (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M''N''}) = -\hat{\alpha} \end{cases} ; \text{ donc : } \begin{cases} M''N'' = MN \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M''N''}) = \hat{0} \end{cases}$$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{MN}$.

Donc : $s^{-1} \circ f$ est une translation t .

Or : $s^{-1} \circ f = t \Leftrightarrow f = s \circ t$.

On en déduit que f est une similitude directe de rapport k et d'angle α .



Similitudes et configurations

Toute similitude directe est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.

Les propriétés résumées dans le tableau ci-dessous se déduisent des propriétés de ces transformations.

Toute similitude directe de rapport k		
conserve	multiplie	transforme
– l'alignement – le parallélisme – l'orthogonalité – les angles orientés – les barycentres – le contact	– les longueurs par k – les aires par k^2	– les droites en droites – les demi-droites en demi-droites – les segments en segments – les cercles en cercles

1.3. Exemples d'études de similitudes directes

Similitude directe déterminée par son écriture complexe

Soit s l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $z' = 3iz - 1 - 7i$.

1. a) Justifier que s est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques.
- b) Déterminer l'expression analytique de s .
2. Déterminer une équation de l'image par s de la droite (BC) , B et C étant les points d'affixes respectives 2 et $3 - i$.
3. Déterminer une équation de $(\mathcal{C}')$, image par s du cercle $(\mathcal{C})$ d'équation : $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

Solution

1. a) L'écriture complexe de s est de la forme : $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$) ; donc, s est une similitude directe.

- L'équation $z = 3iz - 1 - 7i$ a pour unique solution : $2 - i$.
- De plus : $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Donc, s est la similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{2}{-1}\right)$, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point du plan et $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ son image par s .

$$\begin{aligned} \text{On a : } M' = s(M) &\Leftrightarrow z' = 3iz - 1 - 7i \\ &\Leftrightarrow x' + iy' = 3i(x + iy) - 1 - 7i \\ &\Leftrightarrow x' + iy' = -3y - 1 + i(3x - 7). \end{aligned}$$

$$\text{Donc, l'expression analytique de } s \text{ est : } \begin{cases} x' = -3y - 1 \\ y' = 3x - 7 \end{cases}.$$

2. L'image d'une droite par une similitude directe est une droite.

B et C ont respectivement pour images par s les points $B'\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $C'\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Donc, (BC) a pour image par s la droite d'équation : $y = x$.

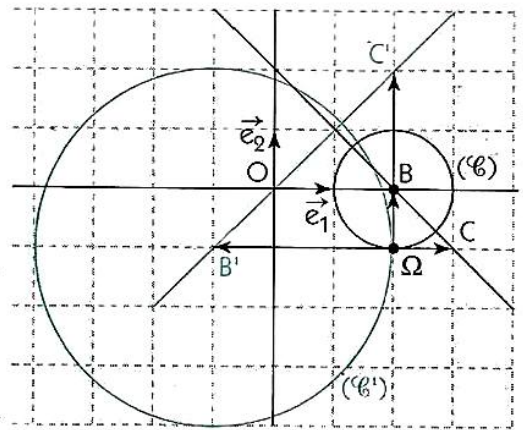
3. Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point du plan et $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ son image par s .

$$\text{On a : } \begin{cases} x' = -3y - 1 \\ y' = 3x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y' + 7}{3} \\ y = -\frac{x' + 1}{3} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } M' \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow M \in (\mathcal{C}) \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{y' + 7}{3} - 2\right)^2 + \left(-\frac{x' + 1}{3}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x' + 1)^2 + (y' + 1)^2 = 9. \end{aligned}$$

On en déduit que l'image de $(\mathcal{C})$ par s est le cercle $(\mathcal{C}')$ d'équation : $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

On peut également remarquer que $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre B et de rayon 1 ; donc $(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre B' et de rayon 3 .



Similitude directe déterminée par son expression analytique

Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}.$$

1. Déterminer l'écriture complexe de f .
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
3. Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et l'écriture complexe de f^{-1} .

Solution

$$\begin{aligned}
 1. \text{ On a : } z' &= x' + iy' = (x + y + 2) + i(-x + y - 1) \\
 &= x(1 - i) + y(1 + i) + 2 - i \\
 &= \frac{z + \bar{z}}{2} (1 - i) + \frac{z - \bar{z}}{2i} (1 + i) + 2 - i \\
 &= \left(\frac{1 - i}{2} + \frac{1 + i}{2i} \right) z + \left(\frac{1 - i}{2} - \frac{1 + i}{2i} \right) \bar{z} + 2 - i.
 \end{aligned}$$

On en déduit l'écriture complexe de f : $z' = (1 - i)z + 2 - i$.

2. L'écriture complexe de f est de la forme : $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$) ; donc, f est une similitude directe.

• L'équation $z = (1 - i)z + 2 - i$ a pour unique solution : $-1 - 2i$.

• De plus : $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Donc, f est la similitude directe de centre $\Omega\left(-1, -2\right)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

3. f^{-1} est la similitude directe de centre $\Omega\left(1, -2\right)$, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Donc, l'écriture complexe de f^{-1} est : $z' - (1 - 2i) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} [z - (1 - 2i)]$.

C'est-à-dire : $z' = \frac{1}{2} (1 + i)z - \frac{1}{2} (1 + 3i)$.

M

Pour déterminer l'écriture complexe d'une application du plan dans lui-même d'expression analytique donnée, on peut procéder de la façon suivante :

- écrire $z' = x' + iy'$ et remplacer x' et y' en fonction de x et y ;
- remplacer x par $\frac{z + \bar{z}}{2}$, y par $\frac{z - \bar{z}}{2i}$ et développer l'expression obtenue en fonction de z et $\bar{z}$.

Exercices

1.a Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application du plan dans lui-même, qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .

a) $z' = (\sqrt{3} + i)z$ b) $z' = (\sqrt{3} - i)z + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

c) $z' = -2z + i$ d) $z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4} z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

1.b Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle α .

a) $\Omega = O$, $k = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$

b) $\Omega\left(1, 0\right)$, $k = \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$

c) $\Omega\left(2, -1\right)$, $k = 1$ et $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

d) $\Omega\left(-1, 1\right)$, $k = 3$ et $\alpha = 0$.

1.c Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe, puis la nature et les éléments caractéristiques des transformations $s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$.

a) $s_1 : z' = 2iz + 1 - 2i$ et $s_2 : z' = \frac{1}{2}iz + 1 - \frac{1}{2}i$

b) $s_1 : z' = (1 - i)z + 1 + i$ et $s_2 : z' = -2z$.

1.d Soit ABCD un carré de sens direct et de centre I , E le milieu du segment $[AB]$ et F le symétrique de I par rapport à la droite (CD) .

1. Déterminer les images de A , B , I et E par la similitude directe s_1 de centre A , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. Déterminer l'image du carré ICFD par la similitude directe s_2 de centre D , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

1.e Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$.

1. Déterminer l'écriture complexe de f .
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

1.f Soit s l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe :

$$z' = (i - \sqrt{3})z + 3 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} + 1).$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s .

2. Déterminer l'expression analytique de s .

3. Déterminer l'image par s de la droite de repère $(A, \vec{u})$, où $A\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ et $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$.

2 Similitudes directes et problèmes de géométrie

2.1. Déterminations d'une similitude directe du plan

Similitude directe définie par son centre, son rapport et son angle

Propriété

Soit s la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle α .

Pour tous points M et M' du plan, distincts de Ω , on a : $M' = s(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \hat{\alpha} \end{cases}$

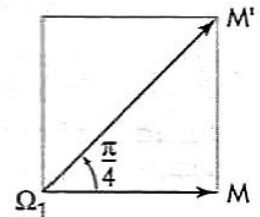
Cette propriété se déduit de la propriété caractéristique d'une similitude.

Exemples

- Soit s_1 la similitude directe de centre Ω_1 , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

$$\text{On a : } M' = s_1(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega_1 M' = \sqrt{2} \Omega_1 M \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega_1 M}, \overrightarrow{\Omega_1 M'}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

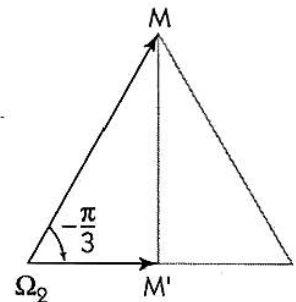
La configuration associée à cette similitude est un « demi-carré ».



- Soit s_2 la similitude directe de centre Ω_2 , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

$$\text{On a : } M' = s_2(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega_2 M' = \frac{1}{2} \Omega_2 M \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega_2 M}, \overrightarrow{\Omega_2 M'}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

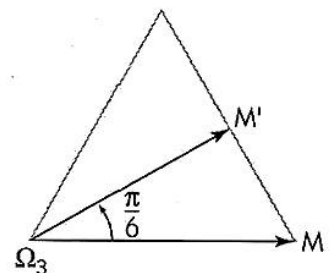
La configuration associée à cette similitude est un « demi-triangle équilatéral ».



- Soit s_3 la similitude directe de centre Ω_3 , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

$$\text{On a : } M' = s_3(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega_3 M' = \frac{\sqrt{3}}{2} \Omega_3 M \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega_3 M}, \overrightarrow{\Omega_3 M'}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

La configuration associée à cette similitude est un « demi-triangle équilatéral ».



Similitude directe définie par son centre, un point et son image

Propriété

Soit Ω , A et A' trois points du plan tels que : $A \neq \Omega$ et $A' \neq \Omega$.

Il existe une unique similitude directe de centre Ω , qui transforme A en A' .

Cette propriété se déduit de la propriété précédente.

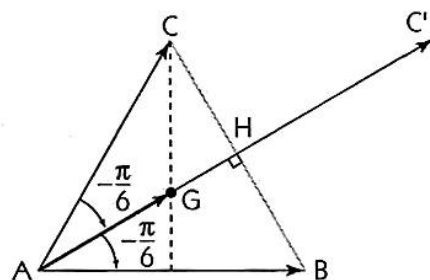
Exemple

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et G son centre de gravité. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre A, qui transforme G en B. Construire l'image C' de C par s .

• Le rapport de s est : $\frac{AB}{AG} = \sqrt{3}$;

son angle est : $\text{Mes}(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{6}$.

• $s(C) = C' \Leftrightarrow \begin{cases} AC' = \sqrt{3} AC \\ \text{Mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$



Désignons par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

On a : $\begin{cases} AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \\ \text{Mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}) = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$; donc : $\overrightarrow{AC'} = 2 \overrightarrow{AH}$.

On en déduit que C' est le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

Similitude directe définie par son rapport, son angle, un point et son image

Propriété

Soit k un nombre réel strictement positif, α un nombre réel, A et A' deux points du plan. Il existe une unique similitude directe de rapport k et d'angle α , qui transforme A en A'.

Démonstration

L'écriture complexe d'une similitude s de rapport k et d'angle α est de la forme : $z' = az + b$, où $a = k e^{i\alpha}$.

Désignons par z_A et $z_{A'}$ les affixes respectives des points A et A'.

On a : $s(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = k e^{i\alpha} z_A + b$
 $\Leftrightarrow b = z_{A'} - k e^{i\alpha} z_A$.

Donc, la similitude directe d'écriture complexe $z' = k e^{i\alpha} (z - z_A) + z_{A'}$ est l'unique similitude répondant à la question.

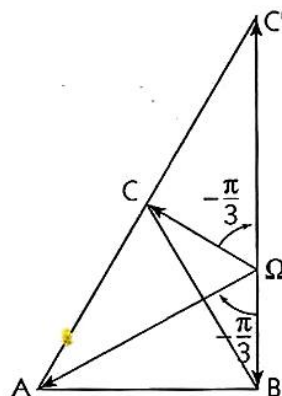
Exemple

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et s la similitude directe de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, qui transforme B en A. Déterminer le centre de cette similitude et construire l'image C' de C par s .

• Le centre Ω de s est tel que : $\begin{cases} \Omega A = 2 \Omega B \\ \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$

Donc, Ω est tel que $\Omega B A$ est un « demi-triangle équilatéral » de sens indirect.

• De même C' est tel que $\Omega C C'$ est un « demi-triangle équilatéral » de sens indirect ; donc, C' est le symétrique de A par rapport à C.



Similitude directe définie par deux points et leurs images

Propriété

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que : $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une unique similitude directe, qui transforme A en A' et B en B'.

Démonstration

Une telle similitude a pour rapport $\frac{A'B'}{AB}$ et pour angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

Donc, d'après la propriété précédente, cette similitude, si elle existe, est unique.

Soit s la similitude directe de rapport $\frac{A'B'}{AB}$ et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, telle que : $s(A) = A'$.

Désignons par B'' l'image de B par s .

On a : $\frac{A'B''}{AB} = \frac{A'B'}{AB}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B''}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$; donc : $A'B'' = A'B'$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'B''}) = \hat{0}$.

On en déduit que $B'' = B'$ et que s est l'unique similitude répondant à la question.

Exemple

Soit $ABCD$ un carré de côté 1 et de sens direct, I le milieu de $[CD]$.

Déterminer la similitude directe s telle que : $s(I) = B$ et $s(D) = C$.

• Méthode géométrique

Le rapport de s est : $\frac{BC}{ID} = 2$; son angle est : $\text{Mes}(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{2}$.

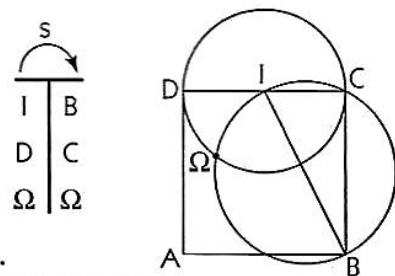
Donc, s est une similitude de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Le centre Ω de s vérifie : $\text{Mes}(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega B}) = \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}) = -\frac{\pi}{2}$.

Donc, Ω appartient aux cercles de diamètres respectifs $[IB]$ et $[DC]$.

Ces deux cercles ont en commun le point C , qui n'est pas invariant par s .

Donc Ω est le point d'intersection, autre que C , des cercles de diamètres $[IB]$ et $[DC]$.



• Méthode algébrique

On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

On a : $z_I = \frac{1}{2} + i$, $z_B = 1$, $z_C = 1 + i$ et $z_D = i$.

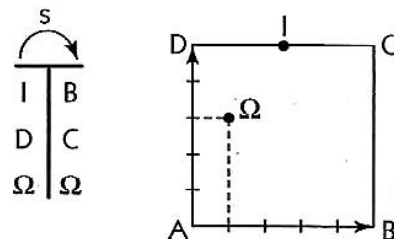
L'écriture complexe de la similitude f est de la forme : $z' = az + b$.

On a : $\begin{cases} s(I) = B \\ s(D) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{1}{2} + i)a + b = 1 \\ ia + b = 1 + i \end{cases}$

Donc : $a = -2i$ et $b = -1 + i$.

L'écriture complexe de s est : $z' = -2iz - 1 + i$.

On en déduit que s est la similitude directe de centre $\Omega(\frac{1+3i}{5})$, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.



Construction du centre de la similitude dans le cas général

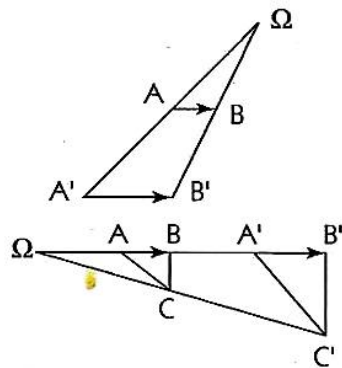
1^{er} cas : les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles

• Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors s est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

• Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, alors s est une homothétie de rapport $\frac{A'B'}{AB}$.

– Lorsque $(AB) \neq (A'B')$, le centre de cette homothétie est le point d'intersection Ω des droites (AA') et (BB') .

– Lorsque $(AB) = (A'B')$, un point C n'appartenant pas à (AB) a pour image le point C' tel que $(A'C') \parallel (AC)$ et $(B'C') \parallel (BC)$; le centre de l'homothétie est le point d'intersection Ω des droites (AA') et (CC') .



2^e cas : les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en I

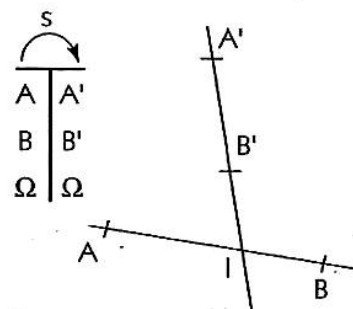
s n'est ni une translation ni une homothétie.

s est la similitude directe de rapport $\frac{A'B'}{AB}$, d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ et de centre son unique point invariant Ω .

On a : $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) = (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

• Si I est différent de chacun des points A, B, A' et B' , alors les points I, A et B , d'une part, et les points I, A' et B' , d'autre part, sont alignés.

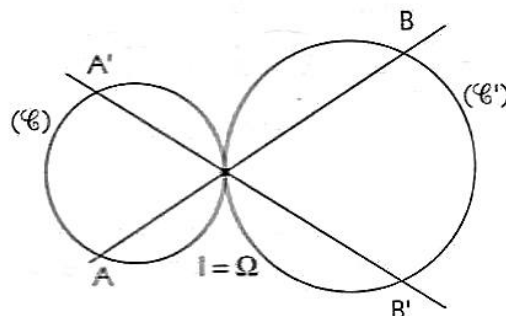
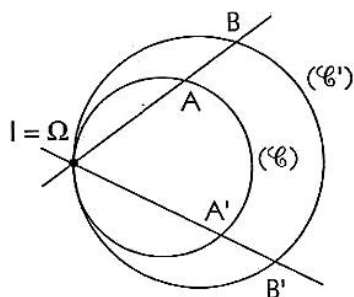
Donc : $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = 2(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}) = 2(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'})$.



On en déduit que : $2(\widehat{\Omega A, \Omega A'}) = 2(\widehat{IA, IA'})$ et $2(\widehat{\Omega B, \Omega B'}) = 2(\widehat{IB, IB'})$.

Donc Ω appartient aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ circonscrits respectivement aux triangles IAA' et IBB' . Ces deux cercles, ayant en commun le point I , sont soit tangents, soit sécants.

- Si $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont tangents en I , alors : $\Omega = I$.
- Si $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont sécants en I et J , alors : $\Omega = J$.



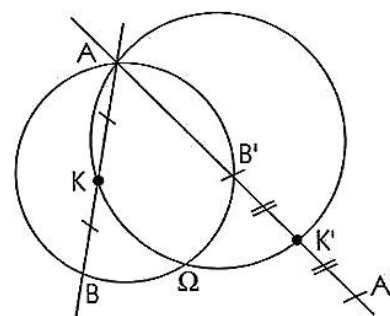
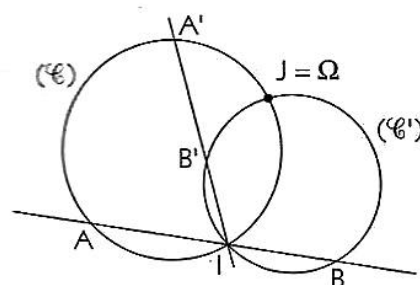
En effet, si Ω était en I , on aurait : $\frac{IA'}{IB'} = \frac{IA}{IB}$;

ce qui signifie qu'il existerait une homothétie h de centre I qui transforme A en B et A' en B' . Ainsi $(\mathcal{C}')$ serait l'image de $(\mathcal{C})$ par h . Autrement dit, I serait aligné avec les centres des cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$. Ce qui est impossible car $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont sécants.

- Si I est l'un des points A, A', B et B' (par exemple $I = A$), on construit le milieu K du segment $[AB]$ et son image K' par s , qui

est le milieu du segment $[A'B']$.

Ainsi, on retrouve la situation précédente avec $(KB) \cap (K'B') = \{A\}$; Ω est le point d'intersection, autre que A , des cercles circonscrits aux triangles AKK' et ABB' .



2.2. Utilisations des similitudes directes

Similitudes directes et recherche de lieux géométriques

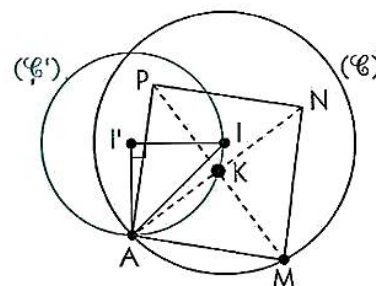
1. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre I et A un point de $(\mathcal{C})$. M étant un point de $(\mathcal{C})$, on désigne par $AMNP$ le carré de sens direct.

Déterminer le lieu du centre K de ce carré lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.

Solution

K est l'image de M par la similitude directe s de centre A , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

M décrit $(\mathcal{C})$; donc, le lieu de K est l'image de $(\mathcal{C})$ par s , c'est-à-dire le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre I' , image par s de I , et qui passe par A .



2. ABCD est un carré de sens direct et de centre I.

Soit M un point de la demi-droite [CB), distinct de B et C. La perpendiculaire en A à (AM) coupe la droite (DC) en P, et Q est le milieu du segment [MP].

Déterminer le lieu de Q lorsque M décrit la demi-droite [CB) privée de B et C.

Solution

• Méthode géométrique

Soit r le quart de tour direct de centre A.

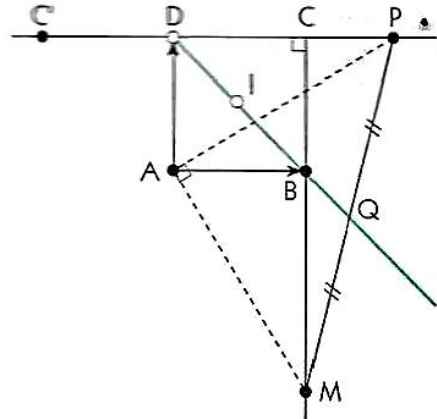
On a : $r(B) = D$ et $r(C) = C'$, où C' est le symétrique de C par rapport à D.

Donc, l'image par r de la demi-droite [CB) est la demi-droite [CD).

On a : $M \in (AM) \cap (BC)$.

Donc : $r(M) \in (AP) \cap (C'D)$;

c'est-à-dire : $r(M) = P$.



On en déduit que le triangle AMP est de sens direct, rectangle et isocèle en A.

Donc, Q est l'image de M par la similitude directe s de centre A,

de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Le lieu de Q est donc l'image par s de $[CB) \setminus \{B; C\}$, c'est-à-dire la demi-droite [DI), privée de I et D.

• Méthode algébrique

On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$.

On a : $z_M = 1 + iy$, où $y \in]-\infty; 1[\setminus \{0\}$.

Le quart de tour direct r de centre A a pour écriture complexe : $z' = iz$;

donc, si on désigne par M' l'image de M par r, on a : $z_{M'} = -y + i$.

On en déduit que : $M' \in (DC)$; donc : $M' = P$.

Q est le milieu de [MP] ; donc : $z_Q = \frac{z_M + z_P}{2} = \frac{-y + 1}{2} + i \frac{y + 1}{2}$.

On en déduit que Q appartient à la demi-droite d'équation $x + y = 1$, $y \in]-\infty; 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$; c'est-à-dire la demi-droite [DI), privée de I et D.

Similitudes directes et problèmes de construction

Soit (Δ_1) et (Δ_2) deux droites disjointes et A un point n'appartenant ni à (Δ_1) , ni à (Δ_2) .

Construire un carré ABCD tel que : $B \in (\Delta_1)$ et $C \in (\Delta_2)$.

Solution

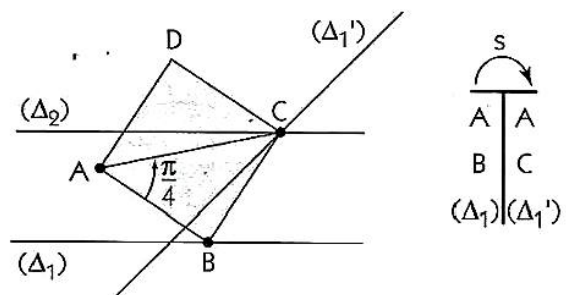
Analyse d'une figure répondant à la question

Soit ABCD un carré de sens direct, tel que :

$B \in (\Delta_1)$ et $C \in (\Delta_2)$.

La configuration du « demi-carré » conduit à considérer la similitude directe s de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

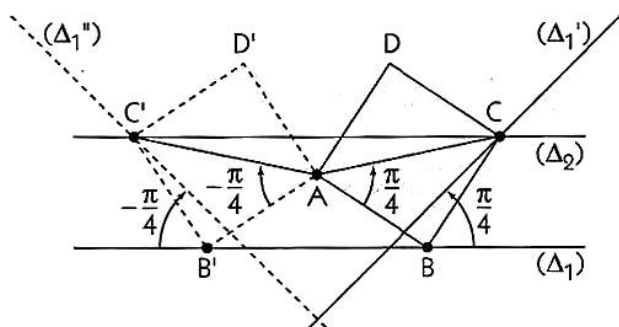
On a : $C \in (\Delta_2) \cap (\Delta_1')$, où $(\Delta_1') = s(\Delta_1)$.



Synthèse : construction d'un carré ABCD

D'après ce qui précède, pour construire un carré ABCD de sens direct répondant à la question, il suffit de suivre les étapes suivantes :

- construire l'image (Δ_1') de (Δ_1) par s , en construisant par exemple les images de deux points de cette droite ; les droites (Δ_2) et (Δ_1') se coupent en un point C ;
- construire l'antécédant de C par s , c'est-à-dire le point B tel que le triangle ABC est de sens direct, rectangle et isocèle en B ;
- construire le point D tel que ABCD soit un carré.



Discussion

On aurait pu choisir le carré ABCD de sens indirect. Deux similitudes sont possibles : s et s' , de même centre, de même rapport et d'angles respectifs $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.

On refait le même schéma de construction avec la similitude s' .

Le problème admet deux solutions, les carrés ABCD et AB'C'D'.

Similitudes directes et démonstration de propriétés

1. Théorème de Ptolémée

ABCD est un quadrilatère convexe.

1°) Soit s la similitude directe de centre B, qui transforme D en C, et E l'image de A par s . Démontrer que les triangles BAD et BEC d'une part, BAE et BDC d'autre part, sont semblables.

2°) Démontrer que : $AB \times CD + AD \times BC \geq AC \times BD$.

3°) Démontrer que le quadrilatère ABCD est inscriptible si et seulement si :

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD.$$

Solution

1°) On a : $s(B) = B$, $s(A) = E$ et $s(D) = C$; les triangles BAD et BEC sont donc semblables.

On a : $\frac{BD}{BA} = \frac{BC}{BE}$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC})$.

La similitude s' de centre B, de rapport $\frac{BD}{BA}$ et d'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$ transforme donc BAE en BDC.

On en déduit que les triangles BAE et BDC sont semblables. (s étant une similitude directe, on dit aussi que ces triangles sont directement semblables.)

2°) On a : $\frac{AE}{AB} = \frac{DC}{DB}$; donc : $AE \times BD = CD \times AB$.

De plus : $\frac{EC}{BC} = \frac{AD}{BD}$; donc : $EC \times BD = AD \times BC$.

On en déduit que : $(AE + EC) \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

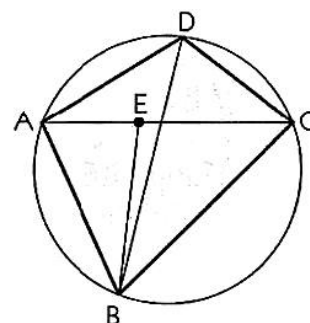
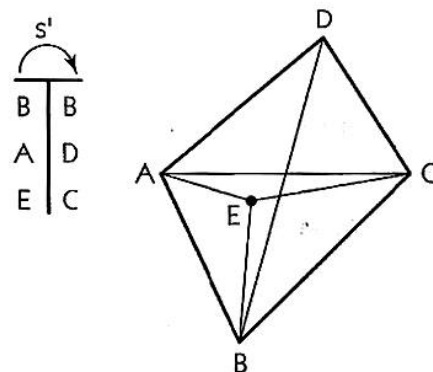
Or : $AE + EC \geq AC$; donc : $AB \times CD + AD \times BC \geq AC \times BD$.

3°) On a : $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD \Leftrightarrow AE + EC = AC$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = \hat{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) &= (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}) \\ &= (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = \hat{\pi} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \hat{\pi} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \hat{\pi} + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \\ &\Leftrightarrow \text{ABCD inscriptible.} \end{aligned}$$



2. Les rectangles d'or

ABCD est un rectangle de sens direct tel que : $BC = k AB$ ($k > 0$).

On construit à l'extérieur de ce rectangle le carré BIJC.

1°) Déterminer le nombre réel k pour que les droites (AC) et (DI) soient perpendiculaires.

Dans la suite du problème, k garde la valeur ainsi trouvée.

2°) On désigne par Ω le point d'intersection des droites (AC) et (DI).

Démontrer qu'il existe une similitude directe s de centre Ω telle que les points A, B, C et D ont pour images respectives par s les points I, J, D et A.

3°) On désigne par I' le point d'intersection de (AC) et (IJ), et J' le point tel que $I'J'AI$ soit un rectangle.

a) Démontrer que $I'J'AI$ est l'image par s du rectangle IJD'A.

b) Démontrer que $I'J'DJ$ est un carré.

Solution

1°) Considérons les triangles rectangles ABC et IJD.

On a : $(AB) \perp (IJ)$ et $(BC) \perp (JD)$.

Donc, les droites (AC) et (DI) sont perpendiculaires si et seulement si les triangles ABC et IJD sont semblables.

$$\text{C'est-à-dire : } \frac{AB}{BC} = \frac{IJ}{JD} \Leftrightarrow \frac{AB}{kAB} = \frac{kAB}{(k+1)AB}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - k - 1 = 0.$$

$$\text{On en déduit que : } k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

2°) Soit s la similitude directe de centre Ω , telle que $s(A) = I$.

Les triangles DAI et ΩAI sont semblables ; donc : $\frac{\Omega I}{\Omega A} = \frac{AI}{AD} = \frac{k+1}{k} = k$.

De plus, on a : $\text{Mes}(\widehat{\Omega A, \Omega I}) = \frac{\pi}{2}$.

Donc, s est la similitude de centre Ω , de rapport $k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminons l'image de B par s .

On a : $(IJ) \perp (AB)$ et $s(A) = I$; donc, l'image par s de la droite (AB) est la droite (IJ).

De plus : $\text{Mes}(\widehat{AB, IJ}) = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{IJ}{AB} = k$; donc : $s(B) = J$.

On démontre de même que : $s(C) = D$ et $s(D) = A$.

3°) a) Les triangles $\Omega I I'$ et $\Omega A I$ sont semblables ; donc : $\frac{\Omega I'}{\Omega I} = \frac{\Omega I}{\Omega A} = k$.

De plus : $\text{Mes}(\widehat{\Omega I, \Omega I'}) = \frac{\pi}{2}$.

Donc : $s(I) = I'$.

Une démonstration analogue à celle utilisée dans la question 2°) permet de démontrer que : $s(J) = J'$.

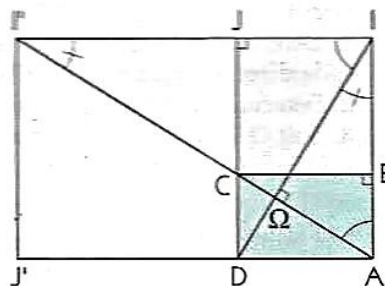
Donc, $I'J'AI$ est l'image par s du rectangle IJD'A.

b) Les points I, J, C, B ont pour images respectives par s les points I' , J' , D, J et IJCB est un carré.

On en déduit que $I'J'DJ$ est un carré.

Les rectangles ABCD, IJDA et $I'J'AI$ sont appelés « rectangles d'or ».

On remarque que si on « ajoute » un carré à un rectangle d'or, on obtient un nouveau rectangle d'or.



Exercices

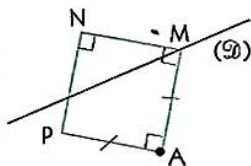
2.a ABC est un triangle de sens direct, rectangle et isocèle en C.
Construire l'image de B par la similitude directe de centre A, qui transforme C en B.

2.b ABCD est un rectangle de sens indirect.
Construire son image par la similitude directe de centre A, qui transforme D en C.

2.c ABC est un triangle de sens direct, rectangle et isocèle en A ; A' est le symétrique de A par rapport à C.
1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que : $s(A') = C$ et $s(C) = B$.
2. Déterminer l'image par s de la droite (AC).
3. Soit Ω le centre de s . Démontrer que ΩCB est un triangle rectangle et isocèle ; construire Ω .

2.d Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives $2, -2i, -2$ et $2i$. Déterminer la forme réduite de la similitude directe s telle que :
 $s(B) = C$ et $s(C) = D$.

2.e Soit $(\mathcal{D})$ une droite et A un point du plan.
M étant un point de $(\mathcal{D})$, on désigne par AMNP le carré de sens direct.
Déterminer les lieux géométriques des points N et P, lorsque M décrit $(\mathcal{D})$.



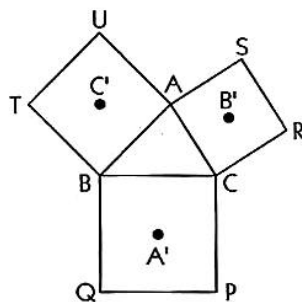
2.f Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre [AB]. M étant un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B, on désigne par N et P les points d'intersection de la droite (BM) et du cercle de centre M passant par A.
Déterminer les lieux géométriques des points N et P, lorsque M décrit $(\mathcal{C})$ privé de A et B.

2.g ABC est un triangle de sens direct. On construit extérieurement aux côtés de ce triangle les carrés BCPQ, ACRS et ABTU, de centres respectifs A', B' et C'.
Soit s_B la similitude directe de centre B, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et s_A la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. a) Déterminer les images par $s_A \circ s_B$ des points A et A'.

b) En déduire que les segments [AA'] et [B'C'] sont isométriques et perpendiculaires.

2. Déterminer deux autres couples de segments isométriques et perpendiculaires.



Exercices

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

APPRENTISSAGE

Similitudes directes du plan

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe donnée.

a) $z' = iz + 1$ b) $z' = (1 - i)z + 1$

c) $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)z + 2i$ d) $z' = -z + 2i$

e) $z' = z + 3 - i$ f) $z' = -\sqrt{3}z$.

2 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle α .

a) $\Omega(1 + i)$, $k = 2$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

b) $\Omega(-3)$, $k = \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$

c) $\Omega(i)$, $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$

d) $\Omega(-2 + \frac{i}{2})$, $k = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

e) $\Omega(1 - i)$, $k = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s définie par :

$$s(A) = A' \text{ et } s(B) = B'.$$

a) $A(3 + 2i)$, $A'(3)$, $B(1)$ et $B'(i)$

b) $A(2 + i)$, $A'(3 + 2i)$, $B(2)$ et $B'(3i)$.

4 Soit s la similitude directe d'écriture complexe :
 $z' = 3iz - 9 - 3i$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s .

2. Déterminer l'image par s :

a) du cercle de centre $K(1 - 3i)$ et de rayon 1 ;

b) de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $x = 1$.

5 A, B et C sont trois points du plan d'images respectives A', B' et C' par une similitude directe de rapport k . Démontrer que : $\vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'} = k^2 \vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

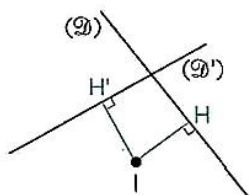
(On pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'égalité :

$$\vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'} = \frac{1}{2} (A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2).)$$

6 Une similitude s laisse invariant le point I et transforme la droite $(\mathcal{D})$ en la droite $(\mathcal{D}')$.

Soit H et H' les projetés orthogonaux de I sur $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Démontrer que : $H' = s(H)$.



7 Soit A, B et C les points d'affixes respectives :
1, $1 + i$ et $2 + 2i$.

1. Déterminer l'affixe du barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -2 et 1.
2. Démontrer que la similitude directe s , qui transforme A en B et B en C, a pour centre le point G.
3. Déterminer l'angle et le rapport de s .

8 Une similitude directe de centre Ω transforme un point A en un point A' et un point B en un point B'. Démontrer qu'il existe une similitude directe de centre Ω qui transforme A en B et A' en B'.

9 Soit ABCD un losange de sens direct, de centre I et tel que $\text{Mes}(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

On considère la similitude directe s_C de centre C, qui transforme A en B.

1. Démontrer que l'image I' du point I par s_C est le milieu du segment [BC].

2. a) Démontrer que l'image D' du point D par s_C appartient à la droite (AC) et que les droites (D'I) et (BC) sont perpendiculaires.

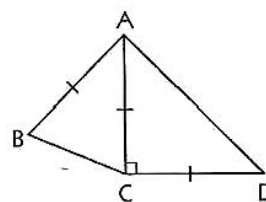
b) En déduire une construction du point D'.

10 Sur la figure ci-contre, ABC et CAD sont deux triangles isocèles tels que :

$$AB = AC = CD,$$

$$\text{Mes}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{Mes}(\vec{CD}, \vec{CA}) = \frac{\pi}{2}.$$



1. Soit r_A la rotation de centre A qui transforme B en C, r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose : $f = r_C \circ r_A$.

a) Déterminer les images par f de A et B.

b) Démontrer que f est une rotation, dont on précisera le centre Ω et l'angle.

2. Soit s la similitude directe de centre Ω , qui transforme A en B. On note C' l'image de C par s , H le milieu du segment [BC] et H' son image par s .

a) Déterminer l'angle de s .

b) Démontrer que C' appartient à la droite (ΩA) .

c) Démontrer que H' est le milieu du segment $[\Omega B]$.

d) Démontrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à (ΩB) .

En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle ΩBC .

Similitudes directes et problèmes de géométrie

11 Soit s la similitude directe d'écriture complexe :
 $z' = (1 + i)z - i$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s .

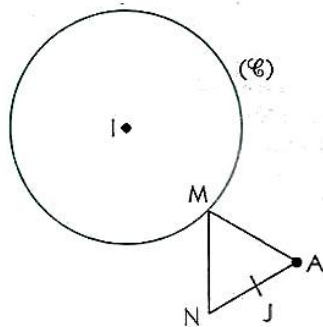
2. On désigne par A le centre de s .

Soit M un point distinct de A, d'image M' par s .

Quelle est la nature du triangle AMM' ?

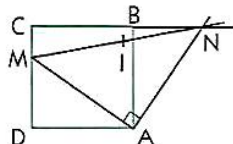
3. Déterminer le lieu géométrique de M' lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

12 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre I et A un point du plan. M étant un point de $(\mathcal{C})$, on désigne par AMN le triangle équilatéral de sens direct. Déterminer le lieu géométrique du milieu J du segment $[AN]$, lorsque M décrit $(\mathcal{C})$.



13 Soit $(\mathcal{D})$ une droite et A un point n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$. M étant un point de $(\mathcal{D})$, on désigne par N le point de $(\mathcal{D})$ tel que $\widehat{MAN} = \frac{\pi}{6}$, par H_M et H_N les pieds des hauteurs issues de M et N dans le triangle AMN . Déterminer les lieux géométriques des points H_M et H_N , lorsque M décrit $(\mathcal{D})$.

14 Soit $ABCD$ un carré. M étant un point de la droite (DC) , la perpendiculaire en A à la droite (AM) coupe la droite (BC) en N .



1. Démontrer que AMN est un triangle rectangle isocèle.
2. Déterminer le lieu géométrique du milieu I du segment $[MN]$, lorsque M décrit (DC) .

15 Soit M un point d'un demi-cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$. La droite (MB) coupe en I la perpendiculaire issue de A à la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$. Déterminer et construire le lieu géométrique du point I , lorsque M décrit $(\mathcal{C})$.

16 Soit s la similitude directe d'écriture complexe :
$$z' = (1 - i)z + 2 - i.$$

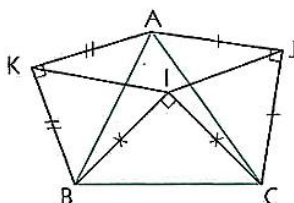
1. Déterminer les éléments caractéristiques de s .
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|(1 - i)z + 2 - i| = 4$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente par une méthode algébrique.

17 Soit s la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}.$$

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s .
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|(1 + i\sqrt{3})z + \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}| = 1$.

18 ABC est un triangle de sens direct. I , J et K sont les points tels que les triangles IBC , JAC et KBA sont de sens direct, rectangles et isocèles.



1. Déterminer :
a) l'angle et le rapport de la similitude directe s_1 de centre A , qui transforme C en J .
b) l'angle et le rapport de la similitude directe s_2 , qui transforme A en K et C en I .
2. En déduire que IJK est un parallélogramme.

19 ABC un triangle de sens direct, A' , B' et C' les points extérieurs à ce triangle tels que $A'BC$, $B'AC$ et $C'AB$ sont des triangles équilatéraux. I , J et K sont les centres de gravité respectifs des triangles $A'BC$, $B'AC$ et $C'AB$.

1. a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s_A de centre A , qui transforme J en C .
b) Déterminer l'image de K par s_A .
2. a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s_B de centre B , qui transforme C en I .
b) Déterminer l'image de C' par s_B .
3. Démontrer que $s_B \circ s_A$ est une rotation, dont on précisera le centre et l'angle.
4. En déduire que le triangle IJK est équilatéral.

20 $ABCD$ et $AEFG$ sont des carrés de sens direct.

Le but de cet exercice est de démontrer que les droites (BE) , (CF) et (DG) sont concourantes.

1. En utilisant la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, démontrer que les droites (BE) et (DG) sont perpendiculaires et que $BE = DG$.

2. On désigne par I le point d'intersection de (BE) et (DG) , H le projeté orthogonal de A sur (BE) et K le projeté orthogonal de A sur (DG) .

a) Démontrer que : $r(H) = K$.

b) En déduire que $AHIK$ est un carré.

3. Soit f la similitude directe de centre A qui transforme B en C .

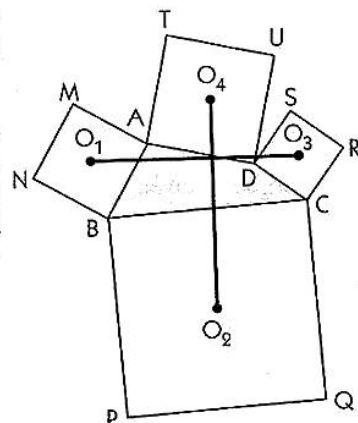
a) Déterminer le rapport et l'angle de cette similitude.

b) Déterminer $f(E)$ et $f(H)$.

c) Conclure.

21 $ABCD$ est un quadrilatère convexe de sens direct.

On construit extérieurement aux côtés de ce quadrilatère les carrés $AMNB$, $BPQC$, $CRSD$ et $DUTA$, de centres respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4 .



1. Soit s_D la similitude directe de centre D , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, s_B la similitude directe de centre B , de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Démontrer que l'image par $s_B \circ s_D$ de O_3 est O_2 .

2. Soit s'_B la similitude directe de centre B , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, s'_D la similitude directe de centre D , de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Démontrer que l'image par $s'_D \circ s'_B$ de O_1 est O_4 .

3. a) Démontrer que : $s_B \circ s_D = s'_D \circ s'_B$.

b) En déduire que les segments $[O_1O_3]$ et $[O_2O_4]$ sont isométriques et perpendiculaires.

22 Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = -\frac{\pi}{3}$ et $AC = 2AB$, $(\mathcal{D})$ une droite ne passant par A .

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A , qui transforme B en C .

2. Déterminer et construire un point M de $(\mathcal{D})$ tel que : $s(M) \in (\mathcal{D})$.

APPROFONDISSEMENT

23 Deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, de centres I et I', de rayons r et r' , sont sécants en deux points A et B.

1. Démontrer qu'il existe une similitude directe s de centre A qui transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$; préciser son angle et son rapport.

2. Soit B' l'image de B par s .

a) Démontrer que la droite (BB') est tangente à $(\mathcal{C})$.

b) En déduire une construction du point B'.

3. Soit M un point de $(\mathcal{C})$, distinct de A et B, et M' son image par s . Démontrer que les points B, M et M' sont alignés.

24 ABA' est un triangle équilatéral de sens direct

et B' le point tel que : $\vec{A'B'} = 2\vec{AA'}$. Soit s la similitude directe qui transforme A en A' et B en B'.

1. Déterminer le rapport et l'angle de s .

2. Soit Ω le centre de s . Exprimer ΩA et $\Omega A'$ en fonction de AA' .

3. Démontrer que le triangle $\Omega AA'$ est rectangle en A, puis placer Ω .

4. Soit A'' l'image de A' par s .

Démontrer que $\text{Mes}(\vec{A'B'}, \vec{A'A''}) = \frac{\pi}{3}$ et que le triangle A'B'A'' est équilatéral, puis placer A''.

25 ABC est un triangle de sens direct, isocèle et rectangle en A. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

On désigne par (Γ_A) , (Γ_B) et (Γ_C) les cercles de diamètres respectifs [AI], [BI] et [CI].

1. Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer les images de (Γ_A) et (Γ_C) par r .

2. Pour tout point M de (Γ_A) distinct de I, J et K, on note N le point où la droite (MK) recoupe (Γ_B) et P le point où la droite (MJ) recoupe (Γ_C) .

a) Déterminer le centre de la similitude directe s_M qui transforme A en M et B en N.

b) Déterminer le centre de la similitude directe s'_M qui transforme A en M et C en P.

c) Comparer s_M et s'_M ; en déduire que les points N, I et P sont alignés.

3. Dans cette question, le point M de (Γ_A) est choisi de

sorte que $\text{Mes}(\vec{IA}, \vec{IM}) = -\frac{\pi}{6}$.

Démontrer qu'il existe une similitude directe qui transforme le triangle ABC en le triangle MNP; préciser ses éléments caractéristiques.

26 A est un point du plan. On considère la transformation f qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que :

• si $M = A$, alors $M' = A$;

• si $M \neq A$, alors M' est le centre de gravité du triangle AMB de sens direct, rectangle et isocèle en M.

1. Démontrer que, si M est distinct de A, alors :

$$\cos(\vec{AM}, \vec{AM'}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin(\vec{AM}, \vec{AM'}) = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } \frac{AM'}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .

27 ABC est un triangle de sens direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles ABP, BCQ et CAR, rectangles et isocèles respectivement en P, Q et R.

1. a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s_B de centre B, qui transforme P en A.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s_C de centre C, qui transforme A en R.

2. Démontrer que la transformation $s_C \circ s_B$ est une rotation, dont on précisera l'angle.

3. On désigne par I le milieu de [BC].

a) Démontrer que I est le centre de $s_C \circ s_B$.

b) En déduire la nature du triangle IPR.

28 ABCD et DEFG

sont des carrés de sens direct tels que E est le milieu de [CD].

1. Soit s la similitude directe de centre D qui transforme A en B.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de s .

b) Déterminer l'image de E par s et la mesure principale de l'angle $(\vec{AE}, \vec{BF})$.

2. On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre [BD] et par K le point d'intersection des droites (AE) et (BF).

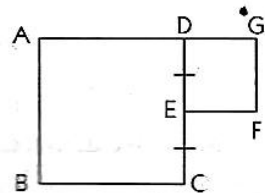
a) Démontrer que K appartient à $(\mathcal{C})$.

b) En déduire que (KD) et (BF) sont perpendiculaires.

3. On désigne par $(\mathcal{C}')$ le cercle de diamètre [DF].

a) Démontrer que K appartient à $(\mathcal{C}')$.

b) En déduire que les points C, G et K sont alignés.



29 ABCD est un carré de sens direct et de centre I. Soit P un point de la droite (BC), distinct de B. Les droites (AP) et (CD) se coupent en Q. La droite perpendiculaire à (AP) passant par A, coupe (BC) en R et (CD) en T.

1. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'image de (BC) par r .

b) En déduire les images par r des points P et R.

2. On désigne par N et M les milieux respectifs des segments [PT] et [QR], par s la similitude directe de centre A,

de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer les images par s des points B, R et P.

b) Déterminer le lieu géométrique du point N lorsque P décrit (BC) privée de B.

c) En déduire que les points M, N, B, D et I sont alignés.

30 ABCD est un carré de sens direct et de centre I. On désigne par J le milieu du segment [AI] et par s la similitude directe, qui transforme A en I et B en J.

1. Déterminer le rapport et l'angle de s .

2. Construire $s(C)$ et $s(D)$.

3. Démontrer que le centre Ω de s appartient au cercle de diamètre [AD] et au cercle circonscrit au triangle ABJ. Construire Ω avec précision.

31 On donne deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de centres respectifs I et I', de rayons différents r et r' .

1. Démontrer que l'ensemble des centres des similitudes directes, qui transforment $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$, est un cercle (Γ) que l'on déterminera.

2. On suppose que : $r' = 2r$ et $I'I = 3$.

Soit A et B les points tels que : $\frac{1}{3}\vec{IA} = \vec{I'I}$ et $\vec{IB} = -\vec{I'I}$.

a) Démontrer que : $A \in (\Gamma)$ et $B \in (\Gamma)$.

- b) En déduire le tracé de (Γ) .
 c) Soit K le point de contact de la tangente à (Γ) issue de I' , tel que KI' est de sens direct.
 Déterminer l'angle de la similitude directe de centre K , qui transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$.

32 Soit s la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = (1 + i)z + 2.$$

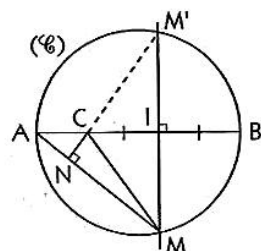
- Déterminer les éléments caractéristiques de s .
- Soit Ω le centre de s . Quelle est la nature du triangle $MO\Omega$, où M' est l'image de M par s ?
- Donner un programme de construction de M' .
- Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C}_1)$ des points M tels que : $OM = OM'$.
- Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C}_2)$ des points M tels que : $\vec{OM} \cdot \vec{OM'} = 0$.

33 AI' est un triangle de sens direct, isocèle et rectangle en A . Les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ passant par A , de centres respectifs I et I' , se recoupent en un point B . On associe à un point M de $(\mathcal{C})$ le point M' de $(\mathcal{C}')$ tel que :

$$\text{Mes}(\vec{IM}, \vec{I'M'}) = -\frac{\pi}{2}.$$

- Démontrer qu'il existe une unique rotation r transformant I en I' et M en M' .
 Déterminer le centre et l'angle de cette rotation.
- Le point M étant distinct de B , la droite (BM) recoupe $(\mathcal{C}')$ en N' et la droite (BM') recoupe $(\mathcal{C})$ en N .
 Démontrer que N' est l'image de N par r .
- On construit les carrés $MBM'P$ et $NBN'Q$.
 Démontrer que P est l'image de M par la similitude directe s de centre B , qui transforme N en Q .
- Déterminer les lieux géométriques des points P et Q , lorsque M décrit $(\mathcal{C})$.

34 Sur la figure ci-contre, $[AB]$ est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$, C est un point de $[AB]$ et I est le milieu de $[BC]$. La médiatrice de $[BC]$ coupe $(\mathcal{C})$ en M et M' , tel que AMM' est de sens direct. Enfin, N est le projeté orthogonal de C sur (AM) .



- Démontrer que N , C et M' sont alignés.
- Soit s la similitude directe de centre N , qui transforme M en C .
 a) Déterminer l'angle de cette similitude.
 b) Déterminer les images par s des droites (MI) et (NC) .
 c) En déduire l'image de M' par s .
- Soit I' le milieu de $[AC]$.
 a) Démontrer que I' est l'image de I par s .
 b) En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[AC]$.

35 On considère deux segments $[AC]$ et $[BD]$ de même longueur, de milieux respectifs M et N tels que :

$$\text{Mes}(\vec{AC}, \vec{BD}) = \frac{\pi}{2}.$$

- Déterminer toutes les isométries transformant $[AC]$ en $[BD]$.
- Soit r_1 la rotation de centre I , qui transforme A en D et C en B . Soit r_2 la rotation de centre J , qui transforme A en B et C en D .
 a) Quelle est la nature du quadrilatère $IMJN$?

b) Donner un programme de construction de I et J , ne faisant intervenir que les points M et N .

3. Soit P le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre $[AD]$ et s la similitude directe de centre I qui transforme A en P .

a) Déterminer les éléments caractéristiques de s et sa forme réduite.

b) Trouver l'image de la droite (AC) par s .

4. Les points M et N restent fixes et distincts. Les points A , B , C et D varient dans le plan de telle sorte que les segments $[AC]$ et $[BD]$ gardent une longueur constante ℓ et

$$\text{Mes}(\vec{AC}, \vec{BD}) = \frac{\pi}{2}.$$

On pose : $R = s(C)$. Déterminer l'ensemble décrit par les points P et R .

36 $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre I , tel que le triangle IAB est de sens direct. Soit J le milieu du segment $[AI]$.

1. On note s_1 la similitude directe de centre B , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer l'image de E par s_1 .

b) Déterminer l'antécédent de J par s_1 .

2. On note s_2 la similitude directe de centre J qui transforme A en F . Déterminer le rapport et l'angle de s_2 .

3. On note s la similitude directe qui transforme E en F et D en J .

a) Comparer s et $s_2 \circ s_1$.

b) En déduire le rapport et l'angle de s .

c) Construire le centre Ω de s , en énumérant les différentes étapes de cette construction.

37 Soit r un nombre réel strictement positif, u le nombre complexe de module r et d'argument $-\frac{3\pi}{4}$.

1. On considère la suite (A_n) de points définie par :

- $A_0 = O$,
- l'axe de A_1 est i ,
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1} , de rapport r et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

On désigne par z_n l'axe de A_n .

a) Écrire, pour tout entier naturel n non nul et distinct de 1, une relation entre z_n , z_{n-1} et z_{n-2} .

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1} i.$$

2. a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s , qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2 .

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = s(A_n)$.

38 $ABCD$ est un carré de sens direct et de centre I . Soit M un point de la droite (DC) , N le point d'intersection de la droite (BC) et de la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A , J le milieu du segment $[MN]$.

1. On considère la rotation r de centre A telle que : $B = r(D)$.

a) Démontrer que : $N = r(M)$.

b) En déduire la nature du triangle AMN .

2. On considère la similitude directe s de centre A telle que : $I = s(D)$.

a) Déterminer l'image de C par s .

b) Démontrer que : $J = s(M)$.

c) En déduire le lieu géométrique des points J , lorsque M décrit (DC) .

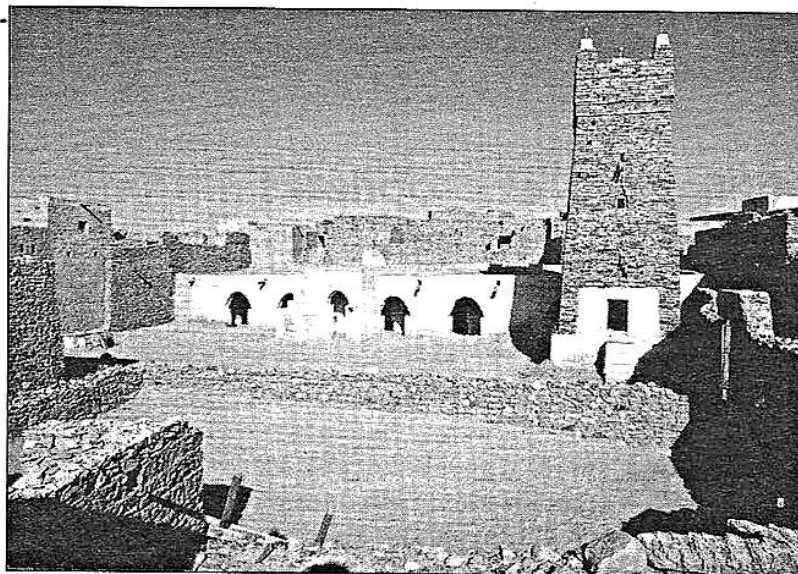
6

Applications de l'espace

Introduction

Dans les classes précédentes, nous avons étudié le parallélisme et l'orthogonalité des droites et des plans de l'espace. Dans ce chapitre, nous utilisons ces notions pour définir des applications de l'espace et étudier leurs propriétés.

Sur la photo de la ville de Chinguetti, les ombres projetées sur le sol et sur les bâtiments définissent autant de projections sur des plans, parallèlement à la direction des rayons du soleil. Certaines isométries de l'espace permettent également de déterminer les éléments de symétrie (centre, axes, plans) d'un solide. Ainsi, on peut remarquer que la mosquée de Chinguetti possède un axe et deux plans de symétrie.



Mosquée de Chinguetti, en Mauritanie.

SOMMAIRE

1. Projections	124
2. Translations et homothéties	129
3. Symétries orthogonales	133

Dans ce chapitre, l'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{W}$ désigne l'ensemble des vecteurs de l'espace.

- Le vocabulaire et les résultats concernant les applications du plan s'étendent à l'espace :
 - une *transformation* de $\mathcal{E}$ est une application *bijective* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$;
 - une *isométrie* de $\mathcal{E}$ est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui *conserve la distance* ;
 - une application *affine* de $\mathcal{E}$ est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve le *coefficient de colinéarité*.
- Une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une application affine si et seulement si elle vérifie l'une ou l'autre des conditions suivantes :
 - elle conserve le barycentre ;
 - son expression analytique est de la forme :
$$\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$$
- Les propriétés des applications affines du plan s'étendent à l'espace ; en particulier :
 - une application affine de $\mathcal{E}$ est déterminée par la donnée d'un repère de $\mathcal{E}$ et de son image ;
 - l'ensemble des points invariants par une application affine est $\emptyset$, un singleton, une droite, un plan ou $\mathcal{E}$;
 - l'image d'une droite par une application affine est un singleton ou une droite ;
 - l'image d'un plan par une application affine est un singleton, une droite ou un plan ;
- À toute application affine f de $\mathcal{E}$ est associée une application linéaire φ de $\mathcal{W}$ dans lui-même telle que pour tous points A et B , on a : $\varphi(\vec{AB}) = f(A)\vec{f(B)}$.
- Toute isométrie de $\mathcal{E}$ est une application affine.
 Une isométrie conserve l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité.
 Une isométrie conserve les aires et les volumes.

1 Projections

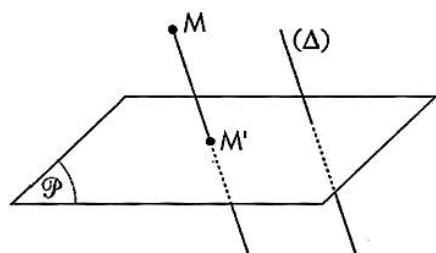
1.1. Définitions et propriétés

Lorsqu'une droite et un plan ne sont pas parallèles, leur intersection est réduite à un singleton. Ce résultat justifie les définitions suivantes.

Définitions

Soit $(\mathcal{P})$ un plan de $\mathcal{E}$ et (Δ) une droite non parallèle à $(\mathcal{P})$.

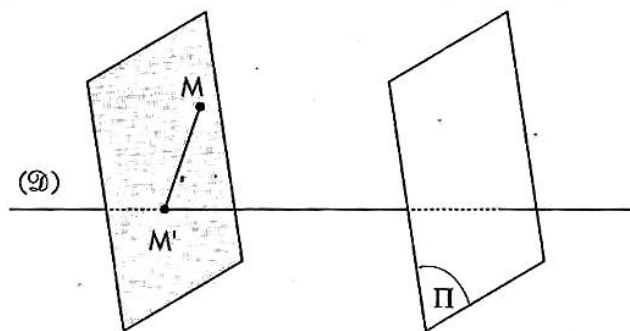
On appelle *projection sur $(\mathcal{P})$ parallèlement à (Δ)* l'application p de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à tout point M associe M' , point d'intersection de $(\mathcal{P})$ avec la parallèle à (Δ) passant par M .



$$\text{On a : } p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\mathcal{P}) \\ (MM') // (\Delta) \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{D})$ une droite de $\mathcal{E}$ et (Π) un plan non parallèle à $(\mathcal{D})$.

On appelle *projection sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à (Π)* l'application q de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à tout point M associe M' , point d'intersection de $(\mathcal{D})$ avec le plan parallèle à (Π) passant par M .



$$\text{On a : } q(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (\mathcal{D}) \\ (MM') // (\Pi) \end{cases}$$

Vocabulaire

M' est le projeté de M sur $(\mathcal{P})$ parallèlement à (Δ) . M' est le projeté de M sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à (Π) .

Remarques

- Lorsque $(\Delta) \perp (\mathcal{P})$, p est la projection orthogonale sur $(\mathcal{P})$ et M' est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$.
- Lorsque $(\Pi) \perp (\mathcal{D})$, q est la projection orthogonale sur $(\mathcal{D})$ et M' est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

Propriétés

Soit p la projection sur un plan $(\mathcal{P})$ parallèlement à une droite (Δ) .

- L'image de $\mathcal{E}$ par p est $(\mathcal{P})$.
- L'ensemble des antécédents par p d'un point M' de $(\mathcal{P})$ est la parallèle à (Δ) passant par M' .
- L'ensemble des points invariants par p est $(\mathcal{P})$.

Soit q la projection sur une droite $(\mathcal{D})$ parallèlement à un plan (Π) .

- L'image de $\mathcal{E}$ par q est $(\mathcal{D})$.
- L'ensemble des antécédents par q d'un point M' de $(\mathcal{D})$ est le plan parallèle à (Π) passant par M' .
- L'ensemble des points invariants par q est $(\mathcal{D})$.

Ces propriétés découlent des définitions.

1.2. Autres propriétés

Conservation du coefficient de colinéarité

Propriété

Soit A, B, C trois points de $\mathcal{E}$ et A', B', C' leurs images respectives par une projection.

S'il existe un nombre réel k tel que $\vec{AC} = k\vec{AB}$, alors on a : $\vec{A'C'} = k\vec{A'B'}$.

Démonstration

- Considérons la projection sur un plan $(\mathcal{P})$ parallèlement à une droite (Δ) .

– Lorsque $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de (Δ) , on a :

$$A' = B' = C' ; \text{ donc } \vec{A'C'} = k\vec{A'B'}.$$

– Lorsque $\vec{AB}$ n'est pas un vecteur directeur de (Δ) , les points A, B, C, A', B', C' sont coplanaires et on est ramené à une projection dans le plan. Donc : $\vec{A'C'} = k\vec{A'B'}$.

- Considérons la projection sur une droite $(\mathcal{D})$ parallèlement à un plan (Π) .

– Lorsque $\vec{AB}$ est un vecteur de (Π) , on a : $A' = B' = C'$;

$$\text{donc } \vec{A'C'} = k\vec{A'B'}.$$

– Lorsque $\vec{AB}$ n'est pas un vecteur de (Π) , la parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par A coupe les plans parallèles à (Π) passant par B et C en B_1 et C_1 tels que :

$$(BB_1) \parallel (CC_1) \text{ et } (AA') \parallel (B_1B') \parallel (C_1C').$$

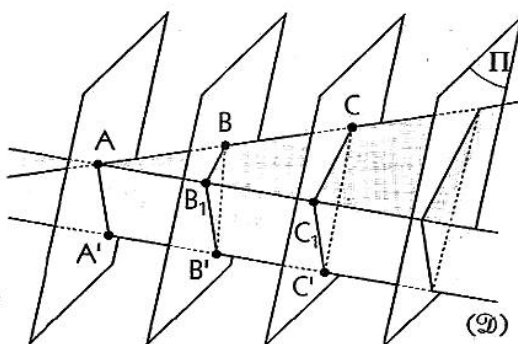
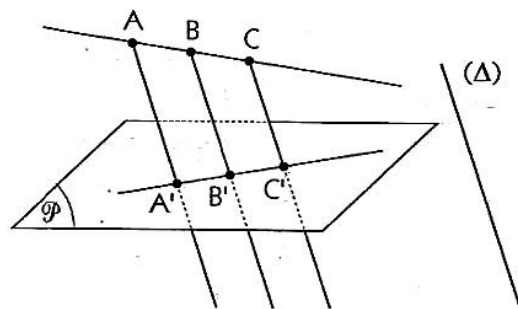
Dans le plan contenant les points A, B, C, B_1 et C_1 , on a :

$$\vec{AC_1} = k\vec{AB_1}.$$

Dans le plan contenant A, B_1, C_1, A', B' et C' , on a : $\vec{A'B'} = \vec{AB_1}$

$$\text{et } \vec{A'C'} = \vec{AC_1}.$$

On en déduit que : $\vec{A'C'} = k\vec{A'B'}$.



Remarques

Soit A, B, C, D, I des points de $\mathcal{E}$ et A', B', C', D', I' leurs images respectives par une projection.

- Si I est le milieu de $[AB]$, alors I' est le milieu de $[A'B']$.
- Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Conséquence

Toute projection de l'espace est une application affine.

Remarques

Toute projection de $\mathcal{E}$ admet une application linéaire associée, appelée projection vectorielle.

• Si p est la projection sur un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, parallèlement à une droite de vecteur directeur $\vec{w}$, alors l'application linéaire associée est l'application π de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$ telle que :

$$\pi(\vec{u}) = \vec{u}, \quad \pi(\vec{v}) = \vec{v} \quad \text{et} \quad \pi(\vec{w}) = \vec{0}.$$

• Si q est la projection sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, parallèlement à un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors l'application linéaire associée est l'application γ de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$ telle que :

$$\gamma(\vec{u}) = \vec{u}, \quad \gamma(\vec{v}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \gamma(\vec{w}) = \vec{0}.$$

Image d'une droite, d'un plan

Propriété 1

Soit p une projection, (AB) une droite, A' et B' les images respectives de A et B par p .

- Si $A' \neq B'$, l'image de (AB) par p est la droite $(A'B')$.
- Si $A' = B'$, l'image de (AB) par p est le singleton $\{A'\}$.

La démonstration de cette propriété est analogue à celle donnée pour l'image d'une droite par une application affine du plan.

Remarques

- L'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ ou le singleton $\{A'\}$.
- L'image d'une demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$ ou le singleton $\{A'\}$.

Propriété 2

Soit p une projection, (AB) et (CD) deux droites parallèles.

Si l'image de (AB) par p est une droite $(A'B')$, alors l'image de (CD) par p est une droite $(C'D')$ parallèle à $(A'B')$.

Démonstration

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires ; donc, il existe un nombre réel k non nul tel que : $\vec{CD} = k \vec{AB}$.
 p est une application affine ; donc p conserve le coefficient de colinéarité et on a : $\vec{C'D'} = k \vec{A'B'}$.

L'image de (AB) est une droite ; donc $\vec{A'B'} \neq \vec{0}$.

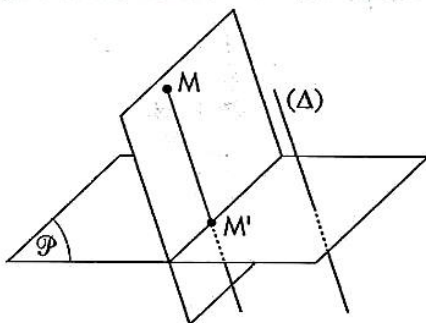
On en déduit que $\vec{C'D'} \neq \vec{0}$ et que l'image de (CD) par p est une droite $(C'D')$ parallèle à $(A'B')$.

Nous admettons les propriétés suivantes.

Propriétés 3

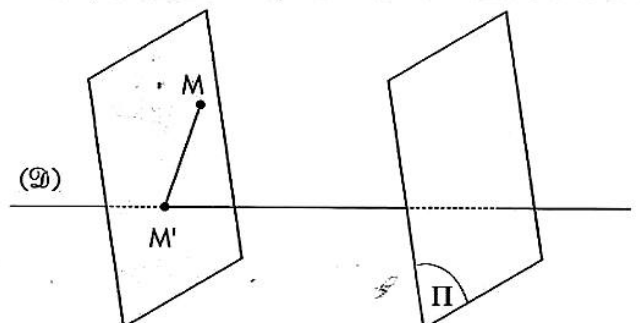
Soit p la projection sur un plan $(\mathcal{P})$ parallèlement à une droite (Δ) .

L'image par p d'un plan parallèle à (Δ) est la droite d'intersection de ce plan avec $(\mathcal{P})$.



Soit q la projection sur une droite $(\mathcal{D})$ parallèlement à un plan (Π) .

L'image par q d'un plan parallèle à (Π) est le point d'intersection de ce plan avec $(\mathcal{D})$.



Remarques

• L'image par p d'un plan non parallèle à (Δ) est le plan $(\mathcal{P})$.

• L'image par q d'un plan non parallèle à (Π) est la droite $(\mathcal{Q})$.

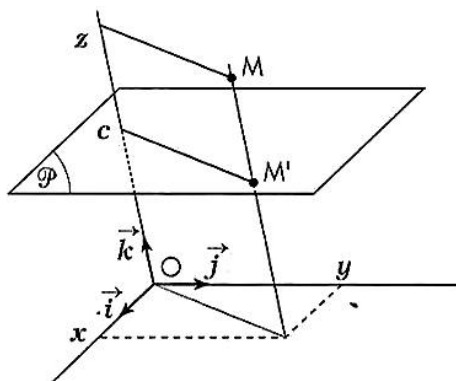
Expression analytique d'une projection

On ne donne l'expression analytique d'une projection que dans les cas particuliers où le plan (ou la droite) de projection et la direction de projection sont parallèles aux plans ou axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• Soit p la projection sur un plan $(\mathcal{P})$ d'équation $z = c$, parallèlement à une droite (Δ) de vecteur directeur $\vec{k}$.

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ un point de $\mathcal{E}$ et $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$ son image par p .

$$\begin{aligned} \text{On a : } M' \in (\mathcal{P}) &\Leftrightarrow z' = c ; \\ (MM') // (\Delta) &\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' - y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



On en déduit la propriété suivante.

Propriétés

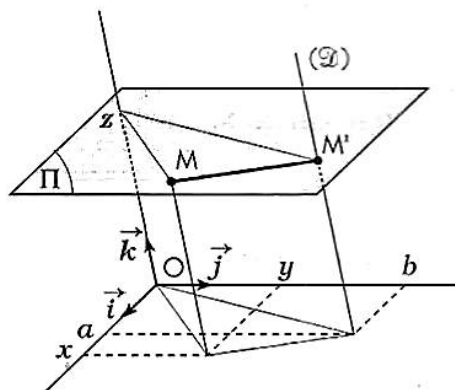
L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• L'expression analytique de la projection sur le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $z = c$, parallèlement à une droite (Δ) de vecteur directeur $\vec{k}$ est : $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = c \end{cases}$

• Soit q la projection sur une droite $(\mathcal{Q})$ de système d'équations $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$, parallèlement à un plan (Π) de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ un point de $\mathcal{E}$ et $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$ son image par q .

$$\begin{aligned} \text{On a : } M' \in (\mathcal{Q}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = a \\ y' = b \end{cases} ; \\ (MM') // (\Pi) &\Leftrightarrow z' - z = 0. \end{aligned}$$



• L'expression analytique de la projection sur la droite $(\mathcal{Q})$ de système d'équations $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$, parallèlement à un plan (Π) de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ est : $\begin{cases} x' = a \\ y' = b \\ z' = z \end{cases}$

1.3. Travaux dirigés

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé.

Soit p l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) \end{cases}$

1°) a) Déterminer l'image A' par p du point A de coordonnées $(1; -2; 3)$.

b) Déterminer l'ensemble des antécédents de A' par p .

2°) Démontrer que l'ensemble des points invariants par p est un plan $(\mathcal{P})$.

3°) Soit M un point de $\mathcal{E}$ et M' son image par p .

a) Démontrer que M' appartient à $(\mathcal{P})$.

b) Démontrer que si M n'appartient pas à $(\mathcal{P})$, la droite (MM') est orthogonale à $(\mathcal{P})$.

4°) En déduire la nature de p .

Solution

1°) a) L'image de A par p est le point A' de coordonnées $(-2; 1; 0)$.

b) Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un antécédent de A ; on a :
$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = -6 \\ x + 2y + z + 3 = 3 \\ -x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à un système de deux équations : $\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire un système d'équations cartésiennes de la droite passant par A' et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2°) On a : $M' = M \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 3x \\ x + 2y + z + 3 = 3y \\ -x + y + 2z - 3 = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z - 3 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \\ -x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y + z + 3 = 0$.

Donc, l'ensemble des points invariants par p est le plan (P) d'équation : $x - y + z + 3 = 0$.

3°) a) On vérifie que : $x' - y' + z' + 3 = 0$; donc : $M' \in (P)$.

b) On a : $\vec{MM'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \\ \frac{1}{3}(x - y + z + 3) \\ \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \end{pmatrix}$; de plus $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P).

$\vec{MM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ; donc, la droite (MM') est orthogonale au plan (P).

4°) On en déduit que p est la projection orthogonale sur le plan (P).

Exercices

1.a Soit ABCD un carré et (P) un plan non perpendiculaire au plan (ABC). On désigne par A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D par la projection orthogonale sur (P).

1. Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D' ?
2. À quelle condition le quadrilatère A'B'C'D' est-il un losange ? un rectangle ? un carré ?

1.b Soit ABCDEFGH un cube et p la projection orthogonale sur le plan (HFC).

1. Démontrer que : $p(A) = p(G)$.
2. Démontrer que p(A) est le centre de gravité du triangle HFC.

1.c Soit ABCDEFGH un cube et p la projection orthogonale sur la droite (EC).

1. Démontrer que les points A, F et H ont même image I par p.
2. Déterminer l'ensemble des antécédents par p du milieu J de [IC].

1.d Soit ABCD un tétraèdre, I et J les milieux respectifs de [AC] et [BD], (P) un plan orthogonal à (IJ).

On désigne par A', B', C' et D' les images res-

pectives de A, B, C et D par la projection orthogonale sur (P).

1. Déterminer la nature du quadrilatère A'B'C'D'.
2. On suppose que : $(AC) \perp (BD)$. À quelle condition A'B'C'D' est-il un losange ?
3. On suppose que ABCD est un tétraèdre régulier. Quelle est alors la nature du quadrilatère A'B'C'D' ?

1.e Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé. Soit (P) le plan d'équation $x - 2y + 3z = 1$ et le point $A\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées de l'image A' de A par la projection orthogonale p sur (P).
2. Déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble des antécédents de A' par p.

1.f Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé. Soit (D) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$ et le point $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées de l'image A' de A par la projection orthogonale p sur (D).
2. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des antécédents de A' par p.

2 Translations et homothéties

2.1. Translations

Définition et propriété caractéristique

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$.

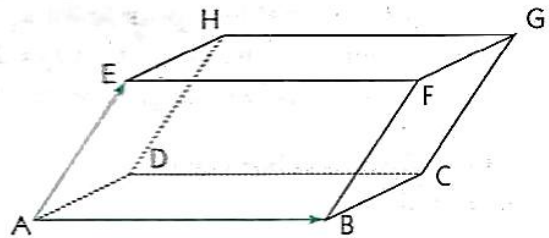
On appelle translation de vecteur $\vec{u}$, et on note $t_{\vec{u}}$, l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, $t_{\vec{u}}$ est l'application identique ; tous les points de $\mathcal{E}$ sont invariants.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, aucun point n'est invariant.

Exemples

Soit ABCDEFGH un pavé.

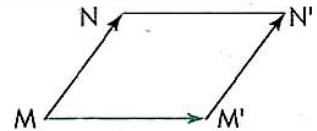
- Les points E, F, G et H sont les images respectives des points A, B, C et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.
- Les points B, C, G et F sont les images respectives des points A, D, H et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Propriété

Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.



La démonstration de cette propriété est analogue à celle faite dans le plan en classe de première.

Remarques

- Toute translation de $\mathcal{E}$ est une isométrie.
- L'application linéaire associée à une translation est l'application identique de $\mathcal{W}$.

Translations et configurations

Soit t une translation.

- L'image de la droite de repère $(A, \vec{u})$ est la droite de repère $(t(A), \vec{u})$.
- L'image du plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est le plan de repère $(t(A), \vec{u}, \vec{v})$.
- L'image d'une figure plane est une figure de même nature et de mêmes dimensions.
- L'image d'un solide de l'espace est un solide de même nature et de mêmes dimensions.

Par exemple, l'image de la sphère de centre I et de rayon R est la sphère de centre $t(I)$ et de rayon R .

Expression analytique d'une translation

Soit t une translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$ et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ son image par t .

$$\text{On a : } \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \\ z' - z = c \end{cases}$$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

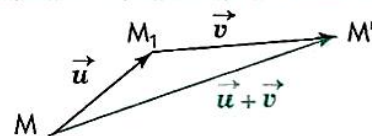
L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$.

Composée de deux translations

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

La composée $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



La démonstration de cette propriété est analogue à celle faite dans le plan en classe de première.

On a : $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$.

Remarques

- La loi $\circ$ est une loi de composition interne dans l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations de $\mathcal{E}$.
 - Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$, on a : $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$; donc : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.
- La composition des translations est commutative.
- La composition des translations est associative.
 - $t_{\vec{0}}$ est l'élément neutre de $\mathcal{T}$ pour la loi $\circ$.
 - Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$, on a : $t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = Id_{\mathcal{E}}$; $t_{\vec{u}}$ est donc une transformation de $\mathcal{E}$ et $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$.
- On en déduit que : $(\mathcal{T}, \circ)$ est un groupe commutatif.

2.2. Homothéties

Définition et propriété caractéristique

Définition

Soit O un point de $\mathcal{E}$ et k un nombre réel non nul.

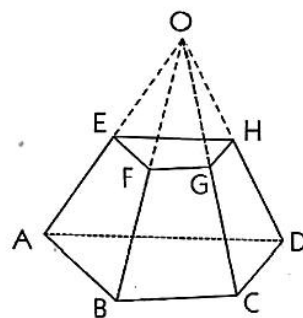
On appelle homothétie de centre O et de rapport k , et on note $h_{(O, k)}$ ou h , l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\vec{OM}' = k\vec{OM}$.

- Si $k = 1$, h est l'application identique et tous les points de $\mathcal{E}$ sont invariants.
- Si $k \neq 1$, O est le seul point invariant.
- Si $k = -1$, h est la symétrie de centre O.

Exemples

Soit OABCD une pyramide et ABCDEFGH le tronc de pyramide tel que E, F, G et H sont les milieux respectifs des arêtes [OA], [OB], [OC] et [OD].

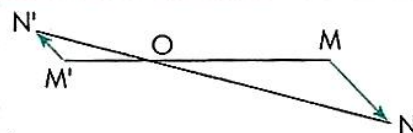
- Les points E, F, G et H sont les images respectives des points A, B, C et D par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.
- Les points A, B, C et D sont les images respectives des points E, F, G et H par l'homothétie de centre O et de rapport 2.



Propriété

Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même, k un nombre réel différent de 0 et de 1.

f est une homothétie si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\vec{M'N'} = k\vec{MN}$.



La démonstration de cette propriété est analogue à celle faite dans le plan en classe de première.

Remarques

- Toute homothétie de $\mathcal{E}$ est une application affine.
- L'application linéaire associée à une homothétie h de rapport k ($k \neq 1$) est l'application de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$, appelée homothétie vectorielle, qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $k\vec{u}$.
- Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Homothéties et configurations

Soit h une homothétie de rapport k .

- L'image de la droite de repère $(A, \vec{u})$ est la droite de repère $(h(A), \vec{u})$.
- L'image du plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est le plan de repère $(h(A), \vec{u}, \vec{v})$.
- L'image d'une figure plane est une figure de même nature.
- L'image d'un solide est un solide de même nature.

Par exemple, l'image de la sphère de centre I et de rayon R est la sphère de centre $h(I)$ et de rayon $|k|R$.

Expression analytique d'une homothétie

La démonstration des propriétés suivantes est analogue à celle faite dans le plan en classe de première.

Propriété 1

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'expression analytique de l'homothétie de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ et de rapport k est :
$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \\ z' = kz + (1-k)c \end{cases}$$

Exemple

L'homothétie de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et de rapport -2 a pour expression analytique :
$$\begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 6 \\ z' = -2z \end{cases}$$

Propriété 2

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit p, q et r trois nombres réels, k un nombre réel non nul et f l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui

à tout point $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ associe le point $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$ tel que :
$$\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \\ z' = kz + r \end{cases}$$

- Si $k = 1$, f est la translation de vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} p \\ q \\ r \end{smallmatrix}\right)$.
- Si $k \neq 1$, f est une homothétie de rapport k .

Exemple

L'application ayant pour expression analytique
$$\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y \\ z' = 3z + 2 \end{cases}$$
 est une homothétie de rapport 3 ;

son centre est l'unique point invariant, c'est-à-dire : $\Omega\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

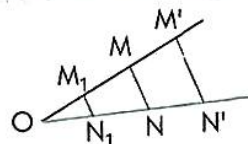
Composées de translations et d'homothéties

La démonstration des propriétés suivantes est analogue à celle faite dans le plan en classe de première.

Propriété 1

Soit h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k' .

$h' \circ h$ est l'homothétie de centre O et de rapport $k'k$.



On a : $h'_{(O,k')} \circ h_{(O,k)} = h_{(O,kk')}$.

- Si $k'k = 1$, alors $h' \circ h$ est l'application identique.
- Si $k'k = -1$, alors $h' \circ h$ est la symétrie de centre O .

Remarques

- La loi $\circ$ est une loi de composition interne dans l'ensemble $\mathcal{H}_O$ des homothéties de $\mathcal{E}$ de centre O .
 - Pour tous nombres réels k et k' , on a : $k'k = kk'$; donc : $h \circ h' = h' \circ h$.
- La composition des homothéties de centre O est commutative.

- La composition des homothéties de centre O est associative.
- $h_{(O,1)}$ est l'élément neutre de $\mathcal{H}_O$ pour la loi $\circ$.
- Pour tout nombre réel k non nul, on a : $h_{(O,k)} \circ h_{(O,\frac{1}{k})} = Id_{\mathcal{E}}$; $h_{(O,k)}$ est donc une transformation de $\mathcal{E}$ et $h_{(O,k)}^{-1} = h_{(O,\frac{1}{k})}$.

On en déduit que $(\mathcal{H}_O, \circ)$ est un groupe commutatif.

Propriété 2

Soit h et h' deux homothéties de rapports respectifs k et k' .

- Si $k'k \neq 1$, alors $h' \circ h$ est une homothétie de rapport $k'k$.
- Si $k'k = 1$, alors $h' \circ h$ est une translation.

Le centre de l'homothétie est le point invariant de $h' \circ h$.

Le vecteur de la translation est déterminé en cherchant l'image d'un point par $h' \circ h$.

Exemples

Soit les points $\Omega_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Omega_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Omega_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et les homothéties $h_{1(\Omega_1, \frac{1}{2})}$, $h_{2(\Omega_2, 2)}$ et $h_{3(\Omega_3, -4)}$.

- $h_1 \circ h_3$ est une homothétie de rapport -2 .

Son expression analytique est :
$$\begin{cases} x' = -2x + \frac{1}{2} \\ y' = -2y + 2 \\ z' = -2z - \frac{5}{2} \end{cases} ; \text{ le centre de cette homothétie est le point } I \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

- $h_2 \circ h_1$ est une translation.

Son expression analytique est :
$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \\ z' = z - 1 \end{cases} ; h_2 \circ h_1 \text{ est donc la translation de vecteur : } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Propriété 3

Soit h une homothétie de rapport k différent de 1 et t une translation.

$h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k .

Exemples

Soit h l'homothétie de centre $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rapport -4 , t la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport -4 .

- L'expression analytique de $h \circ t$ est :
$$\begin{cases} x' = -4x + 8 \\ y' = -4y + 1 \\ z' = -4z - 9 \end{cases} ; \text{ le centre de cette homothétie est le point } I \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix}.$$

- L'expression analytique de $t \circ h$ est :
$$\begin{cases} x' = -4x - 2 \\ y' = -4y + 6 \\ z' = -4z - 4 \end{cases} ; \text{ le centre de cette homothétie est le point } J \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Remarque

L'ensemble des homothéties et translations de $\mathcal{E}$, muni de la loi de composition des applications, est un groupe non commutatif.

Exercices

- 2.a Soit ABCDEFGH un cube. Déterminer les coordonnées dans le repère (A, B, D, E) des images des points C, F, G et H par chacune des transformations suivantes :
- translation de vecteur $\vec{EG}$
 - translation de vecteur $\vec{BH}$
 - homothétie de centre A et de rapport $-\frac{2}{3}$
 - homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$.

- 2.b Soit ABCD un tétraèdre, I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].
- Construire l'image du tétraèdre par la translation de vecteur $\vec{IJ}$.
 - Déterminer les coordonnées dans le repère (A, B, C, D) des images des points A, B, C et D par cette translation.

- 2.c Soit ABCDEFGH un cube, h l'homothétie de centre A et de rapport 2, t la translation de vecteur $\vec{HD}$.
- Construire les images des points E, B, C et G par $t \circ h$.
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.

- 2.d Soit ABCDEFGH un cube, h_1 l'homothétie de centre A et de rapport 2, h_2 l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$.
- Construire les images des points A, B, C et G par $h_2 \circ h_1$.
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.

- 2.e On considère les transformations f et g d'expressions analytiques respectives :

$$\begin{cases} x' = -2x - 4 \\ y' = -2y + 1 \\ z' = -2z + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z - 1 \end{cases}$$

- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et g.
- Déterminer l'expression analytique, la nature et les éléments caractéristiques des transformations $g \circ f$ et $f \circ g$.

- 2.f Soit les points $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, h_1 l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{3}$, h_2 l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.
- Déterminer les expressions analytiques de $h_2 \circ h_1$ et $h_1 \circ h_2$.
 - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de ces transformations.

3 Symétries orthogonales

Dans cette leçon, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé.

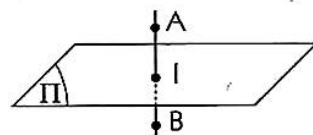
3.1. Réflexions

Plan médiateur d'un segment

On a établi en classe de première la propriété suivante.

Propriété

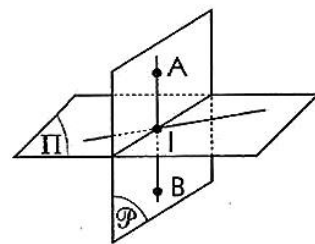
Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$ et I le milieu de [AB].
L'ensemble des points équidistants de A et B est le plan (Π) orthogonal à la droite (AB) en I.



Ce plan est appelé plan médiateur de [AB].

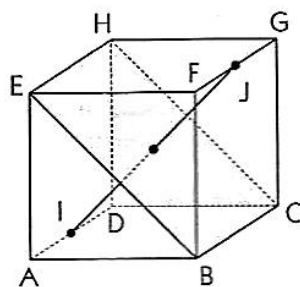
Remarques

- Soit I le milieu d'un segment [AB] et (Π) le plan médiateur de [AB].
- Toute droite de (Π) passant par I est une médiatrice de [AB].
 - Pour tout plan ($\mathcal{P}$) contenant la droite (AB) :
 - ($\mathcal{P}$) et (Π) sont perpendiculaires ;
 - la droite d'intersection de ($\mathcal{P}$) et (Π) est la médiatrice de [AB] dans ($\mathcal{P}$).

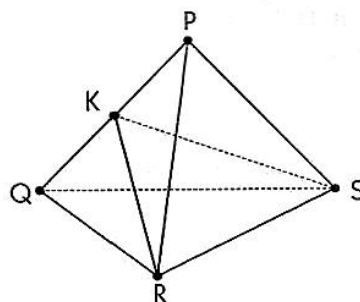


Exemples

- Soit ABCDEFGH un cube, I et J les milieux respectifs de [AD] et [FG].
Le plan (BEH) est le plan médiateur de [IJ], de [DG] et de [AF].



- Soit PQRS un tétraèdre régulier et K le milieu de [PQ].
Le plan (RKS) est le plan médiateur de [PQ].



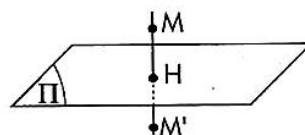
Définition et propriétés

Définition

Soit (Π) un plan de $\mathcal{E}$.

On appelle **réflexion de plan (Π)** , et on note s_{Π} , l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

- si $M \in (\Pi)$, alors $M' = M$;
- si $M \notin (\Pi)$, alors (Π) est le plan médiateur de [MM'].



Une réflexion de plan (Π) est aussi appelée **symétrie orthogonale par rapport à (Π)** .

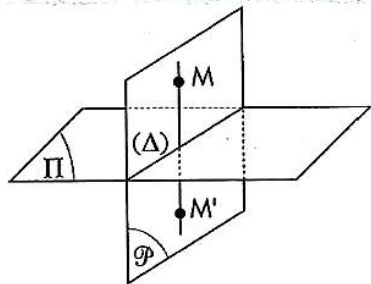
Remarques

- L'ensemble des points invariants par s_{Π} est le plan (Π) .
- Si H est le projeté orthogonal de M sur (Π) et si $M' = s_{\Pi}(M)$, alors : $\vec{MM'} = 2\vec{MH}$.
- Si $M' = s_{\Pi}(M)$, alors $M = s_{\Pi}(M')$; on dit que M et M' sont **symétriques par rapport à (Π)** .
- Pour tout plan (Π) , on a : $s_{\Pi} \circ s_{\Pi} = Id_{\mathcal{E}}$; s_{Π} est donc une transformation de $\mathcal{E}$ et $(s_{\Pi})^{-1} = s_{\Pi}$.

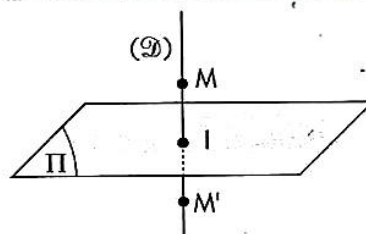
Propriétés

Soit (Π) un plan et s_{Π} la réflexion de plan (Π) .

- Si $(\mathcal{P})$ est un plan perpendiculaire à (Π) et (Δ) leur droite d'intersection, alors :
 - $(\mathcal{P})$ est globalement invariant par s_{Π} ;
 - la restriction de s_{Π} à $(\mathcal{P})$ est la symétrie orthogonale d'axe (Δ) .



- Si $(\mathcal{D})$ est une droite orthogonale à (Π) en un point I, alors :
 - $(\mathcal{D})$ est globalement invariant par s_{Π} ;
 - la restriction de s_{Π} à $(\mathcal{D})$ est la symétrie de centre I.



Ces propriétés se déduisent des propriétés du plan médiateur d'un segment.

Conséquence

Toute réflexion de $\mathcal{E}$ est une isométrie.

Démonstration

Soit A et B deux points de $\mathcal{E}$, A' et B' leurs images respectives par une réflexion de plan (Π).

- Si $(AB) \perp (\Pi)$, alors A, B, A' et B' appartiennent à une même droite orthogonale à (Π) ;
donc : $A'B' = AB$, d'après les propriétés précédentes.
- Si (AB) n'est pas orthogonale à (Π), alors A, B, A' et B' appartiennent à un même plan orthogonal à (Π) ;
donc : $A'B' = AB$, d'après les propriétés précédentes.

Remarques

- Toute réflexion de $\mathcal{E}$ est une application affine.
- Soit s la réflexion de plan (Π) de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{w}$ un vecteur normal à (Π).
L'application linéaire associée à s est l'application σ de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$ telle que :
 $\sigma(\vec{u}) = \vec{u}$, $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}$ et $\sigma(\vec{w}) = -\vec{w}$.

Réflexions et configurations

- Toute réflexion transforme les droites (respectivement les plans) en droites (respectivement en plans) en conservant parallélisme et orthogonalité.
 - L'image d'une figure plane par une réflexion est une figure de même nature et de mêmes dimensions.
 - L'image d'un solide de l'espace par une réflexion est un solide de même nature et de mêmes dimensions.
- Par exemple, l'image d'un cube par une réflexion est un cube de même arête.

Expression analytique d'une réflexion

On ne donne l'expression analytique d'une réflexion de plan (Π) que lorsque celui-ci est perpendiculaire à l'un des axes du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(Π) est le plan d'équation $z = c$; on désigne par s_Π la réflexion de plan (Π).

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ un point de $\mathcal{E}$, $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$ son image par s_Π et I le point d'intersection de (MM') et de (Π).

$$\begin{aligned} \text{On a : } (MM') \perp (\Pi) &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{k} \ (\lambda \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' - y = 0 \end{cases} ; \\ I \in (\Pi) &\Leftrightarrow \frac{z + z'}{2} = c. \end{aligned}$$

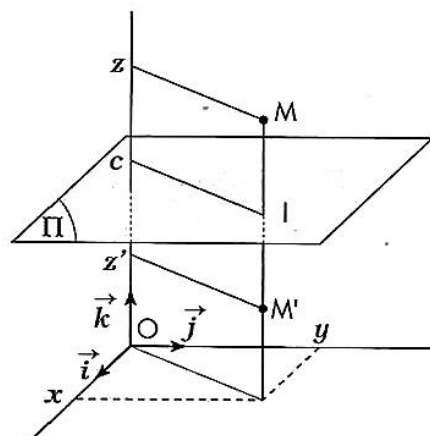
On en déduit la propriété suivante.

Propriété

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'expression analytique de la réflexion de plan (Π) d'équation $z = c$ est : $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z + 2c \end{cases}$.

On obtient des résultats analogues lorsque (Π) est perpendiculaire à la droite de repère $(O, \vec{i})$ ou à la droite de repère $(O, \vec{j})$.



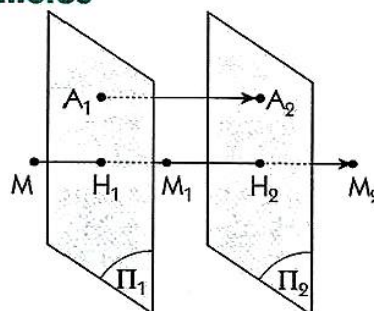
Composée de deux réflexions de plans parallèles

- (Π_1) et (Π_2) sont deux plans parallèles ; on désigne par s_1 et s_2 les réflexions de plans respectifs (Π_1) et (Π_2).

Si A_1 est un point de (Π_1) et A_2 son projeté orthogonal sur (Π_2), $\overrightarrow{A_1A_2}$ est un vecteur normal à (Π_1) et (Π_2), indépendant du choix de A_1 .

Soit M un point de $\mathcal{E}$, M_1 son image par s_1 et M_2 l'image de M_1 par s_2 .

On désigne par H_1 et H_2 les milieux respectifs de $[MM_1]$ et $[M_1M_2]$.



On a : $\vec{MM}_2 = \vec{MM}_1 + \vec{M}_1\vec{M}_2 = 2\vec{H_1M_1} + 2\vec{M_1H_2}$
 $= 2\vec{H_1H_2} = 2\vec{A_1A_2}$.

Donc, $s_2 \circ s_1$ est la translation de vecteur $2\vec{A_1A_2}$.

• Réciproquement, soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul, (Π) un plan de vecteur normal $\vec{u}$ et (Π') l'image de (Π) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$. On a : $t = s_{\Pi'} \circ s_{\Pi}$.

On en déduit les propriétés suivantes.

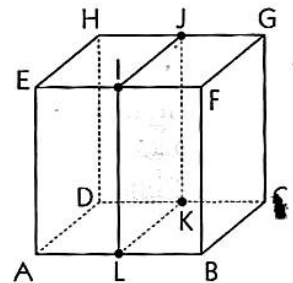
Propriétés

- La composée de deux réflexions de plans parallèles est une translation de vecteur normal à ces deux plans.
- Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est la composée de deux réflexions de plans parallèles ayant $\vec{u}$ pour vecteur normal.

Exemples

Soit ABCDEFGH un cube, I, J, K et L les milieux respectifs de [EF], [HG], [DC] et [AB].

- La composée des réflexions de plans (ADE) et (IJK) est la translation de vecteur $\vec{AB}$.
- La translation de vecteur $2\vec{AE}$ est la composée des réflexions de plans (ABC) et (EFG).



3.2. Demi-tours

Introduction

Considérons deux plans perpendiculaires (Π_1) et (Π_2) , sécants suivant une droite (Δ) . Soit M un point de $\mathcal{E}$, M_1 le symétrique de M par rapport à (Π_1) et M_2 le symétrique de M_1 par rapport à (Π_2) .

On désigne par :

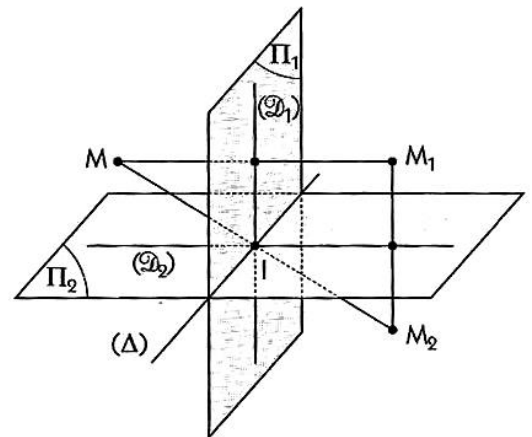
- $(\mathcal{P})$ le plan orthogonal en M à (Δ) ;
- $(\mathcal{D}_1)$ la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et (Π_1) ;
- $(\mathcal{D}_2)$ la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et (Π_2) .

Dans le plan $(\mathcal{P})$, on a :

- $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ perpendiculaires en un point I , qui est le projeté orthogonal de M sur (Δ) ;
- M et M_1 symétriques par rapport à $(\mathcal{D}_1)$;
- M_1 et M_2 symétriques par rapport à $(\mathcal{D}_2)$.

On en déduit que dans le plan $(\mathcal{P})$:

- d'une part, M et M_2 sont symétriques par rapport à I ;
- d'autre part, (Δ) est une médiatrice de $[MM_2]$.



Cette étude justifie la définition suivante.

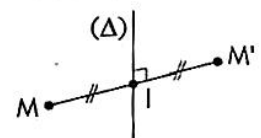
Définition

Soit (Δ) une droite de $\mathcal{E}$.

On appelle demi-tour d'axe (Δ) , et on note S_{Δ} , l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

- si $M \in (\Delta)$, alors $M' = M$;
- si $M \notin (\Delta)$, alors (Δ) est une médiatrice de $[MM']$.

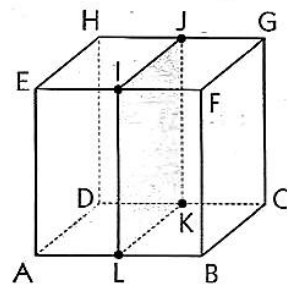
Un demi-tour d'axe (Δ) est aussi appelé symétrie orthogonale par rapport à (Δ) .



Exemples

Soit ABCDEFGH un cube, I, J, K et L les milieux respectifs de [EF], [HG], [DC] et [AB].

- La composée des réflexions de plans (ADE) et (CGH) est le demi-tour d'axe (DH).
- La composée des réflexions de plans (ABC) et (IJK) est le demi-tour d'axe (LK).



Remarques

- L'ensemble des points invariants par s_Δ est la droite (Δ) .
- Si I est le projeté orthogonal de M sur (Δ) et si $M' = s_\Delta(M)$, alors : $\vec{MM'} = 2\vec{MI}$.
- Si $M' = s_\Delta(M)$, alors $M = s_\Delta(M')$; on dit que M et M' sont symétriques par rapport à (Δ) .
- Pour toute droite (Δ) , on a : $s_\Delta \circ s_\Delta = Id_{\mathcal{E}}$; s_Δ est donc une transformation de $\mathcal{E}$ et $(s_\Delta)^{-1} = s_\Delta$.

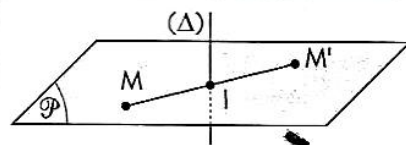
Propriétés

Les propriétés suivantes se déduisent de l'étude faite en introduction.

Propriétés 1

Soit (Δ) une droite de $\mathcal{E}$, s_Δ le demi-tour d'axe (Δ) et $(\mathcal{P})$ un plan orthogonal à (Δ) en un point I.

- $(\mathcal{P})$ est globalement invariant par s_Δ .
- La restriction de s_Δ à $(\mathcal{P})$ est la symétrie de centre I.



Propriétés 2

- La composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant une droite (Δ) est le demi-tour d'axe (Δ) .
- Tout demi-tour d'axe (Δ) est la composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant la droite (Δ) .

Remarques

- Tout demi-tour de $\mathcal{E}$ est une application affine.
- Tout demi-tour de $\mathcal{E}$ est une isométrie.
- Soit s le demi-tour d'axe (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $\vec{u}$.

L'application linéaire associée à s est l'application σ de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}$ telle que :

$$\sigma(\vec{u}) = \vec{u}, \sigma(\vec{v}) = -\vec{v} \text{ et } \sigma(\vec{w}) = -\vec{w}.$$

Demi-tours et configurations

- Tout demi-tour transforme les droites (respectivement les plans) en droites (respectivement en plans) en conservant parallélisme et orthogonalité.
 - L'image d'une figure plane par un demi-tour est une figure de même nature et de mêmes dimensions.
 - L'image d'un solide de l'espace par un demi-tour est un solide de même nature et de mêmes dimensions.
- Par exemple, l'image d'un tétraèdre régulier par un demi-tour est un tétraèdre régulier de même arête.

Expression analytique d'un demi-tour

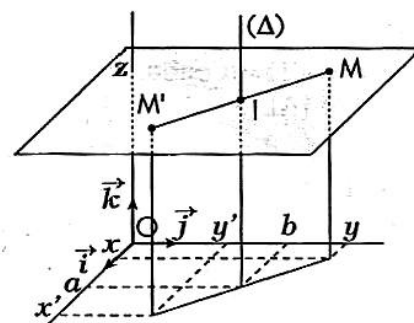
On ne donne l'expression analytique d'un demi-tour d'axe (Δ) que lorsque celui-ci est parallèle à l'un des axes du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(Δ) est la droite ayant pour système d'équations : $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$; on désigne par s_Δ le demi-tour d'axe (Δ) .

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace, $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ son image par s_Δ et I le point d'intersection de (MM') et de (Δ) .

On a : $(MM') \perp (\Delta) \Leftrightarrow z' - z = 0 ;$

$I \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = 2a \\ y + y' = 2b \end{cases}$



On en déduit la propriété suivante.

Propriété

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'expression analytique du demi-tour d'axe (Δ) ayant pour système d'équations $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ est :

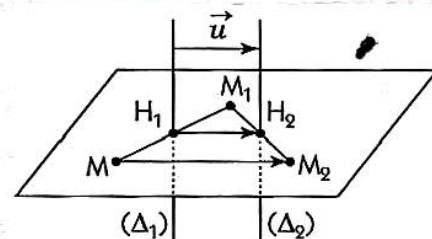
$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \\ z' = z \end{cases}$$

On obtient des résultats analogues lorsque (Δ) est parallèle à la droite de repère $(O, \vec{i})$ ou à la droite de repère $(O, \vec{j})$.

Composée de deux demi-tours

Propriétés 1

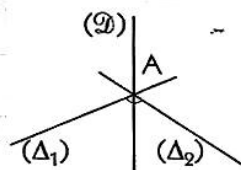
- La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est une translation de vecteur orthogonal à ces deux axes.
- Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est la composée de deux demi-tours d'axes parallèles ayant $\vec{u}$ pour vecteur orthogonal.



Ces propriétés se démontrent de la même façon que celles relatives à la composée de deux réflexions de plans parallèles.

Propriétés 2

- La composée de deux demi-tours d'axes (Δ_1) et (Δ_2) perpendiculaires en un point A est le demi-tour dont l'axe $(\mathcal{D})$ est la perpendiculaire commune à (Δ_1) et (Δ_2) en A.
- Tout demi-tour de $\mathcal{C}$ est la composée de deux demi-tours d'axes perpendiculaires.



On a : $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} = s_{\mathcal{D}}$.

Démonstration

- (Δ_1) et (Δ_2) sont deux droites perpendiculaires et sécantes en un point A.

On désigne par :

$(\mathcal{P})$ le plan contenant (Δ_1) et (Δ_2) ;

(Π_1) et (Π_2) les plans perpendiculaires à $(\mathcal{P})$ contenant respectivement (Δ_1) et (Δ_2) ;

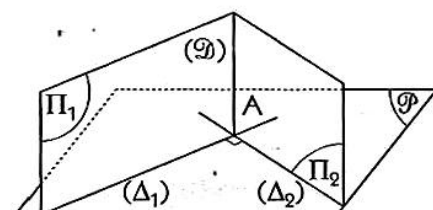
$(\mathcal{D})$ la droite d'intersection de (Π_1) et (Π_2) .

On a : $s_{\Delta_1} = s_{\Pi_1} \circ s_{\mathcal{P}}$ et $s_{\Delta_2} = s_{\mathcal{P}} \circ s_{\Pi_2}$; donc : $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} = s_{\Pi_1} \circ s_{\Pi_2}$.

De plus : $(\Pi_1) \perp (\Pi_2)$; donc : $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} = s_{\mathcal{D}}$.

On démontrerait de même que : $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = s_{\mathcal{D}}$.

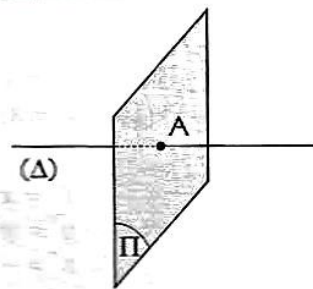
- Réciproquement, soit $(\mathcal{D})$ et (Δ) deux droites perpendiculaires en un point A, (Δ') la droite orthogonale en A au plan défini par $(\mathcal{D})$ et (Δ) . On a : $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = s_{\mathcal{D}}$.



Propriétés

• La composée d'un demi-tour d'axe (Δ) et d'une réflexion de plan (Π) , tel que (Δ) est orthogonale à (Π) en un point A , est la symétrie de centre A .

• Toute symétrie centrale de $\mathcal{E}$ est la composée d'un demi-tour et d'une réflexion dont l'axe et le plan sont orthogonaux.



On a : $s_{\Delta} \circ s_{\Pi} = s_{\Pi} \circ s_{\Delta} = s_A$.

Démonstration

• (Δ) est une droite et (Π) un plan orthogonal à (Δ) en un point A .

Soit M un point de $\mathcal{E}$, M_1 son image par s_{Π} et M_2 l'image de M_1 par s_{Δ} .

– Si $M \in (\Delta)$, alors $M_1 \in (\Delta)$ et $M_2 = M_1$.

Donc : M_2 est le symétrique de M par rapport à A .

– Si $M \notin (\Delta)$, on désigne par :

$(\mathcal{P})$ le plan contenant M et (Δ) ;

$(\mathcal{D})$ la droite d'intersection de $(\mathcal{P})$ et (Π) .

La restriction de s_{Π} à $(\mathcal{P})$ est la symétrie $s_{\mathcal{D}}$ d'axe $\mathcal{D}$.

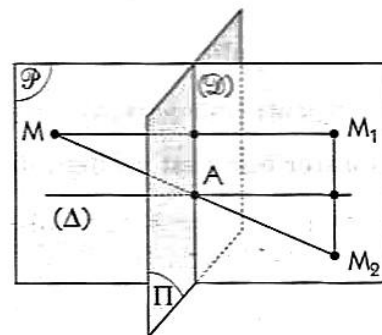
Dans le plan $(\mathcal{P})$, on a : $s_{\Delta} \circ s_{\mathcal{D}} = s_A$; donc : M_2 est le symétrique de M par rapport à A .

On en déduit que : $s_{\Delta} \circ s_{\Pi} = s_A$.

On démontrerait de même que : $s_{\Pi} \circ s_{\Delta} = s_A$.

• Réciproquement, soit A un point et (Π) un plan contenant A .

Si on désigne par (Δ) la droite orthogonale à (Π) en A , on a : $s_{\Delta} \circ s_{\Pi} = s_{\Pi} \circ s_{\Delta} = s_A$.



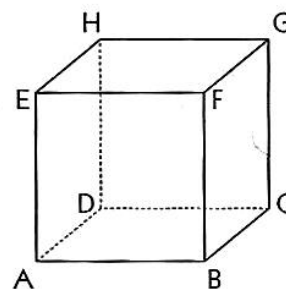
Exemples

Soit ABCDEFGH un cube.

• La composée des demi-tours d'axes (AE) et (BF) est la translation de vecteur $2\vec{AB}$.

• La composée des demi-tours d'axes (AD) et (CD) est le demi-tour d'axe (DH) .

• La composée du demi-tour d'axe (AB) et de la réflexion de plan (BCG) est la symétrie de centre B .



3.3. Travaux dirigés

1. Expression analytique d'une réflexion, d'un demi-tour

1°) Soit (Π) le plan d'équation cartésienne : $2x - y + z = 1$.

Déterminer l'expression analytique de la réflexion s de plan (Π) .

Solution

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ son image par la réflexion s de plan (Π) .

On désigne par I le milieu de $[MM']$. $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Π) .

$$\text{On a : } M' = s(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \wedge \vec{n} = \vec{0} \\ I \in (\Pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x'-x & 2 \\ y'-y & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'-y & -1 \\ z'-z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z'-z & 1 \\ x'-x & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ 2(x+x') - (y+y') + (z+z') = 2 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \begin{vmatrix} x'-x & 2 \\ y'-y & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'-y & -1 \\ z'-z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z'-z & 1 \\ x'-x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = 2(z'-z) \\ y'-y = -(z'-z) \end{cases};$$

$$\text{donc : } M' = s(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 2z + 2z' \\ y' = y + z - z' \\ z' = -2x + y - z - 2x' + y' + 2 \end{cases}$$

$$\text{En procédant par substitution, on obtient l'expression analytique de } s : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z + 1) \end{cases}$$

$$2^\circ) \text{ Soit } f \text{ l'application de } \mathcal{E} \text{ dans } \mathcal{E} \text{ d'expression analytique : } \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y - z + 12) \end{cases}$$

Démontrer que f est un demi-tour dont on précisera l'axe (Δ) .

Solution

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ son image par f .

- Déterminons l'ensemble des points invariants par f .

$$\text{On a : } f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 2z = 6 \\ 2x + 4y - 2z = -6 \\ 2x - 2y + 4z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

On obtient un système d'équations cartésiennes de la droite (Δ) de repère $(A, \vec{u})$ tel que :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Démontrons que f est le demi-tour d'axe (Δ) .

On a : $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = -(x'-x) + (y'-y) + (z'-z) = 0$; donc les droites (MM') et (Δ) sont orthogonales.

De plus, le point I de coordonnées $\left(\frac{x'+x}{2} ; \frac{y'+y}{2} ; \frac{z'+z}{2} \right)$ appartient à (Δ) .

Donc, f est le demi-tour d'axe (Δ) .

M

Pour démontrer qu'une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une symétrie orthogonale (réflexion ou demi-tour), on peut utiliser le procédé suivant :

- déterminer l'ensemble (E) des points invariants ;
- démontrer que pour tout point M et son image M' :
 - la droite (MM') est orthogonale à (E) ;
 - le milieu I de $[MM']$ appartient à (E) .

2. Éléments de symétrie du cube, du tétraèdre régulier

1°) Déterminer les plans et axes de symétrie d'un cube ABCDEFGH de centre O.

Solution

O est l'isobarycentre du cube ; donc O est sa propre image par toute transformation laissant globalement invariant le cube.

On en déduit que tout plan ou axe de symétrie du cube passe par O.

Recherche des plans de symétrie du cube

Soit (Π) un plan de symétrie du cube et s_{Π} la réflexion de plan (Π) .

Au moins un des sommets du cube n'appartient pas à (Π) et a pour image par s_{Π} un autre sommet.

Donc tout plan de symétrie du cube est nécessairement le plan médiateur d'une paire de sommets.

Il ne peut donc y avoir que 3 types de plans de symétrie : les plans médiateurs des arêtes, les plans médiateurs des diagonales des faces et les plans médiateurs des diagonales du cube.

– Les plans médiateurs des arêtes

On obtient 3 plans distincts : les plans médiateurs de [AB] (figure 1), [AD] et [AE] qui sont tous des plans de symétrie du cube.

– Les plans médiateurs des diagonales des faces

On obtient 6 plans distincts : les plans médiateurs de [AC], [BD], [AF], [BE], [AH] et [DE] (figure 2) qui sont tous plans de symétrie du cube.

– Les plans médiateurs des diagonales du cube

On obtient 4 plans : les plans médiateurs de [AG], [BH] (figure 3), [CE] et [DF].

On vérifie que ces 4 derniers plans ne sont pas des plans de symétrie du cube.

En effet, l'image G' de G par la réflexion de plan le plan médiateur de [BH] (figure 3) appartient à la parallèle à (BH) passant par G ; donc, G n'est pas un sommet du cube.

Il existe donc 9 plans de symétrie du cube.

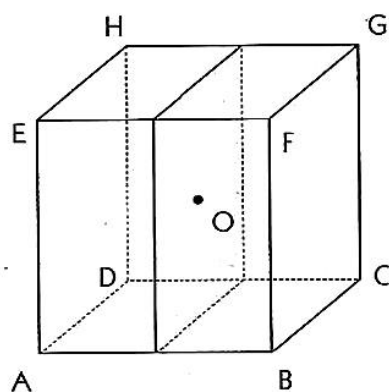


figure 1

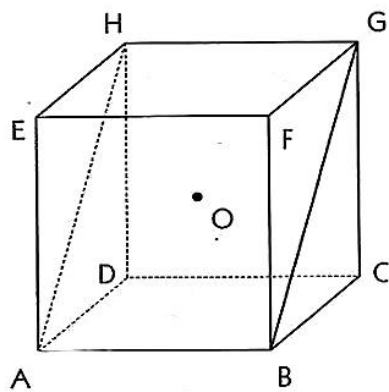


figure 2

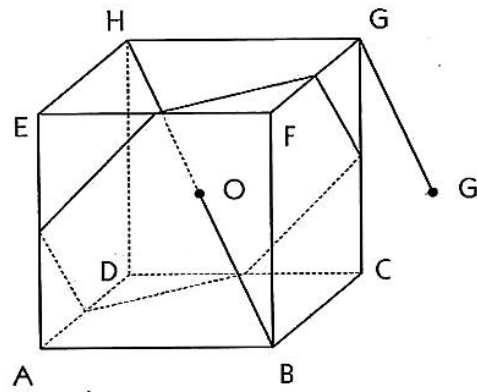


figure 3

Recherche des axes de symétrie du cube

Soit (Π) un plan de symétrie du cube, donc passant par O, et (Δ) la perpendiculaire à (Π) en O.

On a : $s_{\Pi} \circ s_{\Delta} = s_O \Leftrightarrow s_{\Pi} \circ s_O = s_{\Delta}$ (figure 4).

s_{Π} et s_O laissent globalement invariant le cube ; donc (Δ) est un axe de symétrie du cube.

On en déduit qu'il existe au moins 9 axes de symétrie du cube.

Démontrons qu'il n'en existe pas d'autres.

Soit $(\mathcal{Q})$ un axe de symétrie du cube, donc passant par O, et $(\mathcal{P})$ le plan perpendiculaire à $(\mathcal{Q})$ en O.

On a : $s_{\mathcal{P}} \circ s_O = s_{\mathcal{Q}} \Leftrightarrow s_{\mathcal{P}} = s_{\mathcal{Q}} \circ s_O$;

donc, $s_{\mathcal{P}}$ est une réflexion et $(\mathcal{P})$ est un plan de symétrie du cube.