

figure 4

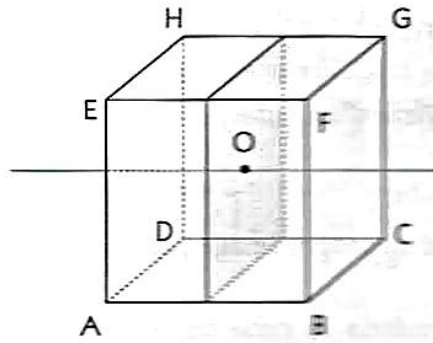


figure 5

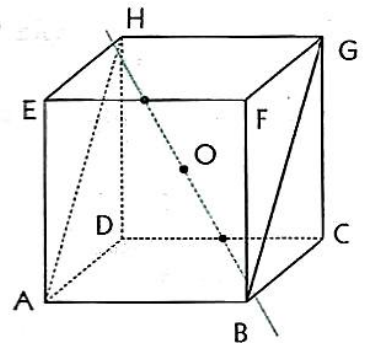


figure 6

Le cube possède 9 axes de symétrie :

- les droites joignant les centres de deux faces opposées (figure 5), au nombre de 3 ;
- les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées (figure 6), au nombre de 6.

2°) Déterminer les plans et axes de symétrie d'un tétraèdre régulier ABCD de centre O.

Solution

O est l'isobarycentre du tétraèdre (figure 1) ; donc O est sa propre image par toute transformation laissant globalement invariant le tétraèdre.

On en déduit que tout plan ou axe de symétrie du tétraèdre passe par O.

Recherche des plans de symétrie du tétraèdre régulier

Soit (Π) un plan de symétrie du tétraèdre.

Au moins un des sommets du tétraèdre n'appartient pas à (Π) et a pour image par s_{Π} un autre sommet. Donc tout plan de symétrie du tétraèdre est nécessairement le plan médiateur d'une paire de sommets. On sait que dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales ; donc, tout plan médiateur d'une arête contient les deux autres sommets.

On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [AC], [BD], [AD] et [BC].

On obtient 6 plans distincts : (ICD) (figure 2), (JAB), (KBD), (LAC), (MBC) et (NAD) qui sont tous plans de symétrie du tétraèdre.

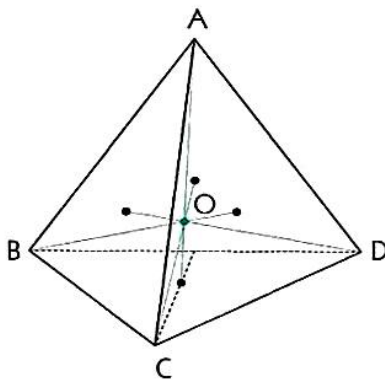


figure 1

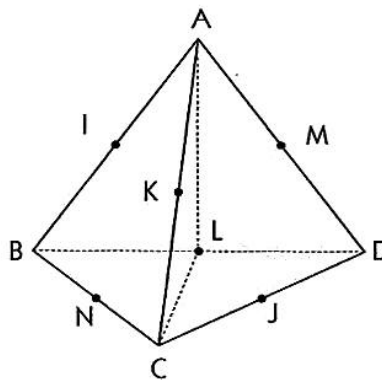


figure 2

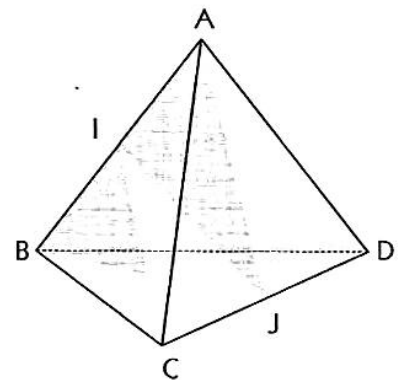


figure 3

Recherche des axes de symétrie du tétraèdre régulier

Les plans de symétrie se répartissent en trois paires de plans perpendiculaires :

- les plans médiateurs de [AB] et [CD], perpendiculaires et sécants suivant la droite (IJ) (figure 3) ;
- les plans médiateurs de [AC] et [BD], perpendiculaires et sécants suivant la droite (KL) ;
- les plans médiateurs de [AD] et [BC], perpendiculaires et sécants suivant la droite (MN).

Or, la composée de deux réflexions de plans perpendiculaires est le demi-tour ayant pour axe la droite d'intersection de ces plans.

Ces réflexions laissent invariant le tétraèdre ; donc, le demi-tour laisse également invariant le tétraèdre et en est un axe de symétrie.

Il y a donc au moins 3 axes de symétrie : (IJ), (KL) et (MN).

Nous admettons que ce sont les seuls axes de symétrie du tétraèdre.

Exercices

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 3.a Soit ABCDEFGH un cube de centre O et les réflexions $s_1 = s_{(OEFH)}$, $s_2 = s_{(OFGH)}$.
1. Déterminer les images des sommets du cube par les transformations s_1 , s_2 et $s_2 \circ s_1$.
 2. Conjecturer la nature de $s_2 \circ s_1$. Démontrer cette conjecture.

- 3.b Soit ABCDEFGH un cube.
1. Construire l'image de ce cube par la transformation $f = s_{(AE)} \circ s_{(AD)} \circ s_{(AB)}$.
 2. Conjecturer la nature de f. Démontrer cette conjecture.

- 3.c Soit OABC un tétraèdre tel que les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles et isocèles en O. On désigne par I, J et K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].
1. Démontrer que les plans (OIA), (OJB) et (OKC) sont des plans de symétrie du tétraèdre.
 2. Déterminer les transformations $s_{(OIA)} \circ s_{(OBC)}$, $s_{(OJB)} \circ s_{(OCA)}$ et $s_{(OKC)} \circ s_{(OAB)}$.
 3. Le tétraèdre OABC admet-il un axe de symétrie ?

- 3.d Soit ABCD un tétraèdre tel que les triangles CAD et CBD sont rectangles et isocèles respectivement en A et B, les plans (CAD) et (CBD) sont perpendiculaires.

Déterminer les plans et axes de symétrie de ce tétraèdre.

- 3.e Soit les points $A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $C\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Déterminer les coordonnées de G et démontrer que la droite (OG) est orthogonale au plan (ABC).
2. Déterminer les coordonnées de l'image de O par la réflexion $s_{(ABC)}$.
3. Déterminer les coordonnées des images de O, A, B et C par le demi-tour $s_{(OG)}$.

- 3.f Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $2x - y + z = 3$ et A le point de coordonnées $(3 ; 2 ; 2)$.

1. Déterminer les coordonnées des images respectives O' et A' des points O et A par la réflexion de plan $(\mathcal{P})$.
2. Démontrer que les droites (OA) et (O'A') sont sécantes en un point de $(\mathcal{P})$ dont on précisera les coordonnées.

- 3.g Soit $(\mathcal{D})$ la droite de représentation paramétrique
- $$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

et A le point de coordonnées $(2 ; 2 ; -1)$. Déterminer les coordonnées des images respectives O' et A' des points O et A par le demi-tour d'axe $(\mathcal{D})$.

Exercices

Sauf indication contraire, l'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

APPRENTISSAGE

Projections de l'espace

1 Soit ABCDEFGH un pavé.
Construire l'image du parallélogramme EFGH par la projection sur le plan (ABC) parallèlement à la droite (DF).

2 ABCD est un tétraèdre, G est son isobarycentre et A' est le centre de gravité du triangle BCD.
Soit p la projection sur le plan (BCD) parallèlement à la droite (AA').

- Utiliser la propriété de conservation du barycentre d'une projection pour démontrer que : $G \in (AA')$.
- En déduire que les droites joignant chaque sommet d'un tétraèdre au centre de gravité de la face opposée sont concourantes en un point, isobarycentre de ce tétraèdre.

3 Soit ABCD un losange et $(\mathcal{P})$ un plan non perpendiculaire au plan (ABC).
À quelle condition le projeté orthogonal de ABCD sur $(\mathcal{P})$ est-il un losange ?

4 Soit ABC un triangle équilatéral et $(\mathcal{P})$ un plan non perpendiculaire au plan (ABC).
Préciser la condition pour que le projeté orthogonal de ABC sur $(\mathcal{P})$ soit :

- un triangle isocèle ;
- un triangle équilatéral.

5 Soit ABC un triangle équilatéral et $(\mathcal{P})$ un plan tel que le projeté orthogonal A'B'C' de ABC sur $(\mathcal{P})$ soit un triangle rectangle et isocèle en A.
1. Démontrer que la droite (BC) est parallèle à $(\mathcal{P})$.
2. Soit I le milieu de [BC] et I' le projeté orthogonal de I sur $(\mathcal{P})$. Calculer une mesure de l'angle $(\vec{I'A'}, \vec{IA})$.

6 Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et $(\mathcal{P})$ un plan non perpendiculaire au plan (ABC).
Préciser la condition pour que le projeté orthogonal A'B'C' de ABC sur $(\mathcal{P})$ soit :

- un triangle rectangle en A' ;
- un triangle rectangle et isocèle en A' ;
- un triangle isocèle en A' et non rectangle.

7 Soit le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x - 2y + z = 1$ et la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ et le point } A \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que $(\mathcal{D})$ est orthogonale à $(\mathcal{P})$ en un point I dont on précisera les coordonnées.
- Déterminer les images respectives A_1 et A_2 de A par les projections orthogonales sur $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$.
- Vérifier que AA_1IA_2 est un rectangle.

8 Soit le plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $x + y + z = 3$.
Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur $(\mathcal{P})$.

9 La droite $(\mathcal{D})$ a pour système d'équations :

$$\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur $(\mathcal{D})$.

Translations, homothéties

10 Soit les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations respectives : $2x + 3y + z + 2 = 0$ et $2x + 3y + z - 2 = 0$.

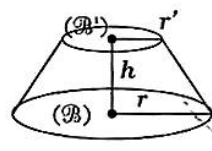
- Vérifier que ces deux plans sont parallèles.
- En déduire qu'il existe une translation, dont on déterminera le vecteur, qui transforme $(\mathcal{P})$ en $(\mathcal{P}')$.

11 Soit ABCDEFGH un cube.
On désigne par I le milieu du segment [BC] et J le centre de la face BCGF.
Déterminer les coordonnées dans le repère (A, B, D, E) des images des sommets du cube par la translation t de vecteur $\vec{IJ}$.

12 Soit ABCDEFGH un cube et f l'application qui, à tout point M de $\mathcal{E}$, associe le point M' tel que :
 $\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MH} - \vec{MB} - \vec{ME}$.
Démontrer que f est une translation.

13 Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K les milieux respectifs de [AB], [AC], [AD].
1. Calculer l'aire du triangle IJK en fonction de celle du triangle BCD.
2. Calculer le volume du tétraèdre ABCD en fonction de celui du tétraèdre AIJK.

14 Un tronc de cône de révolution est tel que l'aire de la grande base $(\mathcal{B})$ est le double de celle de la petite base $(\mathcal{B}')$.



Démontrer qu'il existe deux homothéties, dont on précisera les centres et les rapports, transformant $(\mathcal{B})$ en $(\mathcal{B}')$.

15 Soit $(\mathcal{S})$ une sphère et A un point de $(\mathcal{S})$.
Déterminer le lieu des symétriques de A par rapport aux points de $(\mathcal{S})$.

16 ABCD est un tétraèdre.
Soit h_1 l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et h_2 l'homothétie de centre C et de rapport 2.
1. Construire l'image de ABCD par $h_2 \circ h_1$.
2. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $h_2 \circ h_1$.

17 Soit les points :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B' \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer qu'il existe une homothétie h , dont on précisera le centre et le rapport, telle que :

$$A' = h(A) \text{ et } B' = h(B).$$

2. Déterminer l'image du point O par h .

Symétries orthogonales

18 Soit ABCDEFGH un cube.

Le plan est muni du repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression analytique des réflexions de plans $(\mathcal{P})$.

$$a) (\mathcal{P}) = (EFG)$$

$$b) (\mathcal{P}) = (CDE)$$

$$c) (\mathcal{P}) = (BCH)$$

$$d) (\mathcal{P}) = (BDF).$$

19 1. Démontrer que la composée d'une réflexion de plan (Π) et d'une translation est une réflexion de plan parallèle à (Π) .

2. Démontrer que la composée d'un demi-tour d'axe (Δ) et d'une translation est un demi-tour d'axe parallèle à (Δ) .

20 Soit SABCD une pyramide régulière dont la base ABCD est un carré de centre I . Déterminer les plans et axes de symétrie de cette pyramide.

21 Soit SABCD une pyramide régulière, dont la base ABCD est un carré de centre I de côté 1 et telle que les plans (SAB) et (SCD) sont perpendiculaires.

1. Déterminer les coordonnées de S dans le repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que :

$$\vec{AB} = \vec{i} \text{ et } \vec{AD} = \vec{j}.$$

2. Déterminer les coordonnées des images de S, A, B, C et D par les transformations suivantes :

a) réflexion de plan (SAB)

b) demi-tour d'axe (SA)

c) homothétie de centre S et de rapport -2 .

22 Soit ABCD un tétraèdre dont la face BCD est un triangle équilatéral et les faces ABC, ACD, ADB sont des triangles rectangles et isocèles.

1. Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (ACD).

2. Déterminer les plans et axes de symétrie de ce tétraèdre.

2. Préciser les images des points A, B, C et D par les transformations suivantes :

a) réflexion de plan (BCD)

b) réflexion de plan (ABC)

c) demi-tour d'axe (AB)

d) demi-tour d'axe (CD).

23 ABCD est un tétraèdre régulier. On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AD], [DC], [CB], [BA], [AC] et [BD].

1. Démontrer que IJKL est un carré et que la droite (MN) est orthogonale au plan (IJK).

2. Soit d_1 et d_2 les demi-tours d'axes respectifs (IK) et (JL), s la réflexion de plan (IJK). On pose : $d = d_2 \circ d_1$.

a) Déterminer deux réflexions s_1 et s_2 telles que :

$$d_1 = s \circ s_1 \text{ et } d_2 = s_2 \circ s.$$

b) En déduire que d est un demi-tour dont on précisera l'axe.

APPROFONDISSEMENT

24 $(\mathcal{P})$ est un plan, (Δ) une droite sécante avec $(\mathcal{P})$ en un point O , I un point extérieur à $(\mathcal{P})$ et à (Δ) .

Soit p_1 la projection sur $(\mathcal{P})$ parallèlement à (Δ) et p_2 la projection sur (Δ) parallèlement à $(\mathcal{P})$.

À tout point M de $\mathcal{E}$, on associe les points M_1 et M_2 tels que : $M_1 = p_1(M)$ et $M_2 = p_2(M)$.

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des points M de $\mathcal{E}$ tels que les points I, M_1 et M_2 sont alignés.

1. Démontrer que si I, M_1 et M_2 sont alignés, alors M appartient au plan (Π) contenant I et (Δ) .

2. On désigne par I_1 et I_2 les images respectives de I par p_1 et p_2 .

a) Déterminer une équation de (E) dans le repère (O, I_1, I_2) de (Π) .

b) En déduire la nature de (E) .

25 Soit ABCD un tétraèdre et M un point de l'espace n'appartenant à aucune arête du tétraèdre et tel que :

– le plan (ABM) et la droite (CD) sont sécants en un point P ;

– le plan (BCM) et la droite (DA) sont sécants en un point Q ;

– le plan (CDM) et la droite (AB) sont sécants en un point R ;

– le plan (DAM) et la droite (BC) sont sécants en un point S .

On se propose de démontrer que les points P, Q, R et S sont coplanaires.

1. Démontrer qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d tels que :

$$a + b + c + d \neq 0 \text{ et } a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} + d\vec{MD} = \vec{0}.$$

2. a) En utilisant la projection sur la droite (CD) parallèlement au plan (ABM), démontrer que :

$$c\vec{PC} + d\vec{PD} = \vec{0}.$$

b) Démontrer de façon analogue que :

$$b\vec{QB} + c\vec{QC} = \vec{0} ; a\vec{RA} + b\vec{RB} = \vec{0} ; a\vec{SA} + d\vec{SD} = \vec{0}.$$

3. Déduire des questions précédentes que :

$$(a + b)\vec{MR} + (c + d)\vec{MP} = \vec{0} ;$$

$$(a + d)\vec{MS} + (b + c)\vec{MQ} = \vec{0}.$$

4. Conclure.

26 Soit ABCDEFGH un cube.

Construire l'intersection de ce cube avec le plan médiateur de [AG].

Quelle est la nature du polygone obtenu ?

27 Soit ABCDEFGH un cube de centre O , I le centre de gravité du triangle BCG.

On se propose de déterminer et construire les points d'intersection de la droite (OI) avec les plans des faces du cube.

1. Démontrer que le point d'intersection de la droite (OI) avec le plan (ADH) est le centre de gravité J du triangle AEH.

Placer le point J .

2. a) Démontrer que : $\vec{DJ} = 2\vec{CI}$.

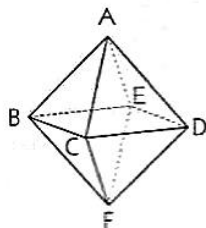
b) En déduire que les droites (CD) et (IJ) sont sécantes en un point K que l'on précisera.

Placer le point K .

c) Démontrer de même que les droites (EF) et (IJ) sont sécantes en un point L que l'on précisera.

Placer le point L .

28 Soit $ABCDEF$ un octaèdre régulier tel que $BCDE$ soit un carré de centre O et dont les faces sont des triangles équilatéraux.



1. Déterminer les plans de symétrie de cet octaèdre.

2. a) Démontrer que (AF) est un axe de symétrie de cet octaèdre.

b) Démontrer que les axes de symétrie du carré $BCDE$ sont des axes de symétrie de l'octaèdre.

c) Soit I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[DF]$. Démontrer que (IJ) est un axe de symétrie de l'octaèdre. Préciser les axes de symétrie analogues de l'octaèdre.

3. Soit G et G' les centres de gravité respectifs des triangles ABE et CDF .

a) Démontrer que O est milieu de $[GG']$ et que la droite (GG') est orthogonale aux plans (ABE) et (CDF) .

b) La droite (GG') est-elle un axe de symétrie de l'octaèdre ?

29 $ABCDEFGH$ est un cube et I est le centre de la face $EFGH$.

L'espace est muni du repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Soit s la réflexion de plan (ACE) et s' la réflexion de plan (CFH) .

1. Déterminer les expressions analytiques de s et de s' .

2. a) Démontrer que les plans (ACE) et (CFH) sont perpendiculaires.

b) En déduire l'expression analytique du demi-tour d'axe (CI) .

30 Soit (Π) le plan d'équation $2x + y - z = 3$ et (Δ) la droite orthogonale à (Π) passant par O .

1. Déterminer l'expression analytique des transformations suivantes :

a) réflexion s_{Π}

b) demi-tour s_{Δ}

c) $s_{\Delta} \circ s_{\Pi}$.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $s_{\Delta} \circ s_{\Pi}$.

31 1. Démontrer que toute symétrie centrale de $\mathcal{E}$ est la composée de trois réflexions.

2. Soit $ABCDEFGH$ un cube de centre O . On désigne par s_O la symétrie de centre O , $s_{(AOC)}$ la réflexion de plan (AOC) et $s_{(AG)}$ le demi-tour d'axe (AG) . Déterminer les transformations suivantes :

a) $s_O \circ s_{(AOC)}$ et $s_{(AOC)} \circ s_O$

b) $s_O \circ s_{(AG)}$ et $s_{(AG)} \circ s_O$.

32 Déterminer, en fonction de n , le nombre de réflexions laissant invariant une pyramide régulière dont la base est un polygone à n côtés.

33 Soit (Π) un plan, O un point extérieur à (Π) et H le projeté orthogonal de O sur (Π) .

On désigne par d le demi-tour d'axe (OH) , r la réflexion de plan (Π) , s la symétrie de centre O et t la translation de vecteur $2\vec{OH}$.

1. Comparer $r \circ s$ et $t \circ d$.

2. Déterminer $s \circ r$; y a-t-il commutativité ?

34 Soit $ABCDEFGH$ un cube de centre O .

Les plans médiateurs des arêtes découpent ce cube en huit cubes $(K_A), (K_B), \dots, (K_H)$ contenant respectivement les sommets $A, B, \dots, H$.

On désigne par s_1, s_2 et s_3 les réflexions transformant A respectivement en B, D et E .

1. Déterminer les images de (K_A) par s_1, s_2 et s_3 .

2. Déterminer la nature de $s_1 \circ s_2, s_2 \circ s_3$ et $s_3 \circ s_1$, ainsi que les images de (K_A) par chacune de ces transformations.

3. a) Déterminer l'image de (K_A) par $s = s_1 \circ s_2 \circ s_3$.

b) Déterminer les images de A, B, C et O par s .

c) En déduire la nature de s .

4. On désigne par σ_1 et σ_2 les réflexions de plans respectifs (AGH) et (GCF) .

a) Déterminer les images de $OABC$ par σ_1 et σ_2 .

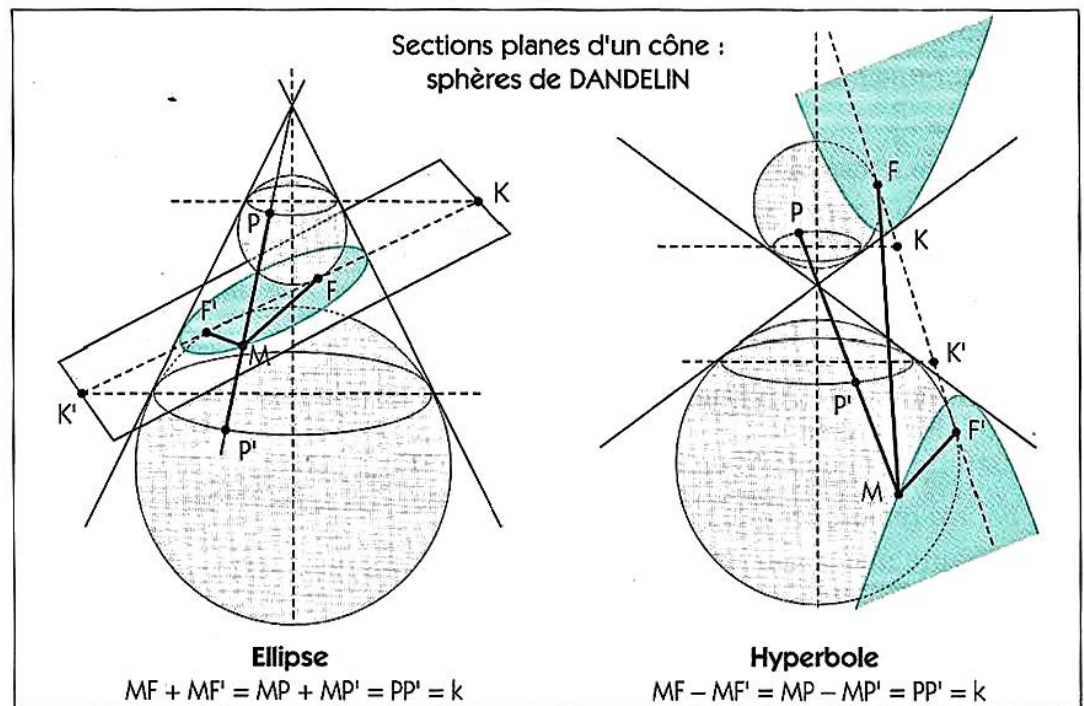
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\sigma_2 \circ \sigma_1$; déterminer l'image du tétraèdre $OABC$ par $\sigma_2 \circ \sigma_1$.

Introduction

Définies comme intersections d'un cône et d'un plan, l'étude des coniques par les Grecs remonte au IV^e siècle avant J.-C., le problème de la duplication du cube (construction géométrique de l'arête d'un cube dont le volume est le double de celui d'un cube donné) ayant conduit Ménéchme, élève d'Eudoxe et contemporain de Platon, sur leur piste.

Un peu plus tard, Euclide et Archimède se sont également intéressés à ces sections. Le grand maître fut cependant le géomètre grec Apollonius de Perga (vers 262 - vers 180 av. J.-C.) qui fut le premier à publier un ouvrage en huit volumes sur ces courbes. Dix-huit siècles plus tard, ces courbes ont été identifiées comme trajectoires de corps célestes.

Le mathématicien Pierre Dandelin (1794-1847) fut le premier à utiliser des sphères en contact avec le cône et le plan de section pour mettre en évidence les éléments caractéristiques des sections coniques (foyers, directrices).



SOMMAIRE

1. Étude générale des coniques	148
2. Étude de la parabole	154
3. Étude de l'ellipse	157
4. Étude de l'hyperbole	163

1 Étude générale des coniques

1.1. Conique définie par foyer et directrice

Introduction

Soit $(\mathcal{D})$ une droite, F un point n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$ et e un nombre réel strictement positif. Si M est un point du plan, on désigne par H son projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$.

On appelle (Γ_e) l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MF}{MH} = e$.

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $(\mathcal{D})$ et par (Δ) la droite (FK) .

• Justifier que (Δ) est un axe de symétrie de (Γ_e) .

On se propose de construire (Γ_e) pour les valeurs suivantes de e : 1, $\frac{3}{4}$ et 2.

1^{er} cas : $e = 1$

- Démontrer que le milieu S de $[FK]$ est élément de (Γ_1) .
- Démontrer que tout point de (Γ_1) appartient au demi-plan contenant F , délimité par la droite (T) passant par S et parallèle à $(\mathcal{D})$. (On pourra démontrer que tout point M de (Γ_1) vérifie : $MF \leq MK$.)

Soit P un point de $[SF]$, distinct de S , et $(\mathcal{D}_P)$ la perpendiculaire à (Δ) en P .

- Justifier qu'il existe deux points de $(\mathcal{D}_P)$ appartenant à (Γ_1) .
- En déduire une construction point par point de (Γ_1) .

On obtient une **parabole**.

2^e cas : $e = \frac{3}{4}$

- Construire le cercle $(\mathcal{C})$, ensemble des points M tels que : $\frac{MF}{MK} = \frac{3}{4}$.

- Justifier qu'il existe deux points A et A' de (Δ) , appartenant à $(\Gamma_{3/4})$.

Soit M un point de $(\Gamma_{3/4})$, distinct de A et A' .

- Démontrer que : $\frac{MF}{MK} < \frac{3}{4}$; en déduire que M est intérieur à $(\mathcal{C})$.

Soit P un point de $[AA']$, distinct de A et A' , et $(\mathcal{D}_P)$ la perpendiculaire à (Δ) en P .

- Construire les points M de $(\mathcal{D}_P)$ appartenant à $(\Gamma_{3/4})$.

(On pourra remarquer que : $FM = \frac{3}{4} KP$.)

- En déduire une construction point par point de $(\Gamma_{3/4})$.

On obtient une **ellipse**.

3^e cas : $e = 2$

- Construire le cercle $(\mathcal{C})$, ensemble des points M tels que : $\frac{MF}{MK} = 2$.

- Justifier qu'il existe deux points A et A' de (Δ) , appartenant à (Γ_2) .

Soit P un point de (Δ) , distinct de A et A' , et $(\mathcal{D}_P)$ la perpendiculaire à (Δ) en P .

On suppose que : $P \in [AA']$.

- Démontrer que : $PF > 2 PK$.

En déduire que : $\forall M \in (\mathcal{D}_P), MF > 2 MH$;
 $(\mathcal{D}_P) \cap (\Gamma_2) = \emptyset$.

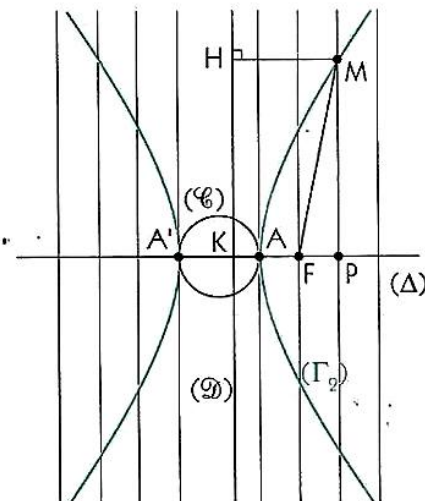
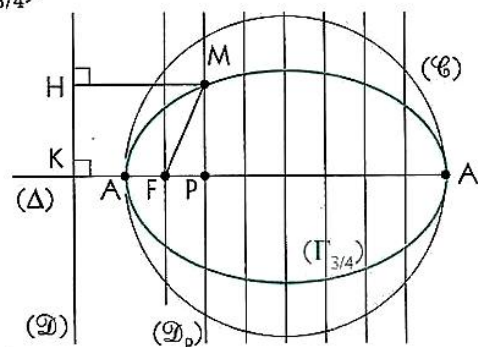
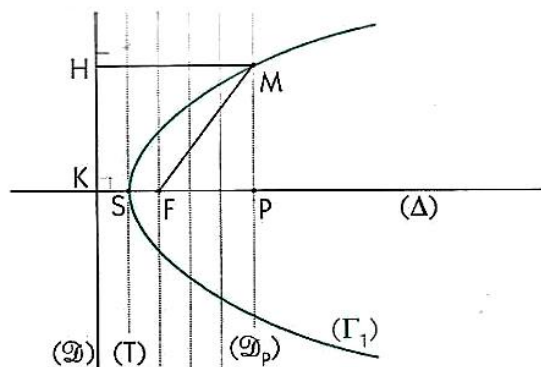
On suppose désormais que P est extérieur à $[AA']$.

- Construire les points M de $(\mathcal{D}_P)$ appartenant à (Γ_2) .

(On pourra remarquer que : $FM = 2 KP$.)

- En déduire une construction point par point de (Γ_2) .

On obtient une **hyperbole**.



Définitions et propriétés

Définitions

Soit $(\mathcal{D})$ une droite, F un point n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$ et e un nombre réel strictement positif. On appelle conique de foyer F , de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$, où H désigne le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

- Si $e = 1$, (Γ) est une parabole.
- Si $0 < e < 1$, (Γ) est une ellipse.
- Si $e > 1$, (Γ) est une hyperbole.

La propriété suivante a été démontrée dans l'introduction.

Propriété 1

Soit (Γ) une conique de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$.

La droite (Δ) passant par F et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ est un axe de symétrie de (Γ) .

(Δ) est appelée *axe focal* de la conique (Γ) .

Propriété 2

Soit (Γ) une conique d'excentricité e et d'axe focal (Δ) .

- Si $e = 1$, (Γ) coupe (Δ) en un point S .
- Si $e \neq 1$, (Γ) coupe (Δ) en deux points distincts A et A' .

Le point S est appelé *sommet* de la parabole.

Les points A et A' sont les *sommets* de la conique situés sur l'axe focal.

Démonstration

On désigne par K le projeté orthogonal du foyer F sur la directrice $(\mathcal{D})$.

Les points de (Γ) situés sur (Δ) sont les points M de (Δ) tels que : $\frac{MF}{MK} = e$.

- Si $e = 1$, il existe un unique point de (Γ) situé sur (Δ) : le milieu S de $[FK]$.
- Si $e \neq 1$, il existe deux points de (Γ) situés sur (Δ) :
 $A = \text{bar}\{(F, 1); (K, e)\}$,
 $A' = \text{bar}\{(F, 1); (K, -e)\}$.

Régionnement du plan par une conique

Définitions

Soit (Γ) une conique de foyer F , de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e .

Pour tout point M du plan dont le projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$ est H , on a :

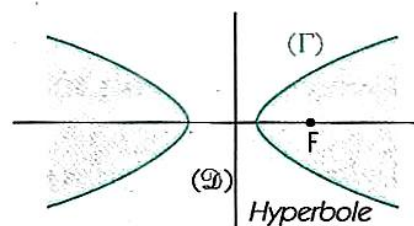
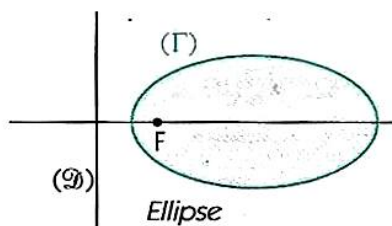
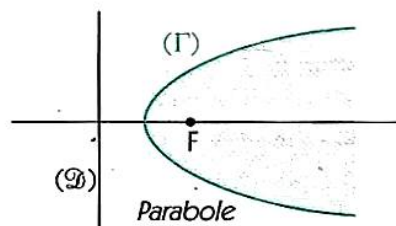
- M est intérieur à (Γ) si $MF < e MH$;
- M est extérieur à (Γ) si $MF > e MH$.

Remarques

- Le foyer F d'une conique est intérieur à cette conique.
- Tout point de la directrice $(\mathcal{D})$ d'une conique est extérieur à cette conique.

Toute conique (Γ) partage le plan en deux régions : l'intérieur et l'extérieur de (Γ) .

Sur les figures ci-dessous, on a colorié l'intérieur de chacune des coniques.



1.2. Équation réduite d'une conique

Équation réduite d'une parabole

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$.

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $(\mathcal{D})$; le milieu de $[FK]$ est le sommet S de $(\mathcal{P})$.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\vec{i} = \frac{1}{SF} \vec{SF}$.

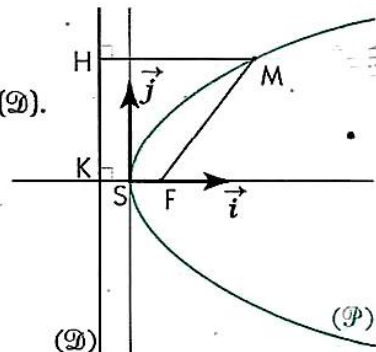
On pose : $KF = p$; on a $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et $(\mathcal{D}) : x = -\frac{p}{2}$.

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point du plan ; $H\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

On a : $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow MF = MH$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2px.$$



On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer F , de directrice $(\mathcal{D})$ et de sommet S .

Dans un repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{SF} \vec{SF}$, $(\mathcal{P})$ est la courbe d'équation $y^2 = 2px$, où p est la distance de F à $(\mathcal{D})$.

Cette équation est appelée **équation réduite** de la parabole.

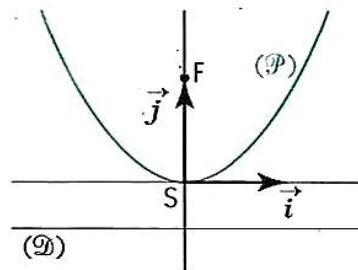
Le nombre réel strictement positif p est appelé **paramètre** de la parabole.

Remarques

• Un échange des axes de repères $(S, \vec{i})$ et $(S, \vec{j})$ conduit à une équation réduite de la forme : $x^2 = 2py$.

L'axe focal de la parabole est alors la droite de repère $(S, \vec{j})$, le foyer est

$F\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ p \end{smallmatrix}\right)$ et la directrice $(\mathcal{D}) : y = -\frac{p}{2}$.



• Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe d'équation $y^2 = 2ax$ ($a \neq 0$) est une parabole $(\mathcal{P})$ de sommet O , d'axe focal la droite de repère $(O, \vec{i})$ et de paramètre $|a|$.

Le foyer de $(\mathcal{P})$ est $F\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ et sa directrice $(\mathcal{D}) : x = -\frac{a}{2}$.

Exemples

• La courbe d'équation $y^2 + 4x = 0$ est une parabole de sommet O , d'axe focal la droite de repère $(O, \vec{i})$ et de paramètre 2. Son foyer est $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et sa directrice $(\mathcal{D}) : x = 1$.

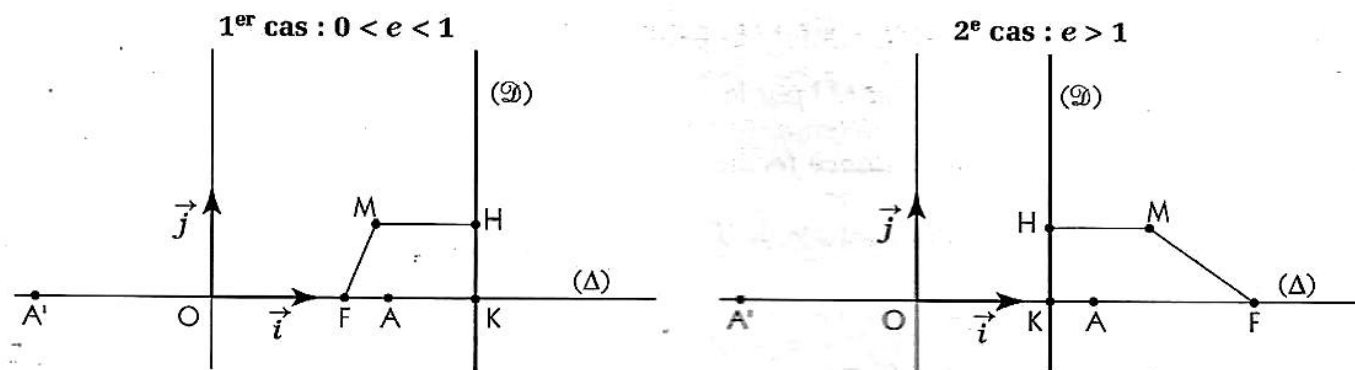
• La courbe d'équation $x^2 - 8y = 0$ est une parabole de sommet O , d'axe focal la droite de repère $(O, \vec{j})$ et de paramètre 4. Son foyer est $F\left(0, 2\right)$ et sa directrice $(\mathcal{D}) : y = -2$.

Équation réduite d'une conique à centre ($e \neq 1$)

Soit (Γ) la conique de foyer F , de directrice $(\mathcal{D})$, d'excentricité e ($e \neq 1$) et d'axe focal (Δ) .

(Γ) admet deux sommets A et A' sur (Δ) .

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que O est le milieu de $[AA']$ et $\vec{i} = \frac{1}{OA} \vec{OA}$.



On a : $A = \text{bar}\{(F, 1) ; (K, e)\} \Leftrightarrow \vec{OF} + e\vec{OK} = (1 + e)\vec{OA}$;

$A' = \text{bar}\{(F, 1) ; (K, -e)\} \Leftrightarrow \vec{OF} - e\vec{OK} = (1 - e)\vec{OA'}$.

On en déduit que : $\vec{OF} = e\vec{OA}$ et $\vec{OA} = e\vec{OK}$.

On pose : $a = OA$ et $c = OF$.

On a : $OF = eOA$ et $OA = eOK$; on en déduit que : $e = \frac{c}{a}$ et $OK = \frac{a^2}{c}$.

De plus, $F\left(\frac{c}{0}\right)$ et $(D) : x = \frac{a^2}{c}$.

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point du plan ; $H\left(\frac{a^2}{c}, y\right)$ est le projeté orthogonal de M sur (D).

On a : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MF = eMH$

$$\Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2) \frac{x^2}{a^2} + y^2 - (a^2 - c^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit (Γ) une conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e ($e \neq 1$).

On désigne par A et A' les sommets de (Γ) situés sur son axe focal.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que O est le milieu de $[AA']$ et $\vec{i} = \frac{1}{OA} \vec{OA}$, (Γ) est la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, où $a = OA$ et $c = OF$.

Cette équation est appelée **équation réduite de la conique**.

Remarques

• Un échange des axes de repères $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ conduit à une équation de la forme : $\frac{x^2}{b^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'axe focal de la conique est alors la droite de repère $(O, \vec{j})$, $F\left(\frac{0}{c}\right)$ est un foyer, $(D) : y = \frac{b^2}{c}$ une directrice, $B\left(\frac{0}{b}\right)$ et $B'\left(\frac{0}{-b}\right)$ sont les sommets de la conique situés sur l'axe focal.

• Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ ($a > 0$, $c > 0$ et $a \neq c$) est la conique de foyer $F\left(\frac{c}{0}\right)$, de directrice $(D) : x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

L'équation réduite d'une conique lorsque $e \neq 1$ permet de déduire des propriétés de symétrie.

Conséquences

Soit (Γ) une conique d'excentricité e ($e \neq 1$) et d'axe focal (Δ) .

On désigne par A et A' les sommets de (Γ) situés sur (Δ) .

• La médiatrice de $[AA']$ est un axe de symétrie de (Γ) .

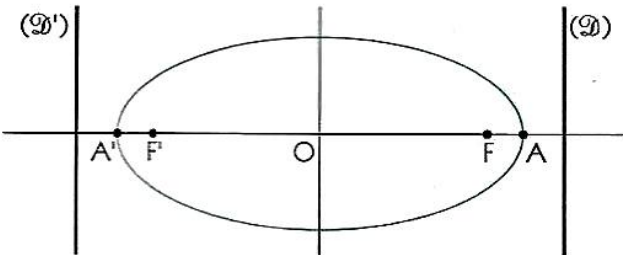
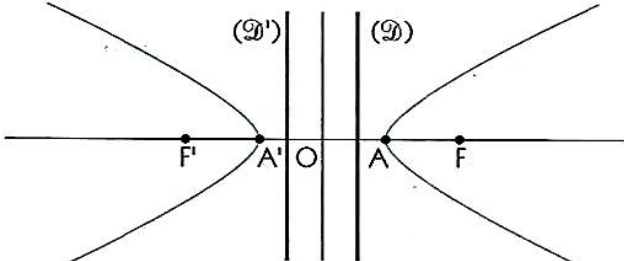
• Le milieu O de $[AA']$ est centre de symétrie de (Γ) .

De telles coniques sont appelées **coniques à centre** ; le centre de symétrie est appelé **centre de la conique**.

Remarques

- F' et $(\mathcal{D}')$, images respectives de F et $(\mathcal{D})$ par la symétrie de centre O , sont également un foyer et une directrice de (Γ) . (Γ) est parfaitement déterminée par la donnée de F' , $(\mathcal{D}')$ et e .
- On a : $FF' = 2c$; FF' est appelée **distance focale** de la conique à centre.

Le tableau suivant précise l'équation réduite de (Γ) suivant la nature de cette conique.

Ellipse ($0 < e < 1$)	Hyperbole ($e > 1$)
On a : $c < a$; on pose : $b^2 = a^2 - c^2$. L'équation réduite de l'ellipse est : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.	On a : $c > a$; on pose : $b^2 = c^2 - a^2$. L'équation réduite de l'hyperbole est : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
	

Exemples

- Soit $(\mathcal{E})$ la courbe d'équation : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. On a : $a = 5$ et $b = 3$; donc : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$.
 $(\mathcal{E})$ est l'ellipse de centre O , de foyers $F\left(\frac{4}{0}\right)$ et $F'\left(-\frac{4}{0}\right)$, de sommets $A\left(\frac{5}{0}\right)$ et $A'\left(-\frac{5}{0}\right)$ situés sur l'axe focal, de directrices $(\mathcal{D}) : x = \frac{25}{4}$ et $(\mathcal{D}') : x = -\frac{25}{4}$, d'excentricité $\frac{4}{5}$.
- Soit $(\mathcal{H})$ la courbe d'équation : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. On a : $a = 2$ et $b = 1$; donc : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$.
 $(\mathcal{H})$ est l'hyperbole de centre O , de foyers $F\left(\frac{\sqrt{5}}{0}\right)$ et $F'\left(-\frac{\sqrt{5}}{0}\right)$, de sommets $A\left(\frac{2}{0}\right)$ et $A'\left(-\frac{2}{0}\right)$ situés sur l'axe focal, de directrices $(\mathcal{D}) : x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ et $(\mathcal{D}') : x = -\frac{4}{\sqrt{5}}$, d'excentricité $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

1.3. Courbes d'équations $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$

Dans ce paragraphe, le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'équation $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$, où A et B sont non tous nuls.

On se propose de déterminer, sur quelques exemples, la nature de l'ensemble (Γ) des points M du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient cette équation.

1. Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) d'équation : $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$.

On a : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow (y + 1)^2 = 4(x - 2)$.

Soit $S\left(\frac{2}{-1}\right)$ et $(X ; Y)$ les coordonnées de M dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

On a : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow Y^2 = 4X$.

Donc, (Γ) est une parabole de sommet S , d'axe focal la droite de repère $(S, \vec{i})$ et de paramètre 2.

2. Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) d'équation : $4x^2 + y^2 + 16x + 7 = 0$.

On a : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Soit $O'\left(-\frac{2}{0}\right)$ et $(X ; Y)$ les coordonnées de M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

On a : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{9}{4}} + \frac{Y^2}{9} = 1$.

Donc, (Γ) est une ellipse de centre O' et d'axe focal la droite de repère $(O', \vec{j})$.

3. Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) d'équation : $x^2 - 3y^2 + 12y - 3 = 0$.

On a : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow -\frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$.

Soit $O' \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $(X; Y)$ les coordonnées de M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

On a : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow -\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{3} = 1$.

Donc, (Γ) est une hyperbole de centre O' et d'axe focal la droite de repère $(O', \vec{j})$.

4. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel m , la nature de l'ensemble (Γ_m) d'équation :

$$(m+2)x^2 + m^2y^2 + 2(m+2)x - (m+2)(m^2-1) = 0.$$

- Si $m = -2$, on a : $M \in (\Gamma_{-2}) \Leftrightarrow y^2 = 0$. Donc, (Γ_{-2}) est l'axe des abscisses.
- Si $m = 0$, on a : $M \in (\Gamma_0) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$. Donc, (Γ_0) est la droite d'équation : $x = -1$.

- Si $m \neq -2$ et $m \neq 0$, on a : $M \in (\Gamma_m) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{m^2} + \frac{y^2}{m+2} = 1$.

– Si $m < -2$, (Γ_m) est une hyperbole de centre $O' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

– Si $m > -2$, (Γ_m) est une ellipse de centre $O' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

en particulier : (Γ_{-1}) est le cercle d'équation $(x+1)^2 + y^2 = 1$,

(Γ_2) est le cercle d'équation $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

Exercices

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1.a Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$; on désigne par d la distance de F à $(\mathcal{D})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de $(\mathcal{P})$ dans un repère convenablement choisi.

a) $d = 2$ b) $d = 5$ c) $d = 8$ d) $d = \frac{1}{2}$.

- 1.b Soit (Γ) la conique de foyer F , de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e ; on désigne par d la distance de F à $(\mathcal{D})$.

Dans chacun des cas suivants :

- construire les sommets A et A' de (Γ) ;
- déterminer l'équation réduite de (Γ) dans un repère convenablement choisi.

a) $d = 5$ et $e = \frac{2}{3}$ b) $d = 3$ et $e = \frac{1}{2}$
c) $d = 3$ et $e = 2$ d) $d = 4$ et $e = 3$.

- 1.c Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la parabole de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$.

a) $F \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(\mathcal{D}) : x = 1$ b) $F \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $(\mathcal{D}) : x = 1$
c) $F \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $(\mathcal{D}) : y = 3$ d) $F \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $(\mathcal{D}) : y = -4$.

- 1.d Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la conique de foyer F , de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e .

a) $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\mathcal{D}) : x = 5$ et $e = \frac{1}{3}$

b) $F \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $(\mathcal{D}) : y = 1$ et $e = \frac{1}{2}$

c) $F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\mathcal{D}) : x = -1$ et $e = 2$

d) $F \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(\mathcal{D}) : y = 0$ et $e = 3$.

- 1.e Dans chacun des cas suivants, déterminer le foyer et la directrice de la parabole $(\mathcal{P})$.

a) $(\mathcal{P}) : y^2 = 4x$ b) $(\mathcal{P}) : x^2 + 4x + 4y = 0$

c) $(\mathcal{P}) : 2y^2 = 4x + 3$ d) $(\mathcal{P}) : y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

- 1.f Dans chacun des cas suivants, préciser la nature et les éléments caractéristiques (centre, axe focal; sommets situés sur l'axe focal, foyers, directrices et excentricité) de la conique (Γ) .

a) $(\Gamma) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ b) $(\Gamma) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$

c) $(\Gamma) : \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ d) $(\Gamma) : -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$.

- 1.g Dans chacun des cas suivants, démontrer que (E) est une équation d'une conique à centre dont on précisera le centre, l'axe focal et les sommets situés sur cet axe focal.

a) $(E) : x^2 + 2y^2 - 2x - 3 = 0$

b) $(E) : 3x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

c) $(E) : 2x^2 - y^2 - 4y - 12 = 0$

d) $(E) : -x^2 + y^2 + 6x + 2y - 16 = 0$.

2 Étude de la parabole

Dans cette leçon, le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2.1. Étude analytique

Tracé de la parabole

La parabole $(\mathcal{P})$ d'équation réduite $y^2 = 2px$ ($p > 0$) est la réunion des courbes représentatives $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ des fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{2px}$ et $f_2 : x \mapsto -\sqrt{2px}$.

$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont symétriques par rapport à la droite de repère $(O, \vec{i})$.

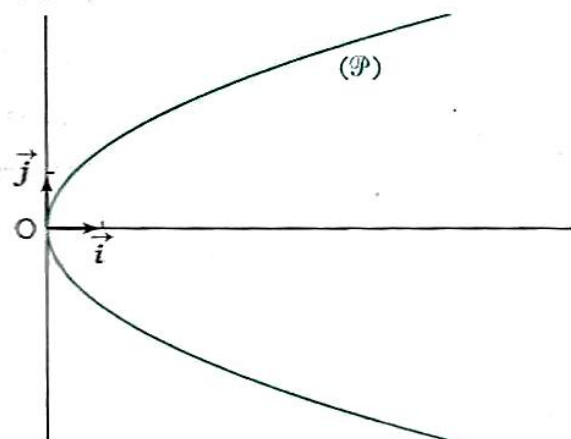
Étudions la fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{2px}$.

On a : $D_{f_1} = [0 ; +\infty[$;

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, f'_1(x) = \frac{p}{\sqrt{2px}}.$$

On en déduit le tableau de variation de f_1 et la courbe $(\mathcal{P})$.

x	0	$+\infty$
$f'_1(x)$		+
$f_1(x)$	0	$+\infty$



Éléments caractéristiques de la parabole

Équation		$y^2 = 2ax$	$x^2 = 2ay$
Paramètre			$ a $
Sommet			O
Axe focal		La droite de repère $(O, \vec{i})$	La droite de repère $(O, \vec{j})$
Foyer		$F\left(\frac{a}{2}, 0\right)$	$F\left(0, \frac{a}{2}\right)$
Directrice		$(\mathcal{D}) : x = -\frac{a}{2}$	$(\mathcal{D}) : y = -\frac{a}{2}$
Courbe	$a > 0$		
	$a < 0$		

Équation de la tangente en un point de la parabole

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 2ax$ ($a \neq 0$) et $M_0\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ un point de $(\mathcal{P})$.

• La tangente en O, sommet de $(\mathcal{P})$, a pour équation : $x = 0$.

• Si $y_0 > 0$, une équation de la tangente à $(\mathcal{P}_1)$ en M_0 est :

$$y - \sqrt{2ax_0} = \frac{a}{\sqrt{2ax_0}}(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad yy_0 - y_0^2 = a(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad yy_0 = a(x + x_0).$$

• Si $y_0 < 0$, une équation de la tangente à $(\mathcal{P}_2)$ en M_0 est :

$$y + \sqrt{2ax_0} = -\frac{a}{\sqrt{2ax_0}}(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad yy_0 = a(x + x_0).$$

Propriété

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation : $y^2 = 2ax$ ($a \neq 0$).

La tangente en un point $M_0\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ de $(\mathcal{P})$ a pour équation : $yy_0 = a(x + x_0)$.

Lorsque $(\mathcal{P})$ a pour équation $x^2 = 2ay$ ($a \neq 0$), la tangente a pour équation : $xx_0 = a(y + y_0)$.

Exemples

• Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation : $y^2 = -4x$.

Le point $M_0\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ appartient à $(\mathcal{P})$; la tangente en M_0 à $(\mathcal{P})$ a pour équation : $x + y - 1 = 0$.

• Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation : $x^2 - 8y = 0$.

Le point $M_0\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ appartient à $(\mathcal{P})$; la tangente en M_0 à $(\mathcal{P})$ a pour équation : $x - y - 2 = 0$.

Régionnement du plan par la parabole

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation : $y^2 = 2ax$ ($a \neq 0$).

Le foyer de $(\mathcal{P})$ est $F\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et sa directrice $(\mathcal{D})$: $x = -\frac{a}{2}$.

Pour tout point M du plan dont le projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$ est H, on a :

• M est intérieur à $(\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad MF^2 < MH^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 < \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 < 2ax ;$

• M est extérieur à $(\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad MF^2 > MH^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 > \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 > 2ax.$

2.2. Étude géométrique

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan et F un point n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$.

On se propose de construire point par point la parabole $(\mathcal{P})$ de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$, ainsi que la tangente en chacun de ces points.

• Soit H un point de $(\mathcal{D})$ et (Δ_H) la perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ en H.

Un point M de (Δ_H) appartient à $(\mathcal{P})$ si et seulement si : $MF = MH$.

Donc, le point d'intersection de (Δ_H) et de la médiatrice de [FH] est l'unique point de (Δ_H) appartenant à $(\mathcal{P})$.

Réciproquement, tout point M de $(\mathcal{P})$ qui se projette orthogonalement en H sur $(\mathcal{D})$, est tel que $MF = MH$, c'est-à-dire appartient à la médiatrice de [FH].

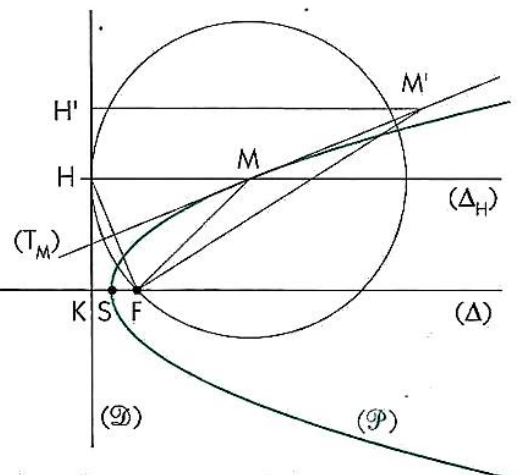
• Démontrons que la médiatrice de [FH] est la tangente (T_M) en M à $(\mathcal{P})$.

Soit M' un point de (T_M) , distinct de M, et H' le projeté orthogonal de M' sur $(\mathcal{D})$.

On a : $M'H = M'F$ et $M'H > M'H'$.

Donc : $M'F > M'H'$; c'est-à-dire M' est extérieur à $(\mathcal{P})$.

Tout point M' de (T_M) , distinct de M, est extérieur à $(\mathcal{P})$; donc (T_M) est la tangente à $(\mathcal{P})$ en M.



M

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$.

Pour construire un point de $(\mathcal{P})$ et sa tangente, on peut utiliser le procédé suivant :

- par un point H de $(\mathcal{D})$, tracer la droite (Δ_H) perpendiculaire à $(\mathcal{D})$;
- tracer la médiatrice de $[FH]$.

Ces deux droites se coupent en un point M de $(\mathcal{P})$.

La médiatrice de $[FH]$ est la tangente en M à $(\mathcal{P})$.

Remarque

La parabole $(\mathcal{P})$ de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$ est l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangents à $(\mathcal{D})$.

2.3. Travaux dirigés

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation : $y^2 = 2ax$ ($a \neq 0$).

1°) a) m étant un nombre réel non nul, démontrer qu'il existe une unique tangente à $(\mathcal{P})$ de coefficient directeur m .

b) Démontrer que cette tangente a pour équation : $y = mx + \frac{a}{2m}$.

2°) Soit $P(\alpha, \beta)$ un point du plan. Déterminer, suivant la position de P , le nombre de tangentes à $(\mathcal{P})$ passant par ce point.

3°) a) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à $(\mathcal{P})$.

b) Démontrer que dans ce cas, si on désigne par M_1 et M_2 les points de contact de ces tangentes avec $(\mathcal{P})$, la droite (M_1M_2) passe par un point fixe.

Solution

1°) a) La tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y^2 = 2ax$ ($a \neq 0$) a pour équation :

$yy_0 = a(x + x_0)$; donc, si $y_0 \neq 0$, elle a pour coefficient directeur : $\frac{a}{y_0}$.

On a : $m = \frac{a}{y_0} \Leftrightarrow y_0 = \frac{a}{m}$.

Donc, si $m \neq 0$, il existe une unique tangente à $(\mathcal{P})$ de coefficient directeur m .

b) Cette droite est la tangente à $(\mathcal{P})$ en $M_0(x_0, y_0)$ tel que : $y_0 = \frac{a}{m}$ et $x_0 = \frac{y_0^2}{2a} = \frac{a}{2m^2}$.

Cette tangente a pour équation : $y - \frac{a}{m} = m(x - \frac{a}{2m^2})$; c'est-à-dire : $y = mx + \frac{a}{2m}$.

2°) Une tangente à $(\mathcal{P})$, de coefficient directeur m , passe par le point $P(\alpha, \beta)$ si et seulement si :

$\beta = m\alpha + \frac{a}{2m}$; c'est-à-dire : $2\alpha m^2 - 2\beta m + a = 0$ (1).

Le discriminant réduit de l'équation (1) est : $\Delta' = \beta^2 - 2a\alpha$.

On en déduit que :

- si $\beta^2 - 2a\alpha > 0$, c'est-à-dire si P est extérieur à $(\mathcal{P})$, il existe deux tangentes à $(\mathcal{P})$ passant par P .
- si $\beta^2 - 2a\alpha = 0$, c'est-à-dire si P appartient à $(\mathcal{P})$, il existe une tangente à $(\mathcal{P})$ passant par P .
- si $\beta^2 - 2a\alpha < 0$, c'est-à-dire si P est intérieur à $(\mathcal{P})$, il n'existe pas de tangente à $(\mathcal{P})$ passant par P .

3°) a) Les tangentes à $(\mathcal{P})$ issues d'un point M sont perpendiculaires si et seulement leurs coefficients directeurs m_1 et m_2 sont tels que : $m_1 m_2 = -1$.

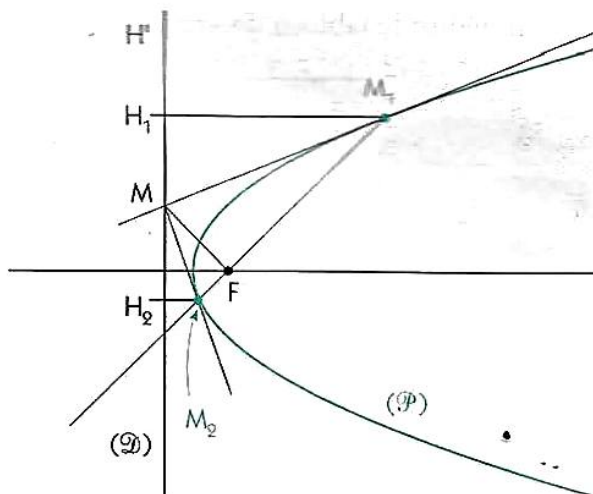
Or : $m_1 m_2 = \frac{a}{2\alpha}$; donc : $m_1 m_2 = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{a}{2}$.

Donc, l'ensemble des points M d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à $(\mathcal{P})$ est la droite d'équation $x = -\frac{a}{2}$, c'est-à-dire la directrice $(\mathcal{D})$ de $(\mathcal{P})$.

b) Soit M un point de $(\mathcal{D})$, M_1 et M_2 les points de contact des tangentes à $(\mathcal{P})$ issues de M , H_1 et H_2 les projetés orthogonaux respectifs de M_1 et M_2 sur $(\mathcal{D})$. On a :

- (MM_1) est la médiatrice de $[FH_1]$;
donc, par symétrie : $(MF) \perp (FM_1)$;
- (MM_2) est la médiatrice de $[FH_2]$;
donc, par symétrie : $(MF) \perp (FM_2)$;

On en déduit que la droite (M_1M_2) passe par le point F .



Exercices

- 2.a Tracer la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation : $y^2 = 8x$. Déterminer le point A de $(\mathcal{P})$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation : $2x + 3y - 3 = 0$. Déterminer une équation de cette tangente.
- 2.b Tracer la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation : $y^2 = 36x$. Déterminer les tangentes à $(\mathcal{P})$ passant par le point $P\left(\frac{2}{9}\right)$ ainsi que les coordonnées des points de contact de ces tangentes avec $(\mathcal{P})$.
- 2.c Tracer la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y^2 + 2x = 0$ et déterminer une équation de la tangente aux points de $(\mathcal{P})$ d'abscisse -1 .
- 2.d Soit $(\mathcal{P})$ une parabole de sommet S et M un point de $(\mathcal{P})$. La tangente (T_M) en M à $(\mathcal{P})$ coupe l'axe focal en un point T . Démontrer que le symétrique de T par rapport à S est le projeté orthogonal de M sur l'axe focal.
- 2.e Soit $(\mathcal{P})$ une parabole, M un point de $(\mathcal{P})$ et (T_M) la tangente en M à $(\mathcal{P})$. La perpendiculaire en M à (T_M) coupe l'axe focal en N . Démontrer que le symétrique de N par rapport au foyer F appartient à (T_M) .

3 Étude de l'ellipse

Dans cette leçon, le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3.1. Étude analytique

Tracé de l'ellipse

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

$(\mathcal{E})$ est la réunion des courbes représentatives $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ des fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et $f_2 : x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

$(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ sont symétriques par rapport à la droite de repère $(O, \vec{i})$.

Étudions la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

On a : $D_{f_1} = [-a ; a]$; f_1 est une fonction paire, on peut réduire son étude à $[0 ; a]$.

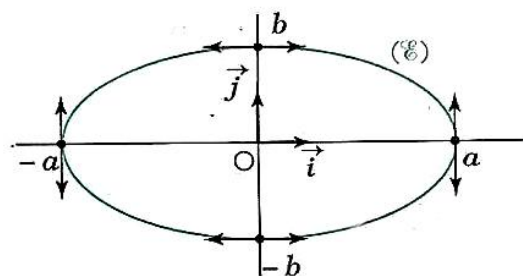
$$\forall x \in [0 ; a], f_1'(x) = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$\text{De plus, } \frac{f_1'(x) - f_1'(a)}{x - a} = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a - x}}{x - a} \sqrt{a + x} ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1'(x) - f_1'(a)}{x - a} = -\infty.$$

$(\mathcal{E}_1)$ admet une demi-tangente verticale au point $A\left(\frac{a}{0}\right)$.

On en déduit le tableau de variation de f_1 et la courbe ($\mathcal{E}$).

x	0	a
$f_1'(x)$	0	-
$f_1(x)$	b	0



Éléments caractéristiques de l'ellipse

	1 ^{er} cas : $a > b$	2 ^e cas : $a < b$
Équation	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Sommets	$A\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ $A'\left(\begin{smallmatrix} -a \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ $B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right)$ $B'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -b \end{smallmatrix}\right)$	
Axes	axe focal : (AA') grand axe : [AA'] petit axe : [BB']	axe focal : (BB') grand axe : [BB'] petit axe : [AA']
Foyers	$F\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $F'\left(\begin{smallmatrix} -c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$	$F\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ c \end{smallmatrix}\right)$ et $F'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -c \end{smallmatrix}\right)$
Directrices	$(\mathcal{D}) : x = \frac{a^2}{c}$ et $(\mathcal{D}') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(\mathcal{D}) : y = \frac{b^2}{c}$ et $(\mathcal{D}') : y = -\frac{b^2}{c}$
Cercles remarquables	cercle principal : $\mathcal{C}(O ; a)$ cercle secondaire : $\mathcal{C}(O ; b)$	cercle principal : $\mathcal{C}(O ; b)$ cercle secondaire : $\mathcal{C}(O ; a)$
Courbe		

$\mathcal{C}(O ; a)$ désigne le cercle de centre O et de rayon a .

Remarque

Lorsque $a = b$, ($\mathcal{E}$) est le cercle $\mathcal{C}(O ; a)$.

Équation de la tangente en un point de l'ellipse

On démontre la propriété suivante de façon analogue à celle concernant la parabole.

Propriété

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de $(\mathcal{E})$ a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Exemples

• Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Le point $M_0\left(\frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right)$ appartient à $(\mathcal{E})$; la tangente à $(\mathcal{E})$ en M_0 a pour équation : $9x + 20y - 75 = 0$.

• Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation : $4x^2 + y^2 = 4$.

Le point $M_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ appartient à $(\mathcal{E})$; la tangente à $(\mathcal{E})$ en M_0 a pour équation : $2\sqrt{3}x - y - 4 = 0$.

3.2. Ellipse et cercle

Représentation paramétrique de l'ellipse

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Pour tout point $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, on a : $M \in (\mathcal{E}) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \frac{x}{a} = \cos\theta \text{ et } \frac{y}{b} = \sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, x = a\cos\theta \text{ et } y = b\sin\theta.$$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = a \cos\theta \\ y = b \sin\theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$.

Remarque

Plus généralement, l'ellipse d'équation $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \cos\theta + \alpha \\ y = b \sin\theta + \beta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R}).$$

Exemples

• L'ellipse d'équation $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4\cos\theta - 1 \\ y = 2\sqrt{2}\sin\theta + 2 \end{cases} (\theta \in \mathbb{R}).$$

• Le système $\begin{cases} x = \cos\theta + 3 \\ y = 2\sin\theta - 1 \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de l'ellipse d'équation :

$$(x-3)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 ; \text{ c'est-à-dire : } 4x^2 + y^2 - 24x + 2y + 33 = 0.$$

Cercle principal et affinité

Soit a et b deux nombres réels ($a > b > 0$) et $(\mathcal{E})$ l'ellipse de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$.

On désigne par A et A' les sommets de $(\mathcal{E})$ situés sur l'axe focal et par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AA']$.

$(\mathcal{C})$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$.

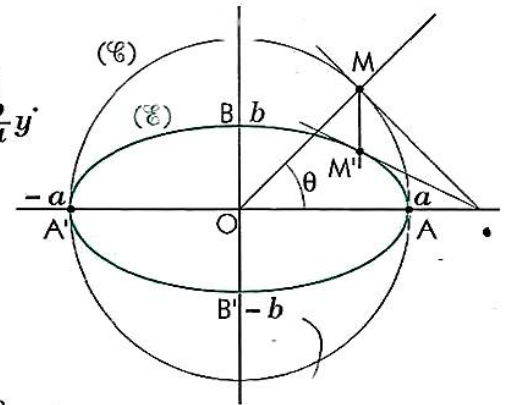
Soit f l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

L'image d'un point $M(x, y)$ par f est le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{a} y \end{cases}$.

On a : $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = a \cos \theta \\ y' = b \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow M' \in (\mathcal{E})$.



Donc $(\mathcal{E})$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par f . On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), de sommets A et A' situés sur l'axe focal.

$(\mathcal{E})$ est l'image du cercle de diamètre $[AA']$ par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

Remarque

• La tangente en M' à $(\mathcal{E})$ est l'image de la tangente en M à $(\mathcal{C})$ par l'affinité orthogonale ; donc, ces deux tangentes se coupent en un point de (AA') .

• Si on désigne par B et B' les sommets de $(\mathcal{E})$ non situés sur l'axe focal, $(\mathcal{E})$ est l'image du cercle de diamètre $[BB']$ par l'affinité orthogonale d'axe (BB') et de rapport $\frac{a}{b}$.

De ce qui précède, on déduit une construction point par point de l'ellipse.

M

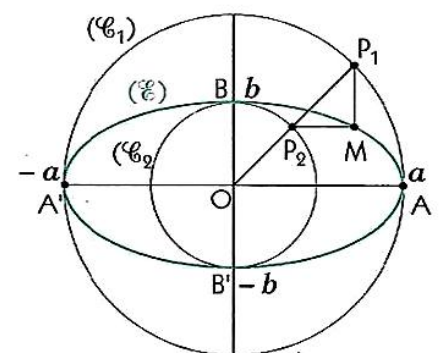
Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$, tel que : $a > b > 0$.

Pour construire un point de $(\mathcal{E})$, on peut utiliser le procédé suivant :

- tracer les cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de centre O et de rayons respectifs a et b ;
- tracer un diamètre $[AA']$ de $(\mathcal{C}_1)$;
- tracer une demi-droite d'origine O ; cette demi-droite coupe $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ respectivement en P_1 et P_2 ;
- tracer la perpendiculaire à (AA') passant par P_1 et la parallèle à (AA') passant par P_2 .

Le point d'intersection M de ces deux droites est un point de $(\mathcal{E})$.

$[AA']$ est le grand axe de $(\mathcal{E})$.



3.3. Définition bifocale de l'ellipse

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

$(\mathcal{E})$ a pour foyers $F\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $F'\left(\begin{smallmatrix} -c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; ses directrices sont $(\mathcal{D}) : x = \frac{a^2}{c}$ et $(\mathcal{D}') : x = -\frac{a^2}{c}$; son excentricité est : $e = \frac{c}{a}$.

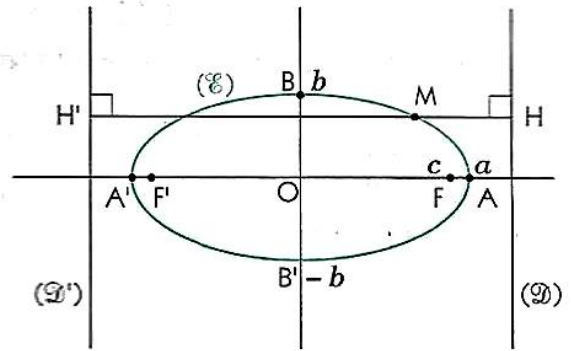
Soit M un point du plan, H et H' les projetés orthogonaux respectifs de M sur $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

• Si $M \in (\mathcal{E})$, on a : $MF = eMH$ et $MF' = eMH'$.

Donc : $MF + MF' = eHH' = \frac{c}{a} \times \frac{2a^2}{c} = 2a$.

• Si M est intérieur à $(\mathcal{E})$, on a : $MF < eMH$ et $MF' < eMH'$.
Donc : $MF + MF' < eHH'$; c'est-à-dire : $MF + MF' < 2a$.

• Si M est extérieur à $(\mathcal{E})$, on a : $MF > eMH$ et $MF' > eMH'$.
Donc : $MF + MF' > eHH'$; c'est-à-dire : $MF + MF' > 2a$.



On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), de foyers F et F' .

$(\mathcal{E})$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $MF + MF' = 2a$.

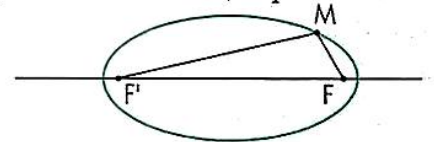
Cette propriété, parfois donnée comme définition de l'ellipse, est appelée **définition bifocale**.
Dans cette définition, on a $FF' = 2c$ tel que : $c < a$.

Remarques

• Les points M vérifiant $MF + MF' < 2a$ (respectivement $MF + MF' > 2a$) sont intérieurs (respectivement extérieurs) à $(\mathcal{E})$.

• Cette propriété permet une construction de l'ellipse par la « méthode du jardinier » : un fil, de longueur $2a$, tendu entre deux points F et F' .

• Lorsque $a = b$, $F = F'$ et $(\mathcal{E})$ est le cercle de centre F et de rayon a .



Exemples

• Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

On a : $a = 2\sqrt{2}$ et $b = 2$; donc : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$.

$(\mathcal{E})$ est l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 4\sqrt{2}$, où $F\left(\frac{2}{0}\right)$ et $F'\left(\frac{-2}{0}\right)$.

• Soit F et F' deux points tels que : $FF' = 4$.

Déterminer l'équation réduite de l'ellipse $(\mathcal{E})$ définie par : $MF + MF' = 8$.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que O est le milieu de $[FF']$ et $\vec{i} = \frac{1}{OF} \vec{OF}$.

On a : $c = 2$ et $a = 4$; donc : $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{3}$.

$(\mathcal{E})$ a pour équation réduite : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

De sa définition bifocale, on déduit une nouvelle construction point par point de l'ellipse.

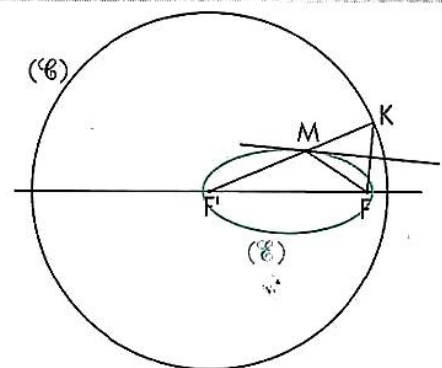
M

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse définie par : $MF + MF' = 2a$ ($0 < FF' < 2a$).

Pour construire un point de $(\mathcal{E})$ et sa tangente, on peut utiliser le procédé suivant :

- tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de centre F' et de rayon $2a$;
- tracer un rayon $[F'K]$ de $(\mathcal{C})$;
- tracer la médiatrice de $[FK]$.

Cette médiatrice coupe $(F'K)$ en un point M de $(\mathcal{E})$ et est tangente en M à $(\mathcal{E})$.



Une justification de cette construction est proposée en fin de chapitre (cf. exercice n° 44).

3.4. Travaux dirigés

On appelle corde d'une ellipse tout segment joignant deux points de cette ellipse.

Soit $(\mathcal{E})$ une ellipse de centre O et P un point du plan, extérieur à $(\mathcal{E})$.

Déterminer le lieu des milieux des cordes de $(\mathcal{E})$ passant par P .

Solution

Une droite (Δ) passant par P coupe $(\mathcal{E})$ en deux points M et N ; on désigne par I le milieu de $[MN]$.

Soit f l'affinité orthogonale qui transforme $(\mathcal{E})$ en son cercle principal $(\mathcal{C})$.

• f transforme P en P' et $[MN]$ en une corde $[M'N']$ de $(\mathcal{C})$ dont le milieu I' est l'image de I par f .

Or, (OI') est la médiatrice de $[M'N']$; donc I' appartient au cercle (Γ') de diamètre $[OP']$.

Réciproquement, tout point de (Γ') , intérieur à $(\mathcal{C})$, est le milieu d'une corde de $(\mathcal{C})$ passant par P' .

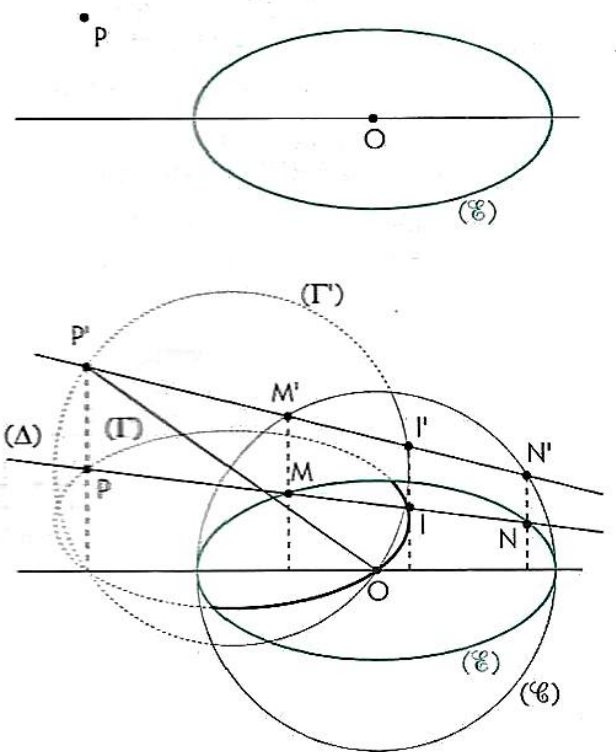
Donc, le lieu de I' est l'ensemble des points de (Γ') intérieurs à $(\mathcal{C})$.

• I est l'antécédant de I' par f ; donc, le lieu de I est l'antécédant par f du lieu de I' .

L'antécédant de (Γ') par f est une ellipse (Γ) dont le grand axe est l'antécédant du diamètre de (Γ') parallèle à l'axe de l'affinité orthogonale.

Le lieu de I est l'ensemble des points de (Γ) intérieurs à $(\mathcal{E})$.

Sur la figure ci-dessus, le rapport de l'affinité orthogonale est $\frac{1}{2}$.



Exercices

- 3.a Tracer l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation : $x^2 + 4y^2 = 25$.
- Déterminer une équation des tangentes à $(\mathcal{E})$ aux points de $(\mathcal{E})$ d'abscisse 4.
 - Déterminer une équation des tangentes à $(\mathcal{E})$ ayant pour coefficient directeur $\frac{3}{8}$.

- 3.b Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de l'ellipse $(\mathcal{E})$.
- $(\mathcal{E}) : x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 10$
 - $(\mathcal{E}) : 4x^2 + y^2 - 8x + 6y - 3 = 0$
 - $(\mathcal{E}) : 3x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$.

- 3.c Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'ellipse dont on donne une représentation paramétrique.
- $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \theta - 1 \\ y = \frac{3}{4} \sin \theta + 2 \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$
 - $\begin{cases} x = 2 \cos \theta - 3 \\ y = 3 \sin \theta + 1 \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$

- 3.d Soit F et F' deux points du plan tels que : $FF' = 6$. Déterminer, dans un repère convenablement choisi, l'équation réduite de l'ellipse définie par : $MF + MF' = 8$.

- 3.e Dans chacun des cas suivants, donner la définition bifocale de l'ellipse $(\mathcal{E})$.

a) $(\mathcal{E}) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ b) $(\mathcal{E}) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

- 3.f
- Soit $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A' \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Déterminer une équation de l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que : $\vec{MA} \cdot \vec{MA'} = 1$.
 - Déterminer une équation de l'image de $(\mathcal{E})$:
 - par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{i})$ et de rapport $\frac{2}{3}$;
 - par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{j})$ et de rapport 2.

4 Étude de l'hyperbole

Dans cette leçon, le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4.1. Étude analytique

Tracé de l'hyperbole

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$(\mathcal{H})$ est la réunion des courbes représentatives $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ des fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ et $f_2 : x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

$(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ sont symétriques par rapport à la droite de repère $(O, \vec{i})$.

Étudions la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

On a : $D_{f_1} =]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$; f_1 est une fonction paire, on peut réduire son étude à $[a; +\infty[$.

$$\forall x \in]a; +\infty[, f_1'(x) = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

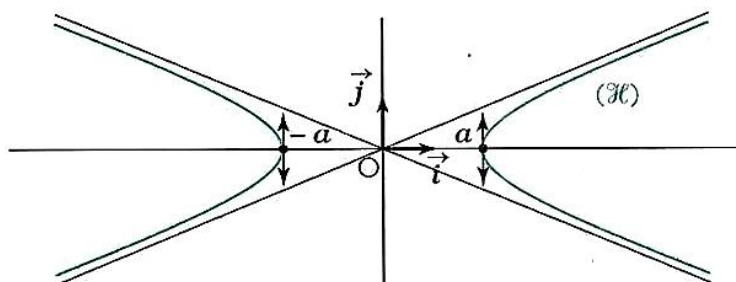
De plus, $\frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a - x}}{x - a} \sqrt{a + x}$; donc : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = +\infty$.

$(\mathcal{H}_1)$ admet une demi-tangente verticale au point $A\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

On démontre également que la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ est asymptote à $(\mathcal{H}_1)$ en $+\infty$.

On en déduit le tableau de variation de f_1 et la courbe $(\mathcal{H})$.

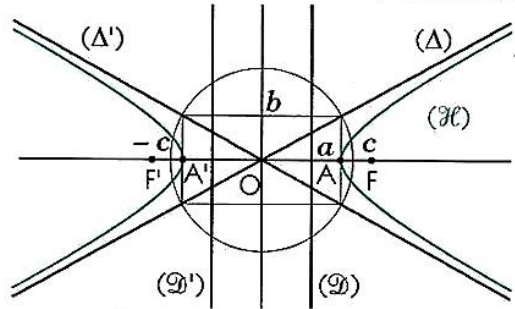
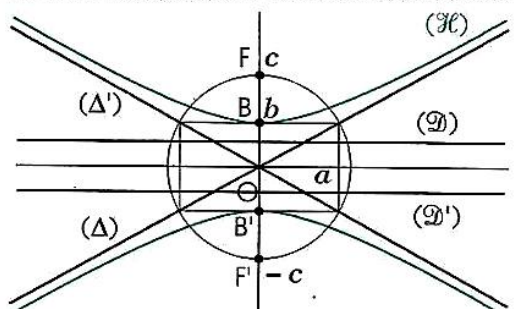
x	a	$+\infty$
$f_1'(x)$	$\parallel$	$+$
$f_1(x)$	0	$+\infty$



Remarques

- L'hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'image de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice.
- La réunion des asymptotes de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.
- Si $a = b$, les asymptotes sont orthogonales et $e = \sqrt{2}$; on dit que $(\mathcal{H})$ est une hyperbole **équilatère**.

Éléments caractéristiques de l'hyperbole

Équation	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Sommets	$A\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \quad A'\left(\begin{smallmatrix} -a \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$	$B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right) \quad B'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -b \end{smallmatrix}\right)$
Axe focal	(AA')	(BB')
Foyers	$F\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \text{ et } F'\left(\begin{smallmatrix} -c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$	$F\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ c \end{smallmatrix}\right) \text{ et } F'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -c \end{smallmatrix}\right)$
Directrices	$(\mathcal{D}) : x = \frac{a^2}{c} \text{ et } (\mathcal{D}') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(\mathcal{D}) : y = \frac{b^2}{c} \text{ et } (\mathcal{D}') : y = -\frac{b^2}{c}$
Asymptotes	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x \text{ et } (\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$	
Courbe		

Équation de la tangente en un point de l'hyperbole

On démontre la propriété suivante de façon analogue à celle concernant la parabole.

Propriété

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La tangente en un point $M_0\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ de $(\mathcal{H})$ a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Lorsque $(\mathcal{H})$ a pour équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, la tangente a pour équation : $-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Exemples

• Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

Le point $M_0\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \sqrt{5} \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ appartient à $(\mathcal{H})$; la tangente à $(\mathcal{H})$ en M_0 a pour équation : $3x - 2\sqrt{5}y - 4 = 0$.

• Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation : $-2x^2 + 3y^2 = 1$.

Le point $M_0\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ appartient à $(\mathcal{H})$; la tangente à $(\mathcal{H})$ en M_0 a pour équation : $2x + 3y + 1 = 0$.

Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes

Nous avons rencontré dans les classes précédentes des hyperboles, courbes représentatives des fonctions homographiques. Démontrons que l'hyperbole définie maintenant est également la courbe représentative d'une fonction homographique.

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

On se propose de déterminer l'équation de $(\mathcal{H})$ dans un repère dont les axes sont les asymptotes de $(\mathcal{H})$, par exemple le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$.

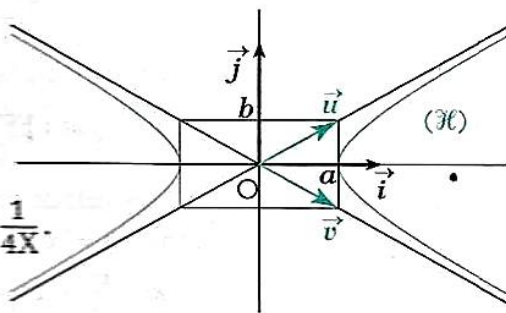
Soit M un point du plan, de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnées $(X; Y)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v} \\ &= X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(a\vec{i} - b\vec{j}) \\ &= a(X+Y)\vec{i} + b(X-Y)\vec{j}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = a(X+Y) \\ y = b(X-Y) \end{cases}$$

On en déduit une équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$: $Y = \frac{1}{4X}$.

On obtient ainsi l'expression d'une fonction homographique.



Exemple

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a : $a = 2$ et $b = 2\sqrt{3}$. Soit le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

On en déduit les formules de changement de repère : $\begin{cases} x = X+Y \\ y = \sqrt{3}(X-Y) \end{cases}$.

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, $(\mathcal{H})$ a pour équation : $3(X+Y)^2 - 3(X-Y)^2 = 12$; c'est-à-dire : $Y = \frac{1}{X}$.

4.2. Définition bifocale de l'hyperbole

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

$(\mathcal{H})$ a pour foyers $F \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F' \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$, où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

ses directrices sont $(\mathcal{D}) : x = \frac{a^2}{c}$ et $(\mathcal{D}') : x = -\frac{a^2}{c}$;

son excentricité est : $e = \frac{c}{a}$.

$(\mathcal{H})$ est la réunion de deux courbes $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ situées respectivement dans les demi-plans où les points ont des abscisses positives et négatives.

Soit M un point du demi-plan défini par $x \geq 0$, H et H' les projetés orthogonaux respectifs de M sur $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

• Si $M \in (\mathcal{H}_1)$, on a : $MF = eMH$ et $MF' = eMH'$.

Donc : $MF' - MF = eHH' = 2a$.

• Si M est intérieur à $(\mathcal{H}_1)$, on désigne par N le point d'intersection de (MF') et $(\mathcal{H}_1)$.

On a : $MF < MN + NF$ et $NF' - NF = 2a$.

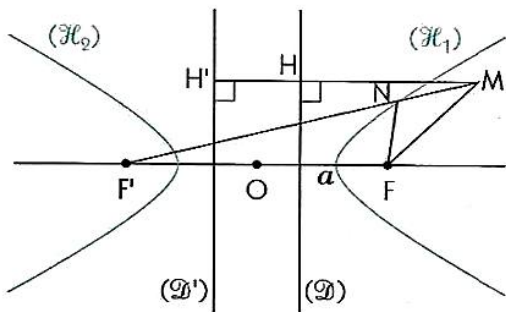
Donc : $MF' - MF > MF' - (MN + NF)$;

c'est-à-dire : $MF' - MF > NF' - NF$ ou $MF' - MF > 2a$.

• Si M est extérieur à $(\mathcal{H}_1)$, on démontre de même que : $MF' - MF < 2a$.

On a un résultat analogue dans le demi-plan défini par $x \leq 0$.

On en déduit la propriété suivante.



Propriété

Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), de foyers F et F'.

$(\mathcal{H})$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $|MF - MF'| = 2a$.

Cette propriété, parfois donnée comme définition de l'hyperbole, est appelée **définition bifocale**. Dans cette définition, on a $FF' = 2c$ tel que : $c > a$.

Remarque

Les points M vérifiant $|MF - MF'| > 2a$ (respectivement $|MF - MF'| < 2a$) sont intérieurs (respectivement extérieurs) à $(\mathcal{H})$.

Exemples

• Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

On a : $a = 2$ et $b = \sqrt{5}$; donc : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$.

$(\mathcal{H})$ est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 4$, où $F\left(\frac{3}{0}\right)$ et $F'\left(-\frac{3}{0}\right)$.

• Soit F et F' deux points tels que : $FF' = 4$.

Déterminer l'équation réduite de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ définie par : $|MF - MF'| = 2\sqrt{3}$.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que O est le milieu de $[FF']$ et $\vec{i} = \frac{1}{OF} \vec{OF}$.

On a : $c = 2$ et $a = \sqrt{3}$; donc : $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 1$.

$(\mathcal{H})$ a pour équation réduite : $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

De la définition bifocale, on déduit une construction point par point de l'hyperbole.

M

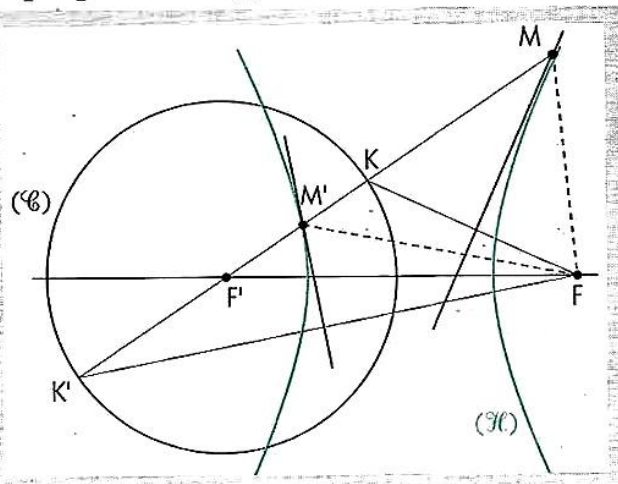
Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole définie par :

$|MF - MF'| = 2a$ ($FF' > 2a > 0$).

Pour construire un point de $(\mathcal{H})$ et sa tangente, on peut utiliser le procédé suivant :

- tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de centre F' et de rayon $2a$;
- tracer un rayon $[F'K]$ de $(\mathcal{C})$;
- tracer la médiatrice de $[FK]$.

Cette médiatrice coupe $(F'K)$ en un point M de $(\mathcal{H})$ et est tangente en M à $(\mathcal{H})$.



Une justification de cette construction est proposée en fin de chapitre (cf. exercice 45).

Remarque

Si (FK) est tangente au cercle, la médiatrice de $[FK]$ est parallèle à $(F'K)$; donc le point M n'existe pas et cette médiatrice est l'une des asymptotes de l'hyperbole.

Exercices

- 4.a Tracer l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation : $x^2 - 2y^2 = 2$.
 1. Déterminer une équation des tangentes à $(\mathcal{H})$ aux points de $(\mathcal{H})$ d'abscisse $2\sqrt{2}$.
 2. Déterminer une équation des tangentes à $(\mathcal{H})$ ayant pour coefficient directeur 1.

- 4.b Soit F et F' deux points du plan tels que : $FF' = 6$. Déterminer, dans un repère convenablement choisi, l'équation réduite de l'hyperbole définie par : $|MF - MF'| = 4$.

- 4.c Dans chacun des cas suivants, donner la définition bifocale de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.
 a) $(\mathcal{H}) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ b) $(\mathcal{H}) : -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

- 4.d Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'hyperbole dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u}\left(\frac{1}{1}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{-1}\right)$.

a) $x^2 - y^2 + 4 = 0$

b) $x^2 - y^2 + 2x - 4y = 0$

c) $x^2 - y^2 - 6x + 2y + 24 = 0$.

- 4.e 1. Construire sur un même graphique les hyperboles $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}')$ d'équations respectives $x^2 - 3y^2 - 1 = 0$ et $3x^2 - y^2 + 1 = 0$.
 2. Démontrer que $(\mathcal{H}')$ est l'image de $(\mathcal{H})$ par :
 a) la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
 b) la symétrie orthogonale s d'axe la première bissectrice.

Exercices

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

APPRENTISSAGE

Construction d'une conique

1 Soit F un point et $(\mathcal{D})$ une droite du plan telle que la distance de F à $(\mathcal{D})$ est égale à 4. Dans chacun des cas suivants, construire 10 points de la conique de foyer F , de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e .

- a) $e = 1$ b) $e = \frac{1}{3}$ c) $e = 3$.

2 Déterminer le sommet, l'axe focal et le foyer, puis tracer les paraboles d'équations :

- a) $2y^2 + 3x = 0$ b) $3x^2 - 4y + 4 = 0$
c) $2y^2 - 4y = x - 3$ d) $x^2 - 2x = -3y - 1$.

3 Déterminer le centre, l'axe focal et les sommets, puis tracer les ellipses d'équations :

- a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ b) $(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 4$
c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ d) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

4 Déterminer le centre, l'axe focal et les sommets, puis tracer les hyperboles d'équations :

- a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ b) $(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 4$
c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ d) $-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

Équation d'une conique

5 Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Déterminer une équation de l'hyperbole ayant pour sommets les foyers de $(\mathcal{E})$ et pour foyers les sommets de $(\mathcal{E})$ situés sur l'axe focal.

6 Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$. Déterminer une équation de l'ellipse ayant pour foyers les sommets de $(\mathcal{H})$ et pour excentricité $\frac{1}{3}$.

7 Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation : $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$.

- Déterminer les éléments caractéristiques de $(\mathcal{P})$ et tracer $(\mathcal{P})$.
- Déterminer une équation de l'image de $(\mathcal{P})$ par chacune des transformations suivantes :
a) la symétrie orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \vec{j})$;
b) la symétrie de centre O ;
c) la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

8 Soit (Γ) l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tels que : $y^4 - 9 = 9x^4 - 18x^2$.

Démontrer que (Γ) est la réunion de deux coniques dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques. Tracer (Γ) .

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer et tracer l'ensemble (Γ) des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tels que :

- a) $4x^2 + y|y| = 9$ b) $25x|x| + 16y^2 = 64$
c) $4x|x| + 9y|y| = 144$ d) $9y^2 = |4x^2 - 16x|$.

Représentations paramétriques d'une conique

10 Démontrer que le système

$$\begin{cases} x = \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \\ y = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{6}) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique d'une conique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.

11 Démontrer que le système $\begin{cases} x = \cos 2\theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique d'une partie de parabole que l'on précisera.

12 Démontrer que le système

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos 2\theta} - 1 \\ y = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \tan 2\theta \end{cases} \quad (\theta \in [0; \frac{\pi}{4}])$$

est une représentation paramétrique d'une partie d'hyperbole que l'on précisera.

13 Soit (Γ) l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} x = 2e^t + e^{-t} \\ y = 2e^t - e^{-t} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Démontrer que (Γ) est une partie d'hyperbole que l'on précisera. Tracer (Γ) .

Définition bifocale des coniques à centre

14 Soit F et F' deux points tels que : $FF' = 3$. Déterminer, dans un repère convenablement choisi, une équation réduite de l'ensemble des points M tels que :
a) $MF + MF' = 5$ b) $|MF - MF'| = 2$.

15 Soit les points $F\left(-\frac{2}{2}\right)$ et $F'\left(\frac{4}{2}\right)$. Déterminer une équation de l'ensemble des points M tels que :
a) $MF + MF' = 10$ b) $|MF - MF'| = 4$.
(On pourra au préalable déterminer l'équation réduite dans un repère convenablement choisi.)

16 Soit les points $F\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $F'\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

On pose : $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$.

1. Déterminer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ une équation de l'ensemble des points M tels que :

a) $MF + MF' = 4$ b) $|MF - MF'| = 2$.

2. En déduire une équation de ces ensembles dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Coniques et lieux géométriques

17 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon R, (Δ) une droite non sécante à $(\mathcal{C})$.

Démontrer que le lieu des points M, centres des cercles (Γ) tangents à (Δ) et à $(\mathcal{C})$, est une parabole de foyer O dont on précisera la directrice.

On distinguera deux cas :

- (Γ) et $(\mathcal{C})$ sont tangents extérieurement ;
- $(\mathcal{C})$ est intérieur à (Γ) .

18 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon R, F un point intérieur à $(\mathcal{C})$ et distinct de O.

Démontrer que le lieu des points M, centres des cercles passant par F et tangents à $(\mathcal{C})$, est une ellipse dont on précisera les foyers.

19 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon R, F un point extérieur à $(\mathcal{C})$.

Démontrer que le lieu des points M, centres des cercles (Γ) passant par F et tangents à $(\mathcal{C})$, est une hyperbole.

On distinguera deux cas :

- (Γ) et $(\mathcal{C})$ sont tangents extérieurement ;
- $(\mathcal{C})$ est intérieur à (Γ) .

20 Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles de rayons distincts, tels que $(\mathcal{C}')$ est intérieur à $(\mathcal{C})$.

Déterminer le lieu des points M, centres des cercles tangents à $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

21 Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles extérieurs l'un par rapport à l'autre, de rayons R et R' tels que : $R > R'$.

Déterminer le lieu des points M, centres des cercles tangents à $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

On distinguera quatre cas :

- (Γ) extérieur à $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$;
- $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ intérieurs à (Γ) ;
- $(\mathcal{C})$ intérieur à (Γ) , $(\mathcal{C}')$ extérieur à (Γ) ;
- $(\mathcal{C}')$ intérieur à (Γ) , $(\mathcal{C})$ extérieur à (Γ) .

22 Soit $(\mathcal{D})$ une droite et A un point n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$. On considère les paraboles passant par A et de directrice $(\mathcal{D})$.

1. Démontrer que le lieu des foyers de ces paraboles est un cercle (privé d'un point) que l'on précisera.

2. En déduire le lieu des sommets de ces paraboles.

Coniques et transformations

23 1. Démontrer que l'image d'une conique par une isométrie plane est une conique de même équation réduite.

2. Démontrer que l'image d'une conique par une similitude plane est une conique de même nature et de même excentricité.

24 Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 36$ et les points $A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$.

Soit M un point de $(\mathcal{E})$ et M' l'isobarycentre des points A, B et M.

1. Démontrer que M' est l'image de M par une transformation que l'on précisera.

2. En déduire une équation de l'ensemble $(\mathcal{E}')$ des points M' lorsque M décrit $(\mathcal{E})$.

Tracer $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$ sur un même graphique.

25 Soit f la transformation du plan qui à tout point $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ associe le point $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y \\ y' = -\sqrt{3}x + y \end{cases}$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse d'équation : $4x^2 + y^2 = 4$.

Déterminer une équation de $(\mathcal{E}')$, image de $(\mathcal{E})$ par f.

3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{E}')$.

Tracer $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$ sur un même graphique.

26 Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation : $x^2 - 3y^2 = 3$.

1. Déterminer une équation de $(\mathcal{H}')$, image de $(\mathcal{H})$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{H}')$.

Tracer $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}')$ sur deux graphiques distincts.

Coniques et nombres complexes

Dans cette rubrique, le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

27 1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{H})$ d'équation :

$$3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0.$$

2. a) Démontrer que les points A, M et M' d'affixes respectives 1, z et z^4 sont alignés si et seulement si $1 + z + z^2 + z^3$ est un nombre réel.

b) En déduire que l'ensemble de tels points M est la réunion de $(\mathcal{H})$ et d'une droite que l'on précisera.

28 On désigne par z l'affixe d'un point M.

Soit le nombre complexe $z' = \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}\bar{z} - 1$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

- a) $|z'| = 1$;
- b) la partie réelle de z^2 est égale à 1 ;
- c) la partie imaginaire de z^2 est égale à 1.

29 Soit α un nombre réel tel que : $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^2 \cos^2 \alpha - z \sin 2\alpha + 2 - \cos^2 \alpha = 0.$$

2. Soit M l'image dans le plan complexe de la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive.

a) Démontrer que M appartient à une hyperbole ($\mathcal{H}$) dont on donnera une équation.

b) Tracer ($\mathcal{H}$) et déterminer la partie de ($\mathcal{H}$) décrite par M lorsque α décrit l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

30 1. Soit ($\mathcal{E}$) l'ensemble des points M du plan complexe dont l'afixe z vérifie : $10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$. Démontrer que ($\mathcal{E}$) est une ellipse dont on précisera les éléments caractéristiques.

2. Déterminer une équation de ($\mathcal{E}'$), image de ($\mathcal{E}$) par la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

3. Déterminer la nature de ($\mathcal{E}'$), ses axes et ses sommets. Tracer ($\mathcal{E}$) et ($\mathcal{E}'$) sur un même graphique.

31 Soit M le point d'afixe z .

1. a) Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\bar{z} + z + 4 = 0$ est une droite ($\mathcal{D}$).

b) Démontrer que pour tout point M, la distance de M à ($\mathcal{D}$) est : $\frac{1}{2} |\bar{z} + z + 4|$.

2. Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\left| \frac{z-1-i}{\bar{z}+z+4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ est une ellipse dont on précisera un foyer, une directrice et l'excentricité.

32 À tout point M d'afixe z non nulle du plan complexe, on associe le point M' d'afixe z' telle que :

$$z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel.

2. On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2.

a) Vérifier que : $z = 2e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

b) Démontrer que M' décrit une conique dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Familles de coniques

33 Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel m , la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (Γ_m) d'équation : $x^2 + my^2 - 2mx = 0$.

34 Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel m , l'ensemble des points M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que :

$$y^2 + 4y - (m-2)x + m - 1 = 0.$$

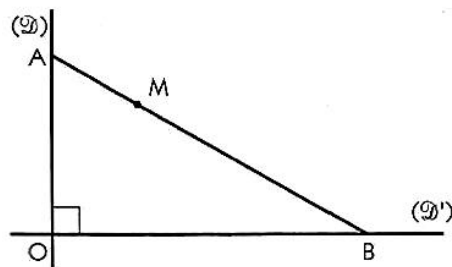
35 1. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel m , la nature de l'ensemble (Γ_m) des points M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que : $2mx^2 + 8mx - (m-1)y^2 + 7m - 2 = 0$.

2. Déterminer m pour que (Γ_m) soit :

a) un cercle ;

b) une hyperbole équilatère.

3. Tracer (Γ_m) pour $m = \frac{1}{2}$ et $m = 2$.



(On pourra poser : mes $\widehat{OBA} = \alpha$.)

37 L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer l'ensemble des points M du plan de repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$ tels que : $\|\vec{MA} \wedge \vec{MB}\| = \|\vec{MF}\|$

b) Retrouver ce résultat en interprétant $\|\vec{MA} \wedge \vec{MB}\|$ comme une aire.

2. Mêmes questions en remplaçant le plan de repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$ par le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

38 Soit k un nombre réel strictement positif, ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$) deux droites sécantes.

1. Déterminer le lieu des points M dont la somme des carrés des distances à ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$) est égale à k .

(On pourra utiliser un repère dont les axes sont les bissectrices de l'angle des deux droites.)

2. Déterminer le lieu des points M dont la différence des carrés des distances à ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$) est égale à k .

3. Application numérique

Déterminer et construire les lieux précédents lorsque $k = 3$, ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$) ont pour coefficients directeurs respectifs $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

39 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 + 3}{x\sqrt{3}}$ et (Γ) sa courbe représentative.

1. Étudier f et tracer (Γ).

2. On pose : $\vec{u} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$.

a) Déterminer une équation de (Γ) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) En déduire que (Γ) est une hyperbole et déterminer les coordonnées de ses foyers dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

40 Le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est direct.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$x^2 + 11y^2 - 10xy\sqrt{3} + 16 = 0.$$

1. Soit θ un nombre réel et $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le repère orthonormé image du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par la rotation de centre O et d'angle θ . On désigne par (X ; Y) les coordonnées de M dans ce repère.

Déterminer θ pour que l'équation de (Γ) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ soit de la forme : $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$.

2. En déduire la nature de (Γ) et ses éléments caractéristiques. Tracer (Γ).

41 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ et déterminer les solutions particulières f et g vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 4$.

2. Soit (Γ) la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = g(\theta) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

Déterminer la nature de (Γ) et ses éléments caractéristiques. Tracer (Γ).

APPROFONDISSEMENT

36 Le problème de l'échelle

Sur la figure ci-après, l'échelle AB a une longueur constante l et le point M est tel que : $AB = 3AM$.

Déterminer le lieu des points M lorsque A décrit ($\mathcal{D}$) et B décrit ($\mathcal{D}'$).

42 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$, M un point de $(\mathcal{C})$ et M' le symétrique de M par rapport à (AB) . Soit P le point défini par :

- $\{P\} = (AM) \cap (BM')$, si $M \neq M'$;
- $P = M$, si $M = M'$.

Déterminer et tracer le lieu de P lorsque M décrit $(\mathcal{C})$.
(On pourra utiliser une méthode analytique.)

43 Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$, M un point de $(\mathcal{P})$ et (T_M) la tangente en M à $(\mathcal{P})$. Déterminer le lieu du projeté orthogonal de F sur (T_M) lorsque M décrit $(\mathcal{P})$.

44 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon R , O' un point intérieur à $(\mathcal{C})$ et distinct de O . À tout point P de $(\mathcal{C})$, on associe M , point d'intersection de (OP) et de la médiatrice de $[O'P]$.

1. Démontrer que le lieu de M lorsque P décrit $(\mathcal{C})$ est une ellipse $(\mathcal{E})$ dont on donnera la définition bifocale.
2. Démontrer que la tangente en tout point M de $(\mathcal{E})$ est la médiatrice de $[O'P]$.

45 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon R , O' un point extérieur à $(\mathcal{C})$, T_1 et T_2 les points de contact des tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par O' .

À tout point P de $(\mathcal{C})$, distinct de T_1 et T_2 , on associe M , point d'intersection de (OP) et de la médiatrice de $[O'P]$.

1. Démontrer que le lieu de M lorsque P décrit $(\mathcal{C})$ est une hyperbole $(\mathcal{H})$ dont on donnera la définition bifocale.
2. Démontrer que la tangente en tout point M de $(\mathcal{H})$ est la médiatrice de $[O'P]$.
3. Démontrer que les médiatrices de $[OT_1]$ et de $[OT_2]$ sont les asymptotes de $(\mathcal{H})$.

46 1. Démontrer que la tangente en tout point M d'une ellipse de foyers F et F' est la bissectrice extérieure de l'angle FMF' .

2. Démontrer que la tangente en tout point M d'une hyperbole de foyers F et F' est la bissectrice de FMF' .

47 Soit $(\mathcal{E})$ une ellipse, F et F' ses foyers, A et A' les sommets de $(\mathcal{E})$ situés sur l'axe focal.

Soit M un point de $(\mathcal{E})$, (T) la tangente en M à $(\mathcal{E})$, H et H' les projetés orthogonaux de F et F' sur (T) .

La perpendiculaire à (T) en M coupe (AA') en P . Démontrer que les droites (HF') et $(H'F)$ se coupent au milieu de $[MP]$.

(On pourra utiliser les résultats démontrés dans l'exercice 44.)

48 Soit F et F' deux points distincts, a un nombre réel tel que $2a > FF'$ et $(\mathcal{E})$ l'ellipse définie par :

$$MF + MF' = 2a.$$

Soit M un point de $(\mathcal{E})$, (T) la tangente en M à $(\mathcal{E})$, H et H' les projetés orthogonaux de F et F' sur (T) .

1. Démontrer que le symétrique de F par rapport à H appartient au cercle de centre F' et de rayon $2a$.
2. En déduire que le lieu des points H et H' , lorsque M décrit $(\mathcal{E})$, est le cercle principal de $(\mathcal{E})$.

49 Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation : $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Étant donné un point A de $(\mathcal{P})$, soit M et N deux points de $(\mathcal{P})$ tels que : $(AM) \perp (AN)$.

On désigne par a , m et n les ordonnées respectives des points A , M et N .

1. a) Démontrer que les droites (AM) et (AN) sont perpendiculaires si et seulement si :

$$4p^2 + a^2 + a(m+n) + mn = 0.$$

b) Déterminer une équation de la droite (MN) et utiliser la relation précédente pour démontrer que ces droites passent par un point fixe I .

2. Déterminer le lieu de I lorsque A décrit $(\mathcal{P})$.

50 Soit le point $F\left(\frac{0}{4}\right)$ et la droite $(\mathcal{D}) : y = 1$.

1. Déterminer une équation et tracer l'hyperbole $(\mathcal{H})$ de foyer F , de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité 2.

On désigne par B et B' les sommets de $(\mathcal{H})$, B étant le sommet relatif au foyer F .

2. Soit ω un point de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre ω et passant par F .

On se propose de démontrer que $(\mathcal{C})$ coupe $(\mathcal{H})$ en B' et en trois autres points formant un triangle équilatéral.

Soit M un point du plan. On désigne par Z et α les affixes dans le repère $(\omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ des points M et F .

a) Démontrer que les points de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{H})$ vérifient respectivement les relations :

$$(\mathcal{C}) : Z\bar{Z} = \alpha\bar{\alpha} ;$$

$$(\mathcal{H}) : (Z - \alpha)(\bar{Z} - \bar{\alpha}) + (Z - \bar{Z})^2 = 0.$$

b) Démontrer que $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{H})$ est l'ensemble des points du plan dont les affixes Z vérifient : $(Z - \bar{\alpha})(Z^3 - k) = 0$, où k est un nombre complexe dont on donnera le module et un argument en fonction du module r et d'un argument θ de α .

c) Conclure.

8

Probabilités

Introduction

« Ce que nous appelons le hasard n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu. »

Voltaire (Dictionnaire philosophique)



© L'Esprit / Hicquel



© S. Grandjean / Hicquel



© M. Renaudeau / Hicquel

SOMMAIRE

1. Analyse combinatoire	172
2. Calculs de probabilités	176
3. Variable aléatoire	184

1

Analyse combinatoire

1.1. Formule du binôme

Introduction

- Soit n un entier naturel non nul.

On désigne par **factorielle n** le produit de tous les entiers naturels de 1 à n et on note :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1.$$

Par convention, on a : $0! = 1$.

- Soit n et p deux entiers naturels tels que : $p \leq n$.

On a vu en classe de première que le nombre de combinaisons (ou parties) de p éléments d'un ensemble

$$\text{à } n \text{ éléments est : } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemples

$$C_n^0 = C_n^n = 1 ; C_n^1 = n.$$

$$C_{2000}^{1998} = \frac{2000!}{1998! 2!} = \frac{2000 \times 1999 \times 1998!}{1998! 2!} = 1999000.$$

Le triangle de Pascal¹

Propriété

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$. On a :

- $C_n^{n-p} = C_n^p$;
- si de plus $0 < p < n$, alors : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.

Démonstration

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{et} \quad C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)! [n-(n-p)]!} ; \text{ donc : } C_n^{n-p} = C_n^p.$$

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \\ &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p. \end{aligned}$$

Les résultats précédents permettent de calculer les nombres C_n^p de proche en proche, en formant le triangle de Pascal à l'aide du schéma suivant :

$$\begin{array}{c} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \\ \parallel \\ C_n^p \end{array}$$

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

La formule du binôme de Newton²

Propriété

Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.

$$\text{On a : } (a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p.$$

Cette égalité est appelée **formule du binôme de Newton**.

¹ Blaise Pascal, mathématicien, physicien et philosophe français - 1623 - 1662

² Isaac Newton, mathématicien, physicien et astronome anglais - 1642 - 1727

Démonstration

Faisons un raisonnement par récurrence.

- L'égalité est vraie pour $n = 1$.
- Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel non nul k , c'est-à-dire : $(a + b)^k = \sum_{p=0}^k C_k^p a^{k-p} b^p$;

$$\begin{aligned}
 \text{on a : } (a + b)^{k+1} &= (a + b)(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b^1 + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \dots + C_k^p a^{k-p} b^p + \dots + C_k^k b^k) \\
 &= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b^1 + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \dots + C_k^p a^{k-p+1} b^p + \dots + C_k^k a b^k \\
 &\quad + C_k^0 a^k b^1 + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \dots + C_k^p a^{k-p} b^{p+1} + \dots + C_k^k b^{k+1} \\
 &= C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b^1 + (C_k^1 + C_k^2) a^{k-1} b^2 + \dots + (C_k^{p-1} + C_k^p) a^{k-p+1} b^p \\
 &\quad + (C_k^p + C_k^{p+1}) a^{k-p} b^{p+1} + \dots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a b^k + C_k^k b^{k+1} \\
 &= C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b^1 + \dots + C_{k+1}^p a^{k-p+1} b^p + \dots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} \\
 &= \sum_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^p a^{k+1-p} b^p ;
 \end{aligned}$$

donc, l'égalité est vraie pour $k + 1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul n .

Remarque

Cette formule explique le nom de **coefficients binomiaux** donné aux nombres C_n^p .

Exemples

- $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$.
- $(1 - \sqrt{2})^5 = 1 + 5(-\sqrt{2}) + 10(-\sqrt{2})^2 + 10(-\sqrt{2})^3 + 5(-\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^5$
 $= 1 - 5\sqrt{2} + 20 - 20\sqrt{2} + 20 - 4\sqrt{2}$
 $= 41 - 29\sqrt{2}$.

Conséquence

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de parties de E est égal à 2^n .

Démonstration

$$2^n = (1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

1.2. Outils de dénombrement

Modèles de base

Soit n et p deux entiers naturels.

Les tirages de p boules, dans une urne qui en contient n , modélisent de nombreux problèmes de dénombrement.

Modélisation	Les p éléments sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Outil	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	oui	non	p -uplet de E	n^p
Tirages successifs sans remise	oui	oui	Arrangement de p éléments de E	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Tirages simultanés	non	oui	Combinaison de p éléments de E	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemples

• En informatique, on appelle octet une suite de 8 chiffres pris dans l'ensemble $\{0 ; 1\}$.

(Exemples d'octets : 10010110 ; 01110011 ; 00000111)

Combien y a-t-il d'octets possibles ?

Les tirages successifs avec remise de 8 éléments dans l'ensemble $\{0 ; 1\}$ modélisent ce problème ; donc le nombre d'octets possibles est égal à : $2^8 = 256$.

• Dix coureurs s'affrontent pour 3 médailles (or, argent et bronze). Quel est le nombre de podiums possibles, si l'on suppose qu'il ne peut pas y avoir d'ex aequo ?

Un podium est un arrangement de 3 éléments d'un ensemble en contenant 10 ;

donc le nombre de podiums possibles est égal à : $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720$.

• 8 projecteurs sont disponibles pour éclairer un amphithéâtre.

De combien de façons peut-on l'éclairer avec exactement 5 projecteurs ?

Il s'agit de trouver le nombre de parties de 5 éléments d'un ensemble en contenant 8 ;

c'est-à-dire : $C_8^5 = \frac{8!}{5! 3!} = 56$.

Principe multiplicatif

Propriété

Si un ensemble fini E se décompose en un produit cartésien d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$, alors on a : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \text{Card}(E_3) \times \dots \times \text{Card}(E_p)$.

Exemples

• Combien de nombres de quatre chiffres, tous pairs, peut-on écrire ?

Les chiffres de ces nombres sont choisis dans l'ensemble $\{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$.

Pour le chiffre des milliers, qui doit être non nul, quatre choix sont possibles ; pour chacun des trois autres chiffres, cinq choix sont possibles.

Donc il y a 4×5^3 , c'est-à-dire 500 nombres de quatre chiffres, tous pairs.

• Une classe de terminale SM comprend 8 filles et 12 garçons. Combien d'équipes, composées de 3 filles et 2 garçons, peut-on former ?

Une équipe n'est autre qu'un élément du produit cartésien de deux ensembles : l'un constitué de 3 filles, prises parmi 8, et l'autre constitué de 2 garçons, pris parmi 12.

Donc il y a $C_8^3 \times C_{12}^2$, c'est-à-dire 3 696 équipes composées de 3 filles et 2 garçons.

Principe additif

Propriété 1

Si $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ forment une partition d'un ensemble fini E , alors on a : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \text{Card}(E_3) + \dots + \text{Card}(E_p)$.

Exemple

On veut choisir deux personnes de nationalités différentes parmi 5 Camerounais, 10 Malgaches et 6 Sénégalais. Combien y a-t-il de choix possibles ?

Les deux personnes peuvent être choisies :

– l'une Camerounaise et l'autre Malgache ; le nombre de choix est alors égal à : $C_5^1 \times C_{10}^1$;

– l'une Camerounaise et l'autre Sénégalaise ; le nombre de choix est alors égal à : $C_5^1 \times C_6^1$;

– l'une Malgache et l'autre Sénégalaise ; le nombre de choix est alors égal à : $C_{10}^1 \times C_6^1$.

Donc le nombre de choix possibles est égal à : $C_5^1 \times C_{10}^1 + C_5^1 \times C_6^1 + C_{10}^1 \times C_6^1$; c'est-à-dire : 140.

Les propriétés suivantes découlent de la propriété précédente.

Propriétés 2

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E . On a :

• $\text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E)$;

• $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Dans cette propriété, $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans E .

Exemple

On effectue une enquête auprès des lecteurs de trois revues a, b et c.

Sur 100 personnes interrogées : 55 lisent la revue a, 44 la revue b, 33 la revue c ;

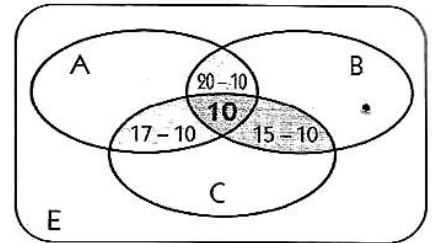
20 lisent les revues a et b, 15 les revues b et c, 17 les revues a et c ;

10 lisent les revues a, b et c.

Déterminer le nombre de personnes :

- qui ne lisent que a et b, que b et c, que a et c ;
- qui ne lisent que a, que b, que c ;
- qui ne lisent aucune des trois revues.

Sur le diagramme ci-contre, E représente l'ensemble des 100 personnes interrogées, A, B et C les sous-ensembles de ces personnes, lecteurs respectifs des revues a, b et c.



• Le nombre de personnes qui ne lisent que a et b est égal à :

$$20 - 10 = 10 ;$$

le nombre de personnes qui ne lisent que b et c est égal à :

$$15 - 10 = 5 ;$$

le nombre de personnes qui ne lisent que a et c est égal à :

$$17 - 10 = 7 .$$

• Le nombre de personnes qui ne lisent que a est égal à : $55 - (10 + 10 + 7) = 28 ;$

le nombre de personnes qui ne lisent que b est égal à : $44 - (10 + 10 + 5) = 19 ;$

Le nombre de personnes qui ne lisent que c est égal à : $33 - (5 + 10 + 7) = 11 .$

• Le nombre de personnes qui ne lisent aucune des revues est égal à :

$$100 - (28 + 19 + 11) - (10 + 5 + 7) - 10 = 10 .$$

Exercices

1.a Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{21!}{18!}$ b) $\frac{8! - 7!}{7!}$ c) $\frac{7! 5!}{6! 4!}$ d) $\frac{1}{5!} - \frac{42}{7!}$

e) $\frac{n!}{n}$ f) $\frac{(n-2)!}{(n+1)!}$ g) $\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

h) $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$

1.b En utilisant la notation factorielle, donner une autre écriture des nombres suivants.

a) $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$ b) $n(n^2 - 1)$
c) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2 \times 3}$ d) $(n+3)(n+2)(n+1)$

1.c Démontrer que pour tous entiers naturels a et b non nuls, on a : $C_{a+b}^a = C_{a+b-1}^a + C_{a+b-1}^b$.

1.d Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes.

a) $C_n^2 = 36$ b) $C_n^{n-2} = 28$
c) $C_n^4 = C_n^3$ d) $C_n^5 = 17C_n^4$

1.e Développer :

$$(3 + 2x)^4 ; (2 - 3x)^7 ; (3 - x^2)^6 ; (2x^2 + 7y)^4 .$$

1.f À l'aide des chiffres 0, 1, 2, ... 9 on forme des numéros de téléphone à six chiffres.

1. Déterminer le nombre de numéros que l'on peut former.

2. Déterminer le nombre de numéros :

a) formés de deux 1, trois 2 et un 7 ;

b) formés avec deux chiffres distincts et deux seulement ;

c) comportant exactement trois fois le chiffre 1.

1.g On lance cinq fois de suite un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Déterminer le nombre de résultats :

a) où tous les chiffres sont inférieurs ou égaux à 2 ;

b) où tous les chiffres sont pairs ;

c) où ne figure pas le chiffre 1 ;

d) où figure au moins une fois le chiffre 1 ;

e) où figure au plus une fois le chiffre 1 ;

f) où le chiffre 6 figure exactement trois fois consécutives.

2

Calculs de probabilités

2.1. Vocabulaire des événements

Expérience aléatoire

- On lance un dé et on observe le numéro tiré ; six résultats sont possibles : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. On dit qu'on a réalisé une **expérience aléatoire** (ou **épreuve**) comportant six **éventualités** et que l'**univers** associé à cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
- On lance un dé et on observe la parité du numéro tiré ; deux résultats sont possibles : P (le numéro est pair) et I (le numéro est impair). On a cette fois réalisé une expérience aléatoire comportant deux éventualités ; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{P ; I\}$.
- Une urne contient des boules blanches, rouges et noires. On tire une boule dans cette urne et on note la couleur obtenue ; trois résultats sont possibles : B (la boule est blanche), R (la boule est rouge) et N (la boule est noire). On a maintenant réalisé une expérience aléatoire comportant trois éventualités ; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{B ; R ; N\}$.

Dans ce chapitre, les univers considérés sont des ensembles finis non vides.

Événements liés à une expérience aléatoire

Définitions

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

- On appelle **événement** toute partie de Ω .
- On appelle **événement élémentaire** tout singleton de Ω .

Exemples

On lance un dé et on observe le numéro tiré.

- « Obtenir un nombre pair » est l'événement $\{2 ; 4 ; 6\}$.
- « Obtenir un nombre premier pair » est l'événement élémentaire $\{2\}$.

Dans une épreuve, un événement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience.

Par exemple, si on obtient 4 lors du lancer d'un dé, l'événement « Obtenir un nombre pair » est réalisé.

Le tableau suivant indique la signification des diverses expressions utilisées dans le langage des événements.

Vocabulaire des événements	Signification ensembliste	Notation
Univers	Ensemble Ω	Ω
Éventualité	Élément de Ω	ω ($\omega \in \Omega$)
Événement	Partie de Ω	A ($A \subset \Omega$)
Événement élémentaire	Singleton	$\{\omega\}$ ($\omega \in \Omega$)
Événement certain	Partie pleine	Ω
Événement impossible	Partie vide	$\emptyset$
Événement « A ou B »	Réunion des parties A et B	$A \cup B$
Événement « A et B »	Intersection des parties A et B	$A \cap B$
Événements A et B incompatibles	Parties A et B disjointes	$A \cap B = \emptyset$
Événement contraire de A	Complémentaire de A dans Ω	$\bar{A}$

Exemples

On lance un dé et on observe le numéro tiré.

On considère les événements

- A : « Obtenir un nombre pair »,
- B : « Obtenir un nombre premier »,
- C : « Obtenir 6 ».

- On a : $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$; $A \cup B$ est l'événement « Obtenir un nombre pair ou premier ».
- On a : $A \cap B = \{2\}$; $A \cap B$ est l'événement « Obtenir un nombre pair et premier ».
- Les événements B et C sont incompatibles.
- On a : $\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$; $\bar{A}$ est l'événement « Obtenir un nombre impair ».

2.2. Probabilité d'un événement

Introduction

On lance un dé bien équilibré et on note le numéro tiré ; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

La chance d'apparition est la même pour chaque face.

- L'événement $\{2\}$ a une chance sur six d'être réalisé ; on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{6}$.
- L'événement $\{1 ; 5\}$ a deux chances sur six d'être réalisé ; on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{3}$.
- « Obtenir un nombre pair » est l'événement $\{2 ; 4 ; 6\}$, dont la probabilité est $\frac{1}{2}$.
- L'événement certain a six chances sur six d'être réalisé ; sa probabilité est 1.
- L'événement impossible n'a aucune chance d'être réalisé ; sa probabilité est 0.

Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

Une probabilité sur l'univers Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0 ; 1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel $P(A)$ appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent ;
- la probabilité de l'événement certain est 1 ;
- la probabilité de l'événement impossible est 0.

Remarques

- La probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est notée $P(\omega_i)$.
- Une probabilité P est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.

ω	ω_1	...	ω_i	...	ω_n
$P(\omega)$	P_1	...	P_i	...	P_n

Exemples

On lance un dé pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro tiré.

La probabilité d'apparition d'un nombre pair est le double de la probabilité d'apparition d'un nombre impair et les probabilités d'apparition de deux nombres de même parité sont égales.

- Calculer la probabilité d'apparition de chaque face du dé.

L'univers est : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Soit p la probabilité d'apparition d'un nombre pair et q celle d'un nombre impair.

On a : $p = 2q$.

Or : $P(\Omega) = 1$; donc : $3p + 3q = 1$.

On en déduit que : $q = \frac{1}{9}$ et $p = \frac{2}{9}$.

Le tableau ci-contre donne la probabilité d'apparition de chaque face du dé.

- Quelle est la probabilité d'apparition d'un nombre inférieur ou égal à 4 ?

La probabilité cherchée est celle de l'événement : $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

On a : $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{2}{3}$.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\omega)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

Propriétés 1

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω , A et B deux événements. On a :

- si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Ces propriétés sont des conséquences immédiates de la définition.

Propriété 2

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω , A et B deux événements.

On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration

Notons : A' le complémentaire de $A \cap B$ dans A ,

B' le complémentaire de $A \cap B$ dans B .

On a : $A = (A \cap B) \cup A'$, avec $(A \cap B) \cap A' = \emptyset$;

donc : $P(A) = P(A \cap B) + P(A')$.

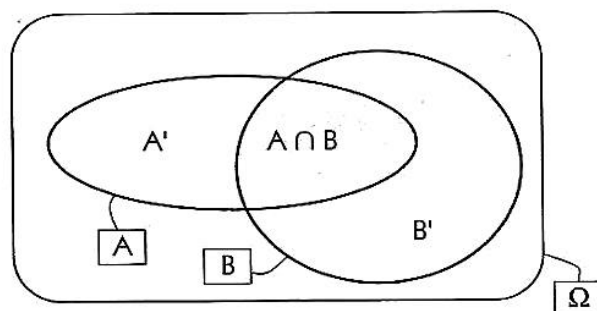
On a : $B = (A \cap B) \cup B'$, avec $(A \cap B) \cap B' = \emptyset$;

donc : $P(B) = P(A \cap B) + P(B')$.

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= 2P(A \cap B) + P(A') + P(B') \\ &= 2P(A \cap B) + P(A' \cup B') \quad (\text{puisque } A' \cap B' = \emptyset) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(A' \cup B') \\ &= P(A \cap B) + P(A \cup B). \end{aligned}$$

Donc : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



Exemples

Une urne contient 15 boules, numérotées de 1 à 15. On tire au hasard une boule et on note son numéro N . Les boules ont la même probabilité d'être tirées.

On désigne respectivement par A et B les événements « N est pair » et « N est multiple de trois ».

- Calculer la probabilité des événements A , B et $A \cap B$.

On a : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15\}$.

De plus : $\forall \omega \in \Omega, P(\omega) = \frac{1}{15}$;

$$\text{donc : } P(A) = P(\{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14\}) = \frac{7}{15} ;$$

$$P(B) = P(\{3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15\}) = \frac{5}{15} ;$$

$$P(A \cap B) = P(\{6 ; 12\}) = \frac{2}{15} .$$

- Calculer la probabilité des événements $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $A \cup B$.

$$\text{On a : } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{8}{15} ;$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{10}{15} ;$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{15} + \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} .$$

Événements indépendants - Expériences aléatoires indépendantes

Définition

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω .

Deux événements A et B sont indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Ainsi, tout événement est indépendant de l'événement impossible.

Exemples.

• Dans une classe de 60 élèves, on aimerait savoir si les élèves littéraires sont meilleurs en sport que les élèves non littéraires. Un élève est déclaré littéraire lorsqu'il a obtenu la moyenne en français, sportif lorsqu'il a obtenu la moyenne en éducation physique et sportive. Le tableau ci-contre récapitule les observations faites dans cette classe.

	Littéraires	Non littéraires	Total
Sportifs	24	16	40
Non sportifs	12	8	20
Total	36	24	60

On choisit au hasard un élève et on considère les événements suivants.

S : « l'élève est sportif » ;

L : « l'élève est littéraire ».

On a : $P(S) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$, $P(L) = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$ et $P(S \cap L) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

Donc : $P(S \cap L) = P(S) \times P(L)$; les événements S et L sont indépendants.

Si on choisit un littéraire au hasard, la probabilité pour qu'il soit sportif est : $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Si on choisit un non littéraire au hasard, la probabilité pour qu'il soit sportif est encore : $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

Dans cette classe, les littéraires ne sont ni plus ni moins sportifs que les non littéraires.

• Une classe comprend 9 filles et 36 garçons.

À une demande de volontaires pour former une équipe de football mixte, on a obtenu les réponses ci-contre.

On choisit un (ou une) élève au hasard dans la classe et on considère les événements suivants.

F : « l'élève est une fille » ;

V : « l'élève est volontaire ».

On a : $P(F) = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$, $P(V) = \frac{33}{45} = \frac{11}{15}$ et $P(F \cap V) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$.

Donc : $P(F \cap V) \neq P(F) \times P(V)$; les événements F et V ne sont pas indépendants.

Si on choisit une fille au hasard, la probabilité pour qu'elle soit volontaire est : $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Si on choisit un garçon au hasard, la probabilité pour qu'il soit volontaire est : $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

Dans cette classe les garçons sont plus volontaires que les filles pour jouer au football.

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Si n expériences aléatoires sont indépendantes alors, pour tous événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ de chacun des univers associés à ces épreuves, on a : $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$.

Exemple

On lance deux fois un dé bien équilibré ; cette expérience aléatoire est constituée de deux épreuves, où le résultat de l'une n'affecte pas celui de l'autre ; ces deux épreuves sont indépendantes.

Le tableau ci-contre, qui décrit l'univers associé et donne la probabilité des événements élémentaires, permet de calculer la probabilité de chaque événement.

• Ainsi :

– l'événement A : « Obtenir 2 au second lancer » (ligne coloriée) a pour probabilité : $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$;

– l'événement B : « Obtenir un nombre pair au premier lancer » (colonnes coloriées) a pour probabilité :

$3 \times 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{2}$;

		1 ^{er} lancer					
		1	2	3	4	5	6
2 ^e lancer	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

– $A \cap B$ est l'événement : « Obtenir un nombre pair au premier lancer et 2 au second lancer », dont la probabilité est (intersection de la ligne et des colonnes coloriées) : $3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.

On constate que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

• De même, si C et D sont les événements « Obtenir un multiple de 3 au premier lancer » et « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 au second lancer », on a :

$$P(C \cap D) = P(C) \times P(D) = (2 \times 6 \times \frac{1}{36}) \times (3 \times 6 \times \frac{1}{36}) = \frac{1}{6}.$$

Remarque

On utilise l'indépendance dans les deux situations suivantes :

- soit l'indépendance est à rechercher ; on vérifie si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et on conclut.
- soit l'indépendance est acquise ou admise ; on peut alors utiliser la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Équiprobabilité

• Lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

• Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme : « dé parfait », « dé non pipé », « pièce parfaite », « boules indiscernables au toucher », « cartes bien battues », « tirage au hasard » ...

Propriété

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω .

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout événement A on a : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Démonstration

Les événements élémentaires ont tous la même probabilité p.

$$\text{On a : } P(\Omega) = 1 ; \text{ donc : } p \text{ Card}(\Omega) = 1 ; \text{ d'où : } p = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}.$$

$$\text{On en déduit que pour tout événement A, on a : } P(A) = p \text{ Card}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Remarque

Les éventualités de A sont appelées cas favorables et celles de Ω cas possibles.

$$\text{On écrit souvent : } P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemples

• On lance deux dés non pipés et on note la somme des nombres obtenus.

Quelle est la probabilité d'obtenir 10 ?

L'univers Ω est l'ensemble des couples d'éléments de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

On a : $\text{Card}(\Omega) = 36$.

« Obtenir 10 » est l'événement $\{(4 ; 6) ; (5 ; 5) ; (6 ; 4)\}$.

On est dans une situation d'équiprobabilité, donc la probabilité cherchée est : $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

• On tire simultanément et au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité de tirer le roi de cœur ?

On est dans une situation d'équiprobabilité.

Le nombre de cas possibles est C_{32}^5 .

Le nombre de cas favorables est C_{31}^4 .

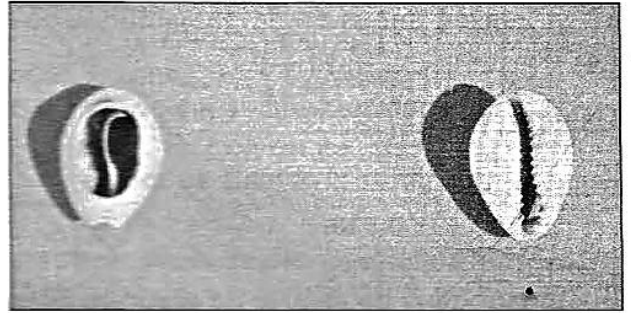
$$\text{Donc la probabilité cherchée est : } \frac{C_{31}^4}{C_{32}^5} = \frac{\frac{31 \times 30 \times 29 \times 28}{4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{5}{32}.$$

2.3. Schéma de Bernoulli³

Introduction

Le cauri est un coquillage présentant deux faces, l'une bombée (ou dos) et l'autre fendue (ou fente). Pour que le cauri puisse tenir en équilibre aussi bien sur le dos que sur la fente, on rogne artificiellement le dos pour l'aplatir.

D'après une étude statistique (*Les jeux de cauris* de S. Doumbia et J.C. Pil) lorsqu'on lance un cauri, la probabilité d'obtenir le dos est : $\frac{3}{5}$.



• Si on lance deux fois le cauri, le résultat de la première épreuve n'affecte pas celui de la seconde. Donc, le lancer de cauri est répété deux fois *de façon indépendante*.

• Au lieu de deux, on peut répéter n fois cette épreuve.

Définitions

- Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux éventualités.
- Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli.

L'une des éventualités est appelée succès et l'autre échec.

Propriété

Revenons au lancer de cauri, épreuve de Bernoulli où :

- l'apparition du dos, appelée succès et notée S , a pour probabilité : $\frac{3}{5}$;
- l'apparition de la fente, appelée échec et notée $\bar{S}$, a pour probabilité : $\frac{2}{5}$.

Répétons cette épreuve n fois, de façon indépendante, et intéressons-nous au nombre de succès obtenus.

- Il est immédiat que dans ce schéma de Bernoulli :
 - toute éventualité est un n -uplet de l'ensemble $\{S ; \bar{S}\}$;
 - que le nombre d'éventualités, constituées de k succès ($0 \leq k \leq n$) et de $(n - k)$ échecs, est égal à C_n^k .
- Les n épreuves étant indépendantes, la probabilité de tout événement élémentaire est égale au produit des probabilités des succès et échecs qui le constituent.

Donc la probabilité d'obtenir k succès ($0 \leq k \leq n$) est égale à : $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

On en déduit la propriété suivante.

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves, où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p (celle de l'échec est $1 - p$).

La probabilité d'obtenir exactement k succès ($0 \leq k \leq n$) au cours de ces n épreuves est :

$$p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Remarque

On a : $p_0 + p_1 + \dots + p_n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = [p + (1 - p)]^n = 1$.

Exemple

En 1654, le chevalier de Méré, philosophe et écrivain de la cour de Louis XIV demanda à Pascal : « Qu'est-ce qui est plus probable : sortir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé ou sortir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés ? »

³ Bernoulli Jacques 1^{er}, mathématicien suisse – 1654 - 1705

Lancer d'un dé

Si on lance un dé parfait, la probabilité d'obtenir 6 est : $\frac{1}{6}$.

Si on lance 4 fois le dé, la probabilité d'obtenir k fois 6 est : $p_k = C_4^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$.

On a : $p_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

Donc la probabilité d'obtenir au moins une fois 6 est : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,518$.

Lancer de deux dés

Si on lance deux dés parfaits, la probabilité d'obtenir (6 ; 6) est : $\frac{1}{36}$.

Si on lance 24 fois les deux dés, la probabilité d'obtenir k fois (6 ; 6) est : $p_k = C_{24}^k \left(\frac{1}{36}\right)^k \left(\frac{35}{36}\right)^{24-k}$.

On a : $p_0 = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

Donc la probabilité d'obtenir au moins une fois (6 ; 6) est : $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491$.

Il y a donc plus de chance de sortir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé, que de sortir au moins un double 6 en lançant 24 fois deux dés.

2.4. Travaux dirigés

1. Problème de Galilée

Le prince de Toscane demanda un jour à Galilée : « Pourquoi, lorsqu'on lance simultanément trois dés, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, alors que chacune de ces sommes est obtenue de six façons différentes ? »

Ce problème fut à l'époque l'objet de nombreuses controverses. Nous en proposons ici une solution.

On lance simultanément trois dés parfaits et on note la somme des nombres obtenus.

a) Calculer la probabilité d'obtenir 10.

b) Calculer la probabilité d'obtenir 9.

Solution

Le nombre de cas possibles est : 6^3 .

a) On a : $10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4$.

Les sommes constituées de trois nombres différents sont obtenues chacune de 6 façons (nombre de permutations de ces trois nombres).

Les sommes constituées de trois nombres, dont deux égaux, sont obtenues chacune de 3 façons (par exemple : $2 + 2 + 6 = 2 + 6 + 2 = 6 + 2 + 2$).

Le nombre de cas favorables est donc : $6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 3 = 27$.

La probabilité d'obtenir 10 est donc : $\frac{27}{6^3} = \frac{1}{8} = 0,125$.

b) On a : $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$.

Le nombre de cas favorables est donc : $6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 1 = 25$.

La probabilité d'obtenir 9 est donc : $\frac{25}{216} \approx 0,116$.

En jetant simultanément trois dés, on a effectivement plus de chance d'obtenir une somme égale à 10 qu'une somme égale à 9.

2. Problème de damier

On dispose d'un damier à 16 cases, sur lequel on répartit au hasard 4 pions indiscernables à raison d'un pion au plus par case. Calculer la probabilité d'obtenir :

a) exactement un pion par ligne et par colonne ;

b) exactement une colonne sans pion ;

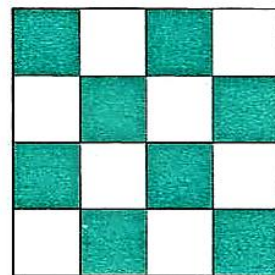
c) au moins une colonne sans pion.

Solution

Le nombre de cas possibles est : $C_{16}^4 = 1\,820$.

a) On obtient exactement un pion par ligne et par colonne en choisissant successivement :

- dans la première colonne, 1 case parmi 4 ; 4 choix sont possibles ;
- dans la deuxième colonne, 1 case parmi les 3 restantes ; 3 choix sont possibles ;
- dans la troisième colonne, 1 case parmi les 2 restantes ; 2 choix sont possibles ;
- dans la dernière colonne, 1 case parmi la case restante ; 1 choix est possible.



Le nombre de cas favorables est donc : $4!$.

On en déduit la probabilité cherchée : $\frac{4!}{C_{16}^4} = \frac{6}{455}$.

b) On obtient exactement une colonne sans pion en choisissant successivement :

– 1 colonne parmi 4, celle sans pion ; 4 choix sont possibles ;

– 1 colonne parmi les 3 restantes, où 2 pions sont répartis dans 4 cases ; $3 \times C_4^2$ choix sont possibles ;

– 1 case dans chacune des 2 colonnes restantes, pour y placer 1 pion ; 4×4 choix sont possibles.

Le nombre de cas favorables est donc : $4 \times (3 \times C_4^2) \times (4 \times 4)$.

On en déduit la probabilité cherchée : $\frac{4 \times (3 \times C_4^2) \times (4 \times 4)}{C_{16}^4} = \frac{288}{455}$.

c) « Obtenir au moins une colonne sans pion » est le contraire de « Obtenir un pion par colonne ».

Or, une répartition avec un pion par colonne est obtenue en choisissant 1 case dans chacune des 4 colonnes ; $4 \times 4 \times 4 \times 4$ choix sont possibles.

La probabilité de l'événement « Obtenir au moins une colonne sans pion » est :

$$1 - \frac{4^4}{C_{16}^4} = 1 - \frac{64}{455} = \frac{391}{455}.$$

Exercices

2.a Une urne contient des boules blanches, rouges et noires (au moins 3 de chaque couleur).

On tire simultanément 3 boules de cette urne, on note les couleurs obtenues et on considère les événements A : « Obtenir un tirage unicolore » et B : « Obtenir un tirage tricolore ».

a) Citer les événements élémentaires qui constituent A et B.

b) A et B sont-ils des événements incompatibles ? contraires ?

c) Décrire par une phrase les événements $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$. Que dire de l'événement $\bar{A} \cup \bar{B}$?

2.b On lance un dé pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro tiré.

La probabilité d'apparition de 6 est le triple de celle de 1 et les numéros 1, 2, 3, 4, 5 ont la même probabilité d'apparition.

a) Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro.

b) Calculer la probabilité de l'événement « Obtenir un numéro pair ».

c) Calculer la probabilité de l'événement « Obtenir 2 ou 4 ».

2.c Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément et au hasard 5 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants.

a) « Tirer exactement 3 cartes de couleur noire ».

b) « Tirer 3 cartes de couleur noire, 2 cœurs et exactement un as ».

(On rappelle que le trèfle et le pique sont noirs, le carreau et le cœur sont rouges.)

2.d Dans une classe de 40 élèves, 28 apprennent l'anglais, 16 l'allemand et 8 les deux langues. On choisit au hasard un élève dans cette classe et on considère les événements A : « L'élève choisi apprend l'anglais » et B : « L'élève choisi apprend l'allemand ».

Calculer les probabilités des événements suivants : A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.

2.e Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

2.f Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte. Les événements « Obtenir un roi » et « Obtenir un trèfle » sont-ils indépendants ?

2.g On lance un dé non pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Calculer la probabilité des événements suivants.

A : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 »

B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 »

C : « Obtenir un nombre pair ».

2. Étudier l'indépendance des événements A et B ; A et C ; B et C.

2.h Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires, indiscernables au toucher.

On tire successivement 3 boules, en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.

Calculer les probabilités des événements suivants.

a) « Obtenir une boule blanche pour la première fois au troisième tirage » ;

b) « Ne pas obtenir consécutivement 2 boules de la même couleur » ;

c) « Ne pas obtenir 3 boules de la même couleur ».

2.i On lance trois fois une pièce bien équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ? deux fois face ?

3 Variable aléatoire

3.1. Notion de variable aléatoire

Introduction

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules bleues. On tire deux boules simultanément et au hasard. On gagne 100 F par boule rouge tirée.

Déterminer les gains possibles et leurs probabilités respectives.

On peut tirer 0, 1 ou 2 boules rouges et donc gagner 0, 100 ou 200 F.

Désignons par X la somme gagnée en francs.

– L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 2 boules prises parmi les 7 boules de l'urne.

– La probabilité pour que X soit égale à 0 est notée $P(X = 0)$;
c'est la probabilité de l'événement « Tirer deux boules bleues » ;

$$\text{donc : } P(X = 0) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

– $P(X = 100)$ est la probabilité de « Tirer une boule bleue et une boule rouge » ;

$$\text{donc : } P(X = 100) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

– $P(X = 200)$ est la probabilité de « Tirer deux boules rouges » ;

$$\text{donc : } P(X = 200) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}.$$

Les résultats sont présentés dans le tableau ci-contre.

Ce tableau définit une probabilité sur l'univers $\{0 ; 100 ; 200\}$.

x_i	0	100	200
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Définition 1

On appelle variable aléatoire X sur un univers Ω toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.

Notations et vocabulaire

$X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ est appelé **univers image** de Ω par X .

$(X = x_i)$ désigne l'événement « X prend la valeur x_i ».

$(X < \alpha)$ désigne l'événement « X prend une valeur strictement inférieure à α ».

Définition 2

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω .

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe $P(X = x_i)$.

Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Remarque

Lorsqu'on vient de déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire, il est prudent de vérifier que : $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition

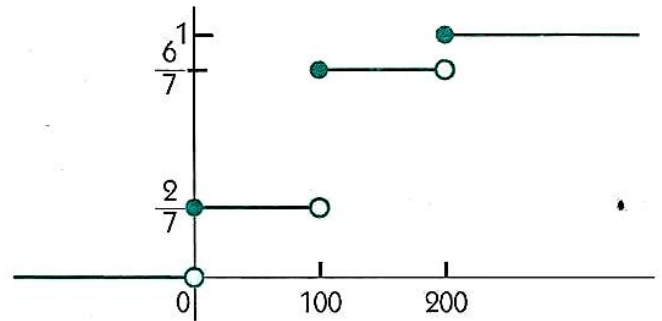
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P .

La fonction de répartition de X est l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0; 1]$ définie par : $F(x) = P(X \leq x)$.

Exemple

Reprenons l'exemple introductif.

$$F \text{ est définie par : } \begin{cases} F(x) = 0 & , \text{ si } x < 0 \\ F(x) = \frac{2}{7} & , \text{ si } 0 \leq x < 100 \\ F(x) = \frac{6}{7} & , \text{ si } 100 \leq x < 200 \\ F(x) = 1 & , \text{ si } 200 \leq x \end{cases}$$



Remarques

- F est une fonction croissante, en escalier.
- La représentation graphique de F correspond, en statistiques, à la courbe des fréquences cumulées croissantes.

3.2. Caractéristiques d'une variable aléatoire

Espérance mathématique

Revenons à l'exemple introductif.

Un joueur avisé accepterait-il de miser 100 F par partie ?

Désignons par Y le gain en francs lors d'une partie.

Y est une variable aléatoire dont l'univers image est : $\{-100; 0; 100\}$.

En effet : $(Y = -100)$ est l'événement « Tirer 0 boule rouge » (le joueur a perdu sa mise) ;

$(Y = 0)$ est l'événement « Tirer 1 boule rouge » (le joueur a récupéré sa mise) ;

$(Y = 100)$ est l'événement « Tirer 2 boules rouges » (le joueur a gagné 100 F).

La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau ci-contre.

Sur un grand nombre de parties, par exemple 700, on peut espérer obtenir :

200 fois l'événement $(Y = -100)$,

400 fois l'événement $(Y = 0)$,

100 fois l'événement $(Y = 100)$.

y_i	-100	0	100
$P(X = y_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Le gain moyen par partie est alors : $\frac{1}{700}(-100 \times 200 + 0 \times 400 + 100 \times 100) = -\frac{100}{7}$.

On peut donc perdre en moyenne environ 14 F par partie.

Un joueur avisé n'accepterait pas de miser 100 F par partie.

On remarque que : $-\frac{100}{7} = -100 \times P(Y = -100) + 0 \times P(Y = 0) + 100 \times P(Y = 100)$.

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, \dots, p_n$.

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel, noté $E(X)$, tel que : $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 1$.

Remarque

L'espérance mathématique correspond, en statistiques, à la moyenne.

Variance, écart type

L'espérance mathématique donne la « valeur moyenne » d'une variable aléatoire, mais ne dit pas comment sont dispersées les valeurs de la variable aléatoire autour de l'espérance mathématique.

Soit X et Y les variables aléatoires dont les lois de probabilités sont données par les tableaux ci-contre.

On a : $E(X) = E(Y) = 5$; mais on constate que les valeurs de Y sont plus éloignées de 5 que celles de X .

Comme en statistiques, pour rendre compte de telles considérations, on introduit la variance et l'écart type d'une variable aléatoire.

x_i	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,8	0,1

y_i	0	1	9	10
$P(Y = y_i)$	0,4	0,1	0,1	0,4

Définitions

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, \dots, p_n$.

- On appelle **variance** de X le nombre réel, noté $V(X)$, tel que : $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$.
- On appelle **écart type** de X le nombre réel, noté $\sigma(X)$, tel que : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Calculons, à l'aide du tableau ci-contre, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X précédente.

On obtient : $V(X) = 0,2$ et $\sigma(X) \approx 0,447$.

x_i	4	5	6	Total
p_i	0,1	0,8	0,1	1
$x_i p_i$	0,4	4	0,6	$E(X) = 5$
$(x_i - E(X))^2 p_i$	0,1	0	0,1	$V(X) = 0,2$

Propriété

Soit X une variable aléatoire. On a : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Cette propriété est connue sous le nom de « formule de König ».

Démonstration

$$\text{On a : } V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2E(X) \sum_{i=1}^n x_i p_i + [E(X)]^2 \sum_{i=1}^n p_i.$$

$$\text{Or : } \sum_{i=1}^n x_i p_i = E(X), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = E(X^2).$$

$$\text{Donc : } V(X) = E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Exemple

Calculons, à l'aide du tableau ci-contre, la variance et l'écart type de la variable aléatoire Y précédente.

On obtient : $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 23,2$;
donc : $\sigma(Y) \approx 4,816$.

y_i	0	1	9	10	Total
p_i	0,4	0,1	0,1	0,4	1
$y_i p_i$	0	0,1	0,9	4	$E(Y) = 5$
$y_i^2 p_i$	0	0,1	8,1	40	$E(Y^2) = 48,2$

Loi Binomiale

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves, où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p (celle de l'échec est $1 - p$). On lui associe la variable aléatoire, notée X , désignant le nombre de succès. L'univers image de X est : $\{0 ; \dots ; n\}$.

L'application $k \mapsto C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ de $\{0 ; \dots ; n\}$ vers $[0 ; 1]$ définit la loi de probabilité de X .

Cette loi de probabilité est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** .

Propriété

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p .

On a : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Démonstration

On a : $E(X) = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k q^{n-k}$ et $V(X) = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - [E(X)]^2$.

Pour $n = 1$, le résultat est immédiat.

On suppose désormais que : $n > 1$.

Posons $q = 1 - p$ et considérons la fonction $f : t \mapsto (pt + q)^n$.

• On a : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k t^k q^{n-k} = (pt + q)^n$.

donc : $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k t^{k-1} q^{n-k} = np(pt + q)^{n-1}$.

En particulier, pour $t = 1$, on obtient : $E(X) = np$.

• On a : $\forall t \in \mathbb{R}, tf''(t) = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k t^k q^{n-k} = npt(pt + q)^{n-1}$;

donc : $\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) + tf''(t) = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k p^k t^{k-1} q^{n-k} = np(pt + q)^{n-1} + npt(n-1)p(pt + q)^{n-2}$.

En particulier, pour $t = 1$, on obtient : $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = np + np^2(n-1)$.

Or : $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = V(X) + [E(X)]^2 = V(X) + (np)^2$;

donc : $V(X) = np - np^2 = np(1 - p)$.

Exercices

3.a Une variable aléatoire X a pour univers image : $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que : $P(5 < X) = \frac{1}{12}$;

$$P(X < 2) = 2P(X = 6) = 2P(X = 2) ;$$

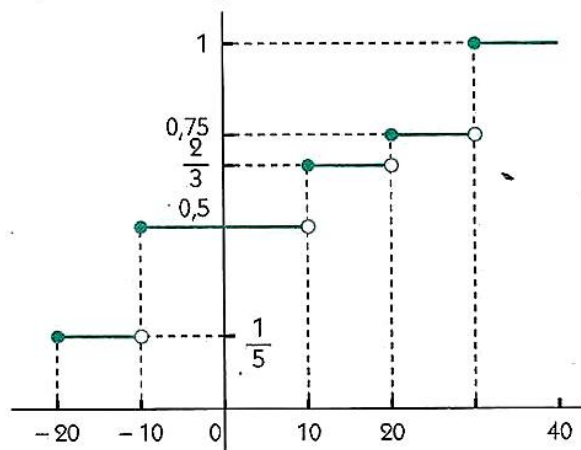
$$P(X = 1) = P(X = 5) ;$$

$$P(X \leq 3) = P(4 \leq X).$$

2. Définir la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.

3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X .

3.b Soit X la variable aléatoire dont la fonction de répartition est représentée ci-dessous.



1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X .

3.c Soit X une variable aléatoire dont l'univers image est $X(\Omega) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ et telle que, pour tout k élément de $X(\Omega)$, $P(X = k)$ est proportionnelle à k .

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Définir la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.

3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X .

3.d On a mesuré la taille des individus d'un groupe et on a obtenu le tableau ci-dessous.

Taille	155	159	167	170	175	177	193
Effectif	1	1	3	1	1	2	1

On choisit au hasard un individu et on désigne par X sa taille en centimètres.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Définir la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.

3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X .

3.e On lance dix fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et on désigne par X la variable aléatoire, qui associe à ces dix lancers le nombre de piles obtenu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

Exercices

APPRENTISSAGE

Analyse combinatoire

1 Soit n un entier naturel non nul.
Démontrer que :

$$\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^2}{(n+1)!}.$$

2 Démontrer que pour tous entiers naturels n, p et k , tels que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$C_{n+k}^k \times C_n^p = C_{n+k}^{p+k} \times C_{p+k}^k.$$

3 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes.

a) $C_n^2 = 190$

b) $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$

c) $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7}{2}n$

d) $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$

e) $C_{n+10}^{n+4} = C_{n+10}^{2n-10}$.

4 Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système :

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+1} \\ 4C_x^y = 5C_x^{y-1}. \end{cases}$$

5 Démontrer, par récurrence sur n , que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n p(p!) = (n+1)! - 1.$$

6 Écrire sous la forme $a + b\sqrt{3}$, où a et b sont des nombres entiers, les nombres suivants.

a) $(3 - \sqrt{3})^4$ b) $(1 + 2\sqrt{3})^5$ c) $(2\sqrt{3} - 5)^3$.

7 Développer et simplifier les expressions suivantes.

a) $(1 - i)^4$ b) $(1 + 2i)^5$ c) $(1 + 2i)^6$, où $j = e^{\frac{2\pi}{3}}$.

8 Démontrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n$, on a : $p C_n^p = n C_{n-1}^{p-1}$.
En déduire que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\sum_{p=1}^n p C_n^p = n 2^{n-1}.$$

9 Soit n un entier naturel.

1. Démontrer, par récurrence sur k , que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+k-1}^n = C_{n+k}^{n+1}.$$

2. En déduire la somme des 10 premiers termes non nuls de la colonne du triangle de Pascal, formée des nombres C_n^{10} ($n \geq 10$).

10 1. Développer $(1+x)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

2. En déduire la valeur des sommes suivantes :

a) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n$

b) $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^p C_n^p + \dots + (-1)^n C_n^n$

c) $C_n^0 + 2C_n^1 + \dots + 2^p C_n^p + \dots + 2^n C_n^n$.

3. On suppose que : $n = 2k$.

Calculer : $C_{2k}^0 + C_{2k}^2 + \dots + C_{2k}^{2k}$.

4. On suppose que : $n = 2k + 1$.

Calculer : $C_{2k+1}^0 + C_{2k+1}^2 + \dots + C_{2k+1}^{2k}$.

11 On tire simultanément 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. Déterminer le nombre de tirages contenant :

a) exactement 3 piques ;

b) au moins 6 piques ;

c) exactement 3 piques, dont le roi ;

d) 3 piques, 2 trèfles et 3 cœurs.

12 Combien y a-t-il de nombres entiers de quatre chiffres, dans lesquels 5 apparaît au moins deux fois ?

Combien y a-t-il de nombres entiers ayant quatre chiffres au plus et divisibles par 5 ?

13 Une compagnie aérienne veut organiser un circuit touristique ABIDJAN – ABIDJAN, via les villes de COTONOU, DAKAR, LIBREVILLE, NIAMEY et YAOUNDE.

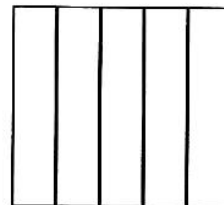
1. Combien y a-t-il d'itinéraires possibles ?

2. Combien de ces itinéraires ont-ils pour troisième étape la ville de NIAMEY ?

3. Pour combien de ces itinéraires l'étape de DAKAR précède-t-elle celle de YAOUNDE ?

14 On dispose de 4 couleurs pour colorier les 5 bandes du drapeau ci-contre.

Combien de drapeaux différents peut-on obtenir, si deux bandes voisines ne peuvent avoir la même couleur ?



15 Soit n et p deux entiers naturels tels que $0 < p < n$, E un ensemble à n éléments, x_0 un élément de E .

1. a) Quel est le nombre de parties de p éléments de E ?

b) Quel est le nombre de parties de p éléments de E contenant x_0 ? ne contenant pas x_0 ?

c) Quel résultat, démontré dans le cours, a-t-on ainsi retrouvé ?

2. a) En s'inspirant de la méthode utilisée dans la question précédente, calculer de deux manières le nombre d'arrangements de p éléments de E .

b) En déduire que : $A_n^p = A_{n-1}^p + p A_{n-1}^{p-1}$.

16 Soit n un entier naturel.

En calculant de deux manières le nombre de tirages de n boules que l'on peut effectuer dans une urne qui contient n boules rouges et n boules blanches, démontrer que :

$$\sum_{p=0}^n (C_n^p)^2 = C_{2n}^n.$$

Calculs de probabilités

17 On lance deux fois de suite un dé non pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On gagne lorsqu'on fait apparaître au moins un 6.
Calculer la probabilité de gagner.

18 Dans une classe, on a noté que pendant le premier trimestre :

- 25 % des élèves ont été absents au moins un jour ;
- 12 % des élèves ont été absents au moins deux jours ;
- 8 % des élèves ont été absents au moins trois jours ;
- 6 % des élèves ont été absents au moins quatre jours ;
- 5 % des élèves ont été absents au moins cinq jours.

On choisit au hasard un élève de cette classe. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

- « L'élève n'a jamais été absent » ;
- « L'élève a été absent au moins un jour » ;
- « L'élève a été absent exactement deux jours » ;
- « L'élève a été absent moins de quatre jours ».

19 Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément et au hasard 4 cartes. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

- « Obtenir une carte de chaque couleur » ;
- « Obtenir exactement un as » ;
- « Obtenir aucun as » ;
- « Obtenir au moins un as » ;
- « Obtenir deux cœurs et deux piques » ;
- « Obtenir deux cœurs et un as exactement ».

20 Une urne contient 36 boules indiscernables au toucher, dont une est blanche, une est rouge et les autres sont vertes. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule de chaque couleur ?
2. Quelle est la probabilité de tirer trois boules vertes ?

21 1. On marque n points sur un cercle ($n \geq 3$). On en choisit 2 au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'ils soient consécutifs ?
2. Même question lorsque les n points sont sur une droite.

22 Soient A et B deux événements indépendants.

- a) Démontrer que : $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A) \times P(B)$.
- b) En déduire que A et $\bar{B}$ sont des événements indépendants.
- c) Démontrer que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi des événements indépendants.

23 Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A \cap B) = 0,1$ et $P(B) = 0,5$. Calculer $P(A)$ et $P(A \cup B)$.

24 1. Dans le lancer d'un dé non pipé, les événements « Obtenir un nombre pair » et « Obtenir un multiple de 3 » sont-ils indépendants ?

2. Dans le lancer simultané de deux dés non pipés, les événements « Obtenir une somme égale à un multiple de 3 » et « Obtenir une somme divisible par 4 » sont-ils indépendants ?

25 Six couples, dont le couple Traoré, dînent ensemble. À la fin du repas, on tire au sort 4 personnes pour faire la vaisselle. On considère les événements :

- A : « aucun homme n'est désigné » ;
 - B : « Monsieur Traoré est désigné » ;
 - C : « deux couples sont désignés ».
- a) Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?
 - b) Les événements A et C sont-ils incompatibles ? indépendants ?

26 Une urne contient 10 boules, dont 3 sont rouges et les autres bleues.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une boule prise au hasard soit rouge ?
2. On prend successivement et avec remise 3 boules au hasard. Quelle est la probabilité pour que les 3 boules soient rouges ?
3. On prend simultanément 3 boules au hasard. Quelle est la probabilité pour que les 3 boules soient rouges ?

27 Un atelier est constitué de trois machines A, B et C utilisées pour la même production. Le taux de panne de chacune d'elles, ramené en journées entières d'indisponibilité, est :

- 5 jours d'arrêt sur 200 jours ouvrables pour la machine A ;
- 3 jours d'arrêt sur 200 jours ouvrables pour la machine B ;
- 10 jours d'arrêt sur 200 jours ouvrables pour la machine C.

Pour un jour ouvrable donné, calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

- « La machine A est en état de marche » ;
- « La machine A est en panne » ;
- « La machine B ou la machine C sont en panne » ;
- « Aucune machine n'est en panne ».

28 À la kermesse du lycée, un jeu consiste à tirer 2 enveloppes parmi 5 dont une contient un billet de 1 000 F, 2 contiennent chacune un billet de 500 F et les 2 autres contiennent chacune une feuille sans valeur. Les enveloppes sont identiques et non transparentes.

1. Quelle est la probabilité de ne rien gagner ?
2. Quelle est la probabilité de gagner exactement 500 F ?
3. Quelle est la probabilité de gagner exactement 1 000 F ?

29 Un lot de vaccin contre le choléra est efficace à 55 %, c'est-à-dire que sur 100 personnes vaccinées, 55 seulement sont sûres d'être protégées contre la maladie. On vaccine 10 personnes avec ce produit. Quelle est la probabilité pour que :

- a) aucune des personnes ne soit protégée ?
- b) la moitié des personnes soient protégées ?
- c) les 10 personnes soient protégées ?

30 On suppose que dans un pays il naît en moyenne 52 garçons pour 50 filles.

1. Un enfant va naître. Quelle est la probabilité :
 - a) pour que cet enfant soit un garçon ?
 - b) pour que cet enfant soit une fille ?
2. Dans une famille de 5 enfants, quelle est la probabilité :
 - a) pour qu'il y ait 3 filles et 2 garçons ?
 - b) pour qu'il y ait 5 filles ?

31 Dans une ville, il y a trois médecins. Quatre habitants de cette ville, malades le même jour, appellent au hasard l'un de ces trois médecins.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un seul médecin soit appelé ?
2. Quelle est la probabilité pour que les trois médecins soient appelés ?

32 On répartit au hasard 7 pions sur le damier ci-après, à raison d'un pion au plus par case.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

A : « 4 pions sont placés sur une même rangée horizontale » ;

B : « Aucune rangée horizontale ne contient trois pions » ;

C : « Une rangée horizontale et une seule contient exactement trois pions » ;

D : « Deux rangées horizontales contiennent exactement trois pions ».

2. Vérifier que : $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$.



33 Un étudiant doit subir un examen dont le programme comporte 15 questions.

Il n'en a apprises que 10.

Sachant que l'examineur lui posera 3 questions, quelle est la probabilité pour que le candidat ait appris ces questions ?

Combien aurait-il dû, au minimum, apprendre de questions pour que cette probabilité soit au moins égale à 0,5 ?

34 Deux personnes crient en même temps un chiffre compris entre 0 et 9.

1. Quelle est la probabilité pour que les deux personnes crient au moins une fois le même chiffre au cours de cinq expériences ?

2. Combien de fois faut-il répéter l'expérience pour que les deux personnes crient au moins une fois le même chiffre avec une probabilité supérieure à 0,5 ?

Variable aléatoire

35 On lance deux dés non pipés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque lancer associe la valeur absolue de la différence des nombres obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Définir la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.

3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X .

36 On lance huit fois un dé non pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on désigne par X la variable aléatoire, qui associe à ces huit lancers le nombre de multiples de 3 obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X .

37 Une urne contient 3 boules vertes, 4 boules rouges et 5 boules bleues. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1. a) Quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?
b) Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?

2. Lorsqu'on tire une boule bleue, on marque un point ; lorsqu'on tire une boule rouge, on perd un point ; lorsqu'on tire une boule verte, on marque zéro point. On désigne par X le nombre de points marqués.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X .

38 Une loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte six portes de sortie, numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 100 F ; il reçoit 600 F si la bille franchit les portes 1 ou 6, 200 F si elle franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.

Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise.

Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur dans une partie.

1. Quelles sont les valeurs possibles de Y ?

2. Déterminer la loi de probabilité de Y .

3. Le jeu est-il équitable ?

(Un jeu est équitable si l'espérance mathématique du gain est nulle.)

39 On lance deux dés non pipés et on considère la variable aléatoire X , qui à chaque lancer associe la somme des deux nombres obtenus.

1. a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Quelle est la probabilité de l'événement $(X > 2)$?

2. On appelle succès la réalisation de l'événement $(X > 2)$ et on répète l'épreuve 6 fois de suite.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux succès ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au plus deux succès ?

40 Une urne U contient une boule portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2. Une urne V contient une boule portant le numéro 4 et n boules portant le numéro 3. On tire au hasard une boule de U , une boule de V et on désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros portés par les deux boules.

1. Déterminer en fonction de n la loi de probabilité de X .

2. Calculer en fonction de n l'espérance mathématique $E(X)$.

3. Déterminer n pour que : $E(X) = \frac{59}{12}$.

4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $E(X) < 4,8$.

41 Un tireur vise une cible. La probabilité pour qu'il touche la cible est 0,7. Il tire 3 fois de suite. On note X le nombre de fois où il a atteint la cible. Déterminer la loi de probabilité de X .

42 Une urne contient $n - 1$ boules blanches et une boule noire. On tire au hasard, successivement et sans remise toutes les boules. On considère la variable aléatoire X qui vaut k ($1 \leq k \leq n$) lorsque la boule noire est obtenue au k -ième tirage.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X .

43 Combien de fois faut-il jeter un dé non pipé pour être sûr d'obtenir au moins une fois 6 à 50% ? à 90% ? à 99% ?

44 Une première urne contient huit boules vertes, dont une porte le chiffre 1, trois le chiffre 2 et quatre le chiffre 4. Une deuxième urne contient six boules rouges, dont une porte le chiffre 3, deux le chiffre 5 et trois le chiffre 6.

1. On tire au hasard une boule de chaque urne. On désigne par X le chiffre porté par la boule verte et par Y le chiffre porté par la boule rouge.

a) Calculer la probabilité de l'événement $\{X = 2 \text{ et } Y = 6\}$.

b) Démontrer que la probabilité de l'événement $\{X + Y \geq 8\}$ est égale à $\frac{29}{48}$.

2. On note A l'événement $\{X + Y \geq 8\}$. On effectue dix fois de suite le tirage décrit en 1., en remettant chaque fois les boules tirées dans leurs urnes respectives. Les tirages sont indépendants. On appelle Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A au cours de ces dix épreuves. Calculer la probabilité de l'événement $\{Z = 5\}$ et l'espérance mathématique de Z .

APPROFONDISSEMENT

45 Pour tout entier naturel n , on désigne par R_n le polynôme défini par : $R_n(x) = (x + 1)^n$.

1. Soit n, p et q trois entiers naturels tels que : $n \leq p + q$. En s'aidant de la formule du binôme, déterminer le coefficient de x^n dans le développement de chacun des membres de l'égalité : $R_{p+q} = R_p R_q$.

2. En déduire que pour tout triplet $(n; p; q)$ d'entiers naturels tels que $n \leq p + q$, on a :

$$C_{p+q}^n = \sum_{k=0}^n C_p^k C_q^{n-k}.$$

46 Soit P le polynôme défini par : $P(x) = (x + 1)^{2n}$.

1. Quel est le coefficient a_n du terme de degré n de P ?

2. En appliquant la formule du binôme à l'égalité $P(x) = (x + 1)^n (x + 1)^n$, trouver une autre expression de a_n .

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n k C_n^k = \frac{n}{2} C_{2n}^2$.

47 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}.$$

(On pourra s'inspirer de la démonstration des formules de l'espérance mathématique et de la variance d'une variable aléatoire dont la loi de probabilité est une loi binomiale.)

48 ABCDEF est un hexagone convexe régulier.

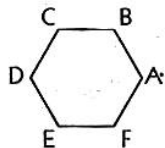
1. On choisit simultanément et au hasard deux sommets de l'hexagone. Quelle est la probabilité pour qu'ils soient consécutifs ?

2. On choisit simultanément et au hasard trois sommets de l'hexagone.

a) Quelle est la probabilité pour qu'ils forment un triangle équilatéral ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'ils forment un triangle rectangle ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'ils forment un triangle isocèle non équilatéral ?



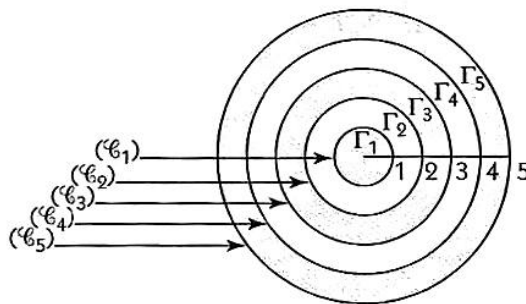
49 Dans une urne contenant douze boules numérotées de 1 à 12, on tire simultanément et au hasard trois boules. On désigne par a, b et c les numéros des trois boules tirées ($a < b < c$).

Quelles sont les probabilités pour que :

a) a, b et c soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

b) a, b et c soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?

50 On dispose d'un disque en bois pour jouer aux fléchettes. Sur ce disque sont tracés n cercles concentriques (sur la figure 5 cercles ont été représentés) dont les rayons sont respectivement 1, 2, 3, ..., n .



Entre deux cercles (C_k) et (C_{k+1}) se trouve une couronne Γ_{k+1} ; il y a donc n couronnes circulaires $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

On suppose qu'au cours d'un lancer de fléchette :

– la probabilité d'atteindre Γ_k est proportionnelle à l'aire de Γ_k ;

– la probabilité d'atteindre le bord des couronnes ou de sortir du disque en bois est nulle.

1. a) Calculer, pour tout k élément de $\{1; 2; \dots; n\}$, la probabilité p_k qu'au cours d'un lancer une fléchette ait son point d'impact dans Γ_k .

b) En posant $\Omega = \{\Gamma_1; \Gamma_2; \dots; \Gamma_n\}$, peut-on dire que l'on soit dans une situation d'équiprobabilité ?

2. On veut modifier la construction du disque en bois, pour obtenir sur Ω une situation d'équiprobabilité. Quels doivent être les rayons des cercles (C_k) pour qu'il en soit ainsi ?

(On supposera toujours la probabilité d'atteindre Γ_k proportionnelle à l'aire de Γ_k , celle d'atteindre le bord des couronnes ou de sortir du disque en bois nulle, le rayon de (C_1) égal à 1.)

51 1. On répartit n boules numérotées dans k tiroirs numérotés. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

2. On répartit n boules identiques dans k tiroirs numérotés. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

Application

L'espace $\mathcal{E}$ étant muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, combien y a-t-il de points du plan d'équation, $x + y + z - 20 = 0$ à coordonnées positives ou nulles ?

52 Soit une population constituée à 10 % de gauchers et à 90 % de droitiers.

1. Calculer la probabilité pour qu'un groupe de huit personnes de cette population soit constitué :

a) d'un seul gaucher,

b) d'au moins un gaucher,

c) d'exactement trois gauchers.

2. Un atelier de couture est équipé de sept paires de ciseaux pour droitiers et de trois pour gauchers.

Quelle est la probabilité pour que les huit membres du personnel trouvent chacun une paire de ciseaux lui convenant ?

3. On appelle X la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de personnes ayant trouvé une paire de ciseaux à sa convenance.

On note G le nombre de gauchers parmi les huit membres du personnel de l'atelier. Dresser un tableau donnant les valeurs de X en fonction de G . Calculer alors les probabilités pour les différentes valeurs trouvées de X .

53 1. Déterminer l'ensemble Ω des nombres à trois chiffres, formés à l'aide des chiffres 1 et 2.

2. On désigne par $S(x)$ la somme des chiffres de tout élément x de Ω . Soit P l'application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$P(A) = \sum_{x_i \in A} [aS(x_i) + b], (a; b) \in \mathbb{R}^2.$$

À quelle condition portant sur a et b , P est-elle une probabilité sur Ω ?

3. Soit B la partie de Ω formée des nombres commençant par 1, C la partie de Ω formée des nombres dont les chiffres des dizaines et des centaines sont 2. Déterminer a et b pour que : $P(B) = P(C)$.

54 1. Étudier les variations de la fonction $f: x \mapsto 36x^2 - 2x^3$ sur l'intervalle $[0; 18]$ et déterminer la valeur de x pour laquelle f atteint, sur cet intervalle, son maximum.

2. On considère une urne contenant 36 boules indiscernables au toucher, dont n sont blanches, n sont rouges et toutes les autres sont vertes ($1 \leq n \leq 17$).

On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a) Démontrer que le nombre de tirages donnant une boule de chaque couleur est égal à $f(n)$.

b) Soit $P(n)$ la probabilité de tirer une boule de chaque couleur. Exprimer $P(n)$ à l'aide de $f(n)$ et en déduire la valeur n pour laquelle $P(n)$ est maximum.

55 Considérons le triangle de Pascal (figure ci-dessous). Trouver 4 lignes telles que sur chacune d'elles on trouve trois termes consécutifs formant une suite arithmétique.

n° de ligne						
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
...	...	...	...	...	...	...

*Olympiades nationales de mathématiques
Burkina Faso 1994.*

56 Deux amis se sont donnés rendez-vous entre 12 et 13 heures, mais ont décidé qu'ils ne s'attendraient pas plus de dix minutes.

Quelle est la probabilité pour qu'ils se rencontrent ?

57 On répète une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p ($p \in]0; 1[$). On définit la variable aléatoire X par le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir le succès pour la première fois.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Vérifier que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n P(X = k) \right) = 1$.

9

Limites et continuité

Introduction

NEWTON (XVII^e siècle) fut, avec LEIBNITZ, l'un des fondateurs du calcul infinitésimal. Dans sa Méthode des fluxions et des suites infinies, il s'appuie sur un point de vue cinématique : il considère les quantités mathématiques comme les espaces décrits par un corps en mouvement et imagine les vitesses des mouvements qui les engendrent.



EULER et CAUCHY, aux XVIII^e et XIX^e siècles, vont structurer ces calculs pour étudier la notion de limite, puis celle de dérivée conduisant au calcul mathématique des vitesses.



L'objet de ce chapitre est de compléter les notions déjà vues en classe de première SM, notamment en ce qui concerne les applications de la continuité d'une fonction sur un intervalle.

SOMMAIRE

1. Limites d'une fonction..... 194
2. Étude d'une branche infinie..... 199
3. Continuité d'une fonction 203

Dans ce chapitre, les fonctions étudiées sont des fonctions numériques à variable réelle et le plan est muni du repère (O, I, J) .

1 Limites d'une fonction

1.1. Notions de base

Limites de référence

Les résultats suivants seront couramment utilisés dans les calculs de limites de fonctions.

- $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n-1}} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n-1}} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n-1} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Remarque

Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en l'infini.

Limites et opérations sur les fonctions

Nous regroupons dans des tableaux les résultats essentiels concernant les limites de la somme, du produit ou du quotient de deux fonctions. Dans ces tableaux x_0 , l et l' désignent des nombres réels. Ces résultats restent valables pour les limites en $+\infty$ ou en $-\infty$.

• Limite de la somme de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

• Limite du produit de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$l' (l' \neq 0)$	$l' (l' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x)$	ll'	$\begin{cases} +\infty, \text{ si } l' > 0 \\ -\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty, \text{ si } l' > 0 \\ +\infty, \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

• Limite du quotient de deux fonctions

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) $	l	$l' (l' \neq 0)$	0	l	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) $	$l' (l' \neq 0)$	0	0	$+\infty$	l'	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left \frac{f}{g} \right (x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	?	0	$+\infty$	?

Une étude de signes permet ensuite de déterminer la limite de la fonction $\frac{f}{g}$.

Limites en l'infini d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle

Les résultats suivants ont été énoncés en classe de première.

Propriétés

- La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples

- Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction polynôme $f: x \mapsto 5x^3 - x + 1$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3) = -\infty.$$

- Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction rationnelle $g: x \mapsto \frac{7x^5 - 4x^3 - 1}{x^2 - x + 6}$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^3) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3) = -\infty.$$

Propriétés de comparaison

Les résultats suivants ont également été énoncés en classe de première.

Propriétés 1

Soit f une fonction.

- S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]A; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]A; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

On a des propriétés analogues lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers x_0 .

Exemple

Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f: x \mapsto 2x + 1 - 3\sin x$.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1; \quad \text{donc : } \forall x \in \mathbb{R}, 2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4.$$

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) = +\infty; \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\text{De même : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 4) = -\infty; \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Propriétés 2

Soit f une fonction.

- S'il existe deux fonctions g, h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]A; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.
- S'il existe un nombre réel l , une fonction g et un intervalle $]A; +\infty[$ tels que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\forall x \in]A; +\infty[, |f(x) - l| \leq g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

On a des propriétés analogues lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers x_0 .

Ces propriétés sont deux formulations du « théorème des gendarmes ».

Exemple

Calculer la limite en 0 de la fonction $g: x \mapsto x E\left(\frac{1}{x}\right)$, où E désigne la fonction partie entière.

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1; \quad \text{donc : } \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} - 1 \leq E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

$$\text{On en déduit que : } \forall x \in]0; +\infty[, 1 - x \leq g(x) \leq 1; \quad \text{donc : } \lim_{x \searrow 0} g(x) = 1.$$

$$\text{De même, on a : } \forall x \in]-\infty; 0[, 1 \leq g(x) \leq 1 - x; \quad \text{donc : } \lim_{x \nearrow 0} g(x) = 1.$$

$$\text{On a : } \lim_{x \searrow 0} g(x) = \lim_{x \nearrow 0} g(x) = 1; \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

Le résultat suivant a également été énoncé en classe de première.

Propriété 3

Soit f et g deux fonctions telles que $f \leq g$ sur un intervalle $]A ; +\infty[$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$.

1.2. Limite de la composée de deux fonctions

On a vu en classe de première une propriété permettant de calculer la limite de la composée d'une fonction affine par une fonction f .

La propriété suivante, que nous admettons, généralise ce résultat.

Propriété

Soit $g \circ f$ la composée de deux fonctions et a un élément ou une borne d'un intervalle sur lequel $g \circ f$ est définie.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$.

a, b et l sont des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemples

• Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$.

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$; on a : $u = g \circ f$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{y \rightarrow 2} g(y) = \sqrt{2}$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g[f(x)] = \sqrt{2}$.

• Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $v : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$.

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sin x$; on a : $v = g \circ f$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g[f(x)] = 1$.

On peut également rédiger de la façon suivante.

On pose : $X = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers 0.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$.

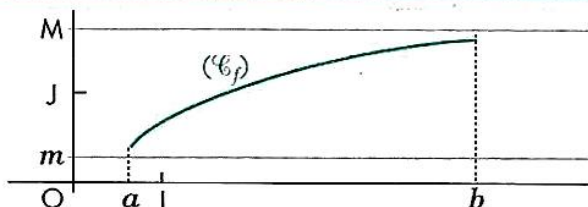
1.3. Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété 1

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a ; b[$ ($a < b$).

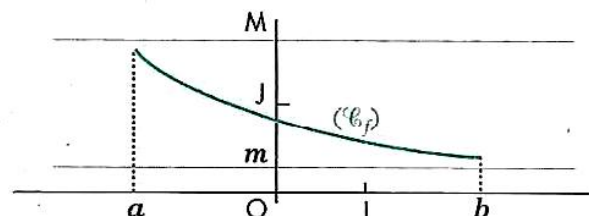
- Si f est majorée sur $]a ; b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b .
- Si f est minorée sur $]a ; b[$, alors f admet une limite finie à droite en a .



Remarque

De manière analogue, pour une fonction f décroissante sur un intervalle ouvert $]a ; b[$, on a :

- si f est majorée sur $]a ; b[$, alors f admet une limite finie à droite en a ;
- si f est minorée sur $]a ; b[$, alors f admet une limite finie à gauche en b .



Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a; b[$.

Si f n'est pas majorée, alors pour tout nombre réel M , il existe un élément x_0 de l'intervalle $]a; b[$ tel que : $f(x_0) > M$.

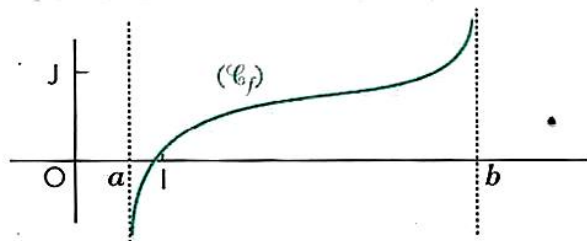
f étant croissante, on a : $\forall x \in]x_0; b[, f(x) > M$; donc : $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.

Cette étude justifie la propriété suivante que nous admettons.

Propriété 2

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a; b[$ ($a < b$).

- Si f est non majorée sur $]a; b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à gauche en b .
- Si f est non minorée sur $]a; b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à droite en a .



Remarque

De manière analogue, pour une fonction f décroissante sur un intervalle ouvert $]a; b[$, on a :

- si f est non minorée sur $]a; b[$, alors f a pour limite $-\infty$ à gauche en b ;
- si f est non majorée sur $]a; b[$, alors f a pour limite $+\infty$ à droite en a .

Ces deux propriétés, qui peuvent être énoncées en remplaçant a par $-\infty$ ou b par $+\infty$, seront utilisées ultérieurement.

1.4. Travaux dirigés

■ Limite en l'infini d'une fonction contenant des radicaux

1°) Calculer les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x-2} - \sqrt{x+1}) ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5-x} - \sqrt{1-x}).$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-x} + 2x) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+1}).$$

2°) Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-2}{1-x}$.

Solution

1°) a) • La fonction $x \mapsto \sqrt{5x-2} - \sqrt{x+1}$ a pour ensemble de définition $[\frac{2}{5}; +\infty[$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, les propriétés sur les calculs de limites ne permettent pas de conclure.

$$\text{On a : } \forall x \in [\frac{2}{5}; +\infty[, \sqrt{5x-2} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x} \left(\sqrt{5 - \frac{2}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) ;$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5 - \frac{2}{x}} = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 ;$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x-2} - \sqrt{x+1}) = +\infty.$$

• La fonction $x \mapsto \sqrt{5-x} - \sqrt{1-x}$ a pour ensemble de définition $]-\infty; 1]$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, les propriétés sur les calculs de limites et le procédé précédemment utilisé ne permettant pas de conclure. On utilise l'expression conjuguée.

$$\text{On a : } \forall x \in]-\infty; 1], \sqrt{5-x} - \sqrt{1-x} = \frac{(5-x) - (1-x)}{\sqrt{5-x} + \sqrt{1-x}} = \frac{4}{\sqrt{5-x} + \sqrt{1-x}} ;$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5-x} - \sqrt{1-x}) = 0.$$

b) Dans les deux cas, les propriétés sur les calculs de limites ne permettent pas de conclure. On utilise l'un ou l'autre des procédés précédents.

• On a : $\forall x \in]-\infty; 0[, \sqrt{1-x} + 2x = \sqrt{-x} \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} - 2\sqrt{-x} \right)$; donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-x} + 2x) = -\infty$.

• On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = 0$.

2°) On a : $\forall x \in]-\infty; 0[, \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 2}{1 - x} = \frac{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x} \right)}{-x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}$; donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

On a : $\forall x \in]1; +\infty[, \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 2}{1 - x} = \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x} \right)}{-x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

M

Pour calculer la limite en $-\infty$ ou en $+\infty$ d'une fonction contenant des radicaux, on peut utiliser l'un des procédés suivants.

- Mettre en facteur le terme de plus haut degré.
- Introduire l'expression conjuguée.
- Utiliser consécutivement les deux procédés précédents.

Exercices

1.a Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 4)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x + 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^3 + x^2 - 1)$.

1.b Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \frac{x^4 - 2x + 5}{3x^4 + 1}$

b) $x \mapsto \frac{-x^2 + x + 3}{8x + 2}$

c) $x \mapsto \frac{x - 3}{-3x^2 + 1}$

d) $x \mapsto \frac{(x^2 - 4)(3 - x)}{x + \frac{1}{x}}$.

1.c Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto -4x + 3 - \cos x$

b) $x \mapsto \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$

c) $x \mapsto x^2 + 2 \sin x$

d) $x \mapsto x^3(2 + \cos x)$.

1.d Démontrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, |\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

1.e Utiliser les fonctions composées pour calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{3x - \pi}$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

1.f Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \sqrt{4x^2 + x + 1}$

b) $x \mapsto \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 2}}$

c) $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

d) $x \mapsto \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$.

2 Étude d'une branche infinie

Dans cette leçon, f désigne une fonction, D_f son ensemble de définition et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative. On dit que $(\mathcal{C})$ admet une branche infinie dans les cas suivants :

- en $+\infty$ ou en $-\infty$, f a une limite finie ou infinie ;
- en x_0 , f a une limite infinie.

2.1. Asymptotes

Asymptote parallèle à l'un des axes

Définitions

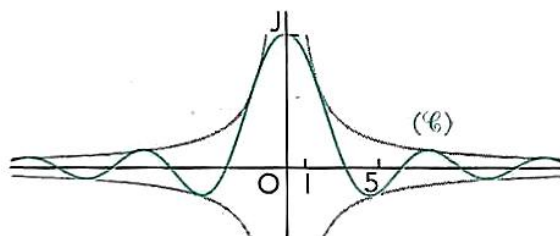
Soit f une fonction et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

- Lorsque f a une limite finie l en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
- Lorsque f a une limite infinie à droite ou à gauche en x_0 , on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

Exemples

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$;
donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.



On en déduit que la droite (OI) est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

On démontre de même que cette droite est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$.

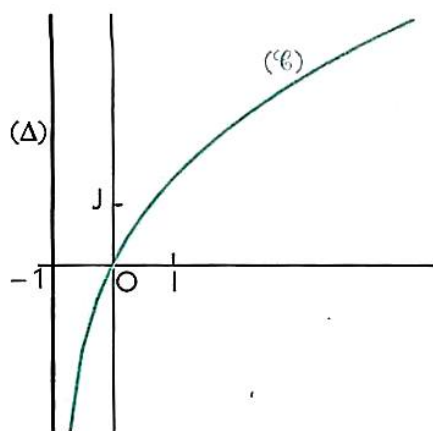
$D_f =]-1 ; +\infty[$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -1^+} 2x = -2$;

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1 ; +\infty[, \sqrt{x+1} > 0.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.



Remarque

Une courbe et son asymptote peuvent se couper ; par exemple, la courbe d'équation $y = \frac{\sin x}{x}$ coupe son asymptote (OI) aux points d'abscisses $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Asymptote non parallèle aux axes

Définition

Soit f une fonction et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$,

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x(x-1)^2}{x^2+1}$.

On effectue la division euclidienne de $(x^3 - 2x^2 + x)$ par $(x^2 + 1)$.

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 2x^2 + x = (x^2 + 1)(x - 2) + 2$;

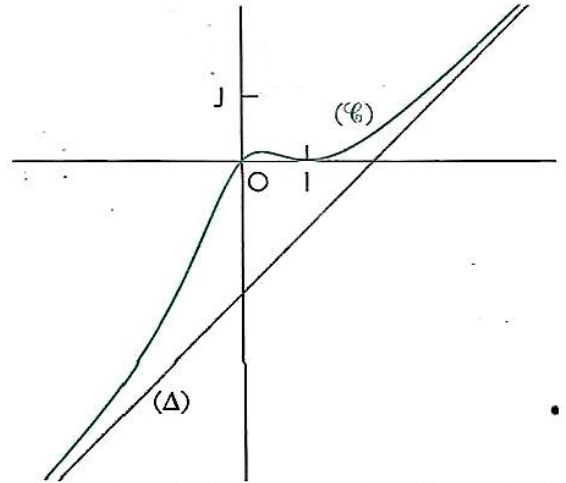
donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - 2 + \frac{2}{x^2 + 1}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0.$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x - 2) > 0$; donc $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ) .



M

Soit f une fonction rationnelle telle que : $f = \frac{P}{Q}$ et $d^\circ(P) \geq d^\circ(Q)$.

Pour étudier les branches infinies de la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$, on peut effectuer la division euclidienne de P par Q .

La propriété suivante permet une recherche systématique de l'équation d'une asymptote à une courbe.

Propriété

Soit f une fonction et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ si et seulement si,

lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), $\frac{f(x)}{x}$ tend vers a et $[f(x) - ax]$ tend vers b .

Démonstration

On fait la démonstration dans le cas où x tend vers $+\infty$.

• On suppose que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - (ax + b)$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$;

$$\forall x \in D_f \setminus \{0\}, \frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{g(x)}{x} ;$$

$$\forall x \in D_f, f(x) - ax = b + g(x).$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$.

• Réciproquement, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Donc, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

Exemple

• Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1} - x$.

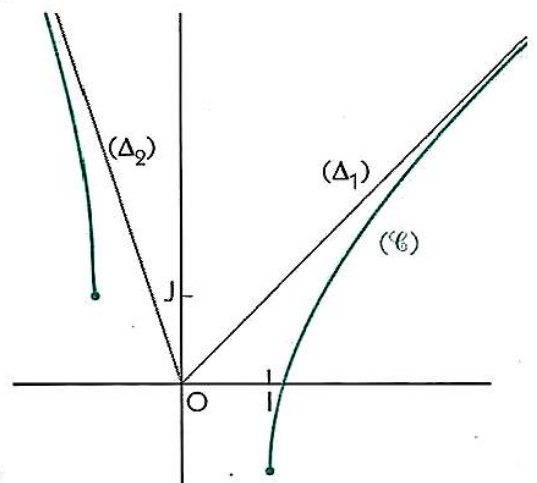
On a : $D_f =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = 1 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(x^2 - 1) - 4x^2}{2\sqrt{x^2 - 1} + 2x} = 0.$$

Donc la droite (Δ_1) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.



De plus : $\forall x \in D_f, f(x) - x = \frac{-4}{2\sqrt{x^2 - 1} + 2x}$;

donc : $\forall x \in [1 ; +\infty[, f(x) - x < 0$; $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (Δ_1) sur $[1 ; +\infty[$.

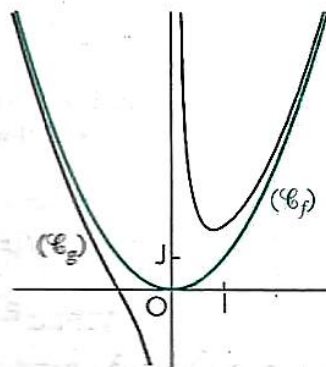
On démontre de même que la droite (Δ_2) d'équation $y = -3x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et que $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (Δ_2) sur $]-\infty ; -1]$.

Remarque

Plus généralement, les courbes représentatives de deux fonctions f et g sont asymptotes lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

C'est le cas des représentations graphiques ci-contre des fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.



2.2. Direction asymptotique

Dans ce paragraphe on suppose que, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $f(x)$ a une limite infinie.

On étudie alors la limite, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, de $\frac{f(x)}{x}$.

On distingue trois cas : $\frac{f(x)}{x}$ a une limite infinie, $\frac{f(x)}{x}$ a une limite finie et $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite.

$\frac{f(x)}{x}$ a une limite infinie

On dit que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) .

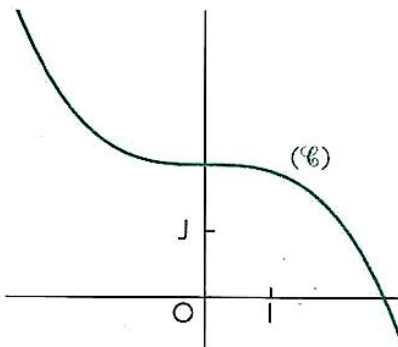
Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -\frac{1}{10}x^3 + 2$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty ;$$

$$\text{de même : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

$(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) .



$\frac{f(x)}{x}$ a une limite finie a

1^{er} cas : $a = 0$

On dit que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de (OI) .

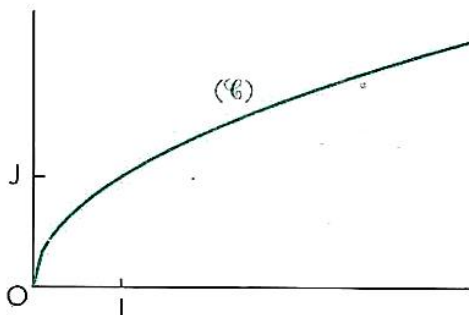
Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

$(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI) .



2^e cas : $a \neq 0$

On étudie alors la limite, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, de $f(x) - ax$.

On a trois possibilités.

- $f(x) - ax$ a une limite finie b

On a vu dans le § 2.2. que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

- $f(x) - ax$ a une limite infinie

On dit que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$.

- $f(x) - ax$ n'a pas de limite

$(\mathcal{C})$ n'admet ni asymptote, ni branche parabolique.

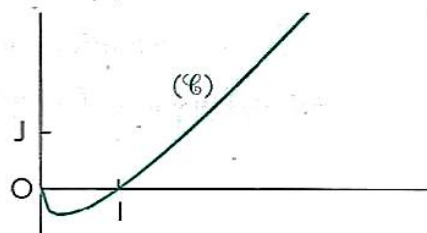
On dit que $(\mathcal{C})$ admet une direction asymptotique, celle de la droite d'équation $y = ax$.

Exemples

- Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \sqrt{x}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -\infty$.

$(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = x$.



- Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + \sin(2\pi x)$.

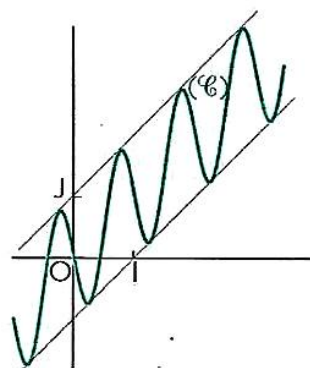
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$;

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Or, la fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

$(\mathcal{C})$ n'admet ni asymptote, ni branche parabolique en $+\infty$.

$(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une direction asymptotique, celle de la droite d'équation $y = x$.



$\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite

$(\mathcal{C})$ n'admet ni asymptote, ni branche parabolique, ni direction asymptotique.

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x[1 + \cos^2(2\pi x)]$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \leq 1 + \cos^2(2\pi x)$;

$\forall x \in [0 ; +\infty[, x \leq f(x)$;

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x)}{x} \geq 1 + \cos^2(2\pi x)$.

Cette expression n'a pas de limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

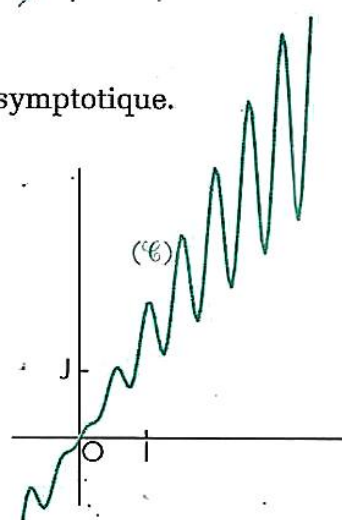


Tableau récapitulatif

Les résultats précédents sont résumés dans le tableau ci-dessous.

a et b désignent respectivement les limites, lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), de $\frac{f(x)}{x}$ et de $f(x) - ax$.

$a = +\infty$ ou $a = -\infty$		Branche parabolique de direction celle de (OJ)
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote
	$b = +\infty$ ou $b = -\infty$	Branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$
	b n'existe pas	Direction asymptotique, celle de la droite d'équation $y = ax$
a n'existe pas		Ni asymptote, ni direction asymptotique, ni branche parabolique

Exercices

2.a Dans chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes à la courbe représentative (C) de la fonction f .

a) $f: x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$

b) $f: x \mapsto \frac{2x-1}{x^2-1}$

c) $f: x \mapsto \frac{2x^2-1}{x^2-1}$

d) $f: x \mapsto \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

2.b Dans chacun des cas suivants, démontrer que la droite (Δ) est asymptote à la courbe représentative (C) de la fonction f ; préciser dans chaque cas la position relative de (C) et de (Δ).

a) $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x^2+1}$, (Δ): $y = x - 3$

b) $f(x) = \frac{3x^2-2x+4}{x-5}$, (Δ): $y = 3x + 13$

c) $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1}$, (Δ): $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$

2.c Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe représentative (C) de la fonction f .

a) $f: x \mapsto \sqrt{4x^2-12x+10}$

b) $f: x \mapsto -x^3 + 2x^2 - 3x$

c) $f: x \mapsto 2x - 3\sqrt{x}$

d) $f: x \mapsto 2x + 4 + \cos x$

2.d Dans chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe représentative (C) de la fonction f .

a) $f(x) = -x^3 + x + 2$ b) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{-2x^2+4x+6}$

c) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{-x+2}$ d) $f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2+1}$

e) $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-4}$ f) $f(x) = \frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$

3 Continuité d'une fonction

3.1. Continuité sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction et x_0 un nombre réel.

On sait que f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition

Soit K un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction f est continue sur K si elle est continue en tout élément de K .

Exemples

- Toute fonction monôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
- La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Remarques

- Lorsqu'une fonction est continue sur un intervalle K , sa courbe représentative sur cet intervalle se trace d'un trait continu.
- Lorsqu'une fonction est continue en tout élément d'un ensemble E , on dit qu'elle est continue sur E .

Propriétés

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés de la continuité en x_0 et de la définition de la continuité sur un intervalle.

Propriétés 1

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K .

- Les fonctions $f + g$, fg , kf ($k \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues sur K .
- Si g ne s'annule pas sur K , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur K .
- Si f est positive sur K , alors $\sqrt{f}$ est continue sur K .

Exemples

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.
- La fonction tangente est continue sur tout intervalle de la forme $]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Propriété 2

Soit K et K' deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue sur K , telle que $f(K) \subset K'$ et g une fonction continue sur K' .

La fonction $g \circ f$ est continue sur K .

Démonstration

Soit x_0 un élément de K . On a : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

g est continue en $f(x_0)$; donc : $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} g(y) = g[f(x_0)]$.

On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g \circ f(x_0)$.

La fonction $g \circ f$, continue en tout élément x_0 de K , est continue sur K .

Exemple

Démontrer que la fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a : $f(\mathbb{R}) \subset]-1; 1[$.

La fonction $g : y \mapsto \tan y$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et on a : $]-1; 1[\subset]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Donc, la fonction $g \circ f : x \mapsto \tan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque

Plus généralement, la composée de deux fonctions continues sur leur ensemble de définition est continue sur son ensemble de définition.

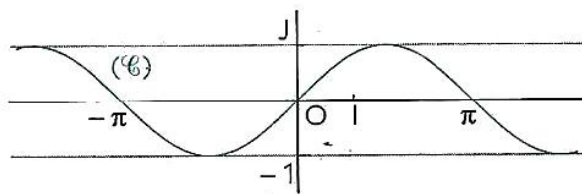
3.2. Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriétés

- La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction sinus.

Déterminer graphiquement les images par la fonction sinus des intervalles suivants :

$]-\pi; 0[$; $]-\pi; \pi]$; $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; $[0; \frac{\pi}{2}]$; $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$.



- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2$.
- Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- Justifier que f est minorée par -2 sur $\mathbb{R}$.
- Démontrer que tout élément y_0 de l'intervalle $[-2 ; +\infty[$ a au moins un antécédent x_0 par f .
- En déduire l'image de $\mathbb{R}$ par f .

Nous admettons la propriété suivante.

Propriété 1

Si f est une fonction continue sur un intervalle K , alors $f(K)$ est un intervalle.

Remarques

- Si f est une fonction constante, alors $f(K)$ est réduit à un singleton.
- Si f n'est pas continue sur K , $f(K)$ peut ne pas être un intervalle.

Par exemple l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière est $\mathbb{Z}$.

Si f est continue sur K , les intervalles K et $f(K)$ ne sont pas nécessairement de même nature (tous ouverts, tous semi-ouverts ou tous fermés).

Par exemple, l'image de l'intervalle $]-1 ; 1[$ par la fonction $x \mapsto x^2$ est l'intervalle $[0 ; 1[$.

Toutefois, pour les intervalles fermés, nous admettons la propriété suivante.

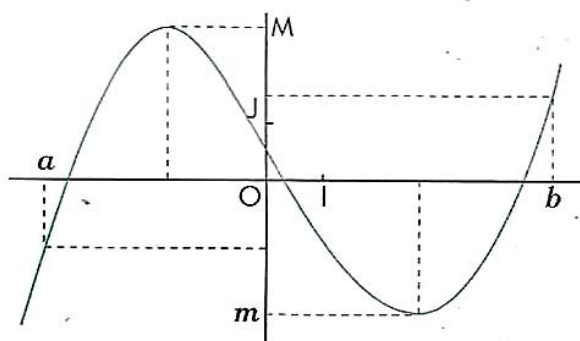
Propriété 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé $[a ; b]$.

Si f est continue sur $[a ; b]$, alors $f([a ; b])$ est un intervalle fermé $[m ; M]$.

Remarques

- On a : $\forall x \in [a ; b], m \leq f(x) \leq M$.
Donc, f est bornée sur $[a ; b]$.
- m et M ont un antécédent dans $[a ; b]$ par f .
On dit que f atteint ses bornes.
- Les valeurs de m et de M ne sont pas forcément celles de $f(a)$ et de $f(b)$; m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a ; b]$.



Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

Nous ne savons pas toujours déterminer les solutions exactes d'une équation dans $\mathbb{R}$.

Ainsi en est-il des équations : $x + \cos x = 0$ et $x^5 + x + 1 = 0$.

Le théorème suivant permet dans certains cas de démontrer l'existence de solution(s) d'une équation.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K .

Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b .

Démonstration

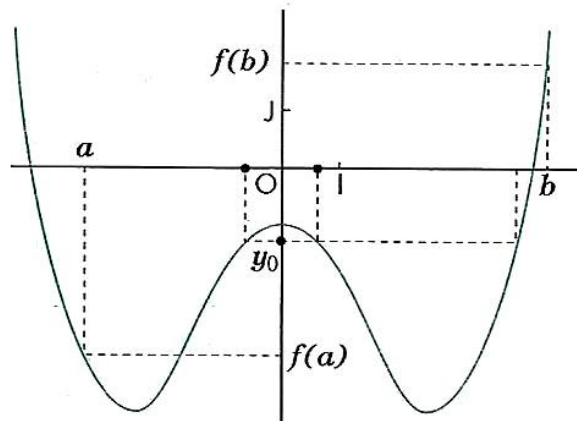
On sait que $f([a ; b])$ est un intervalle K' .

Soit y_0 un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

On a : $f(a) \in K'$ et $f(b) \in K'$; donc : $y_0 \in K'$.

Or : $K' = f([a ; b])$; donc : $y_0 \in f([a ; b])$.

On en déduit que y_0 a au moins un antécédent compris entre a et b .



Remarque

Si f n'est pas continue sur $[a ; b]$, un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ peut ne pas avoir d'antécédent par f dans l'intervalle $[a ; b]$.

Ainsi, E désignant la fonction partie entière, on a : $E(2) < 2,5 < E(3)$; cependant 2,5 n'a pas d'antécédent par E .

On déduit de ce théorème la propriété suivante.

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K .

S'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de K , tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

Exemple

Démontrer que l'équation $\cos \frac{\pi x}{2} = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \cos \frac{\pi x}{2} - x$. Cette fonction est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

On a : $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$; donc : $f(0) \cdot f(1) < 0$.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle K .

Si f ne s'annule pas sur K , alors f garde un signe constant sur K .

Cette propriété est la contraposée de la propriété 1.

3.3. Fonction continue et monotone

Dans ce paragraphe, le repère (O, I, J) est orthonormé.

Bijection réciproque d'une fonction continue et monotone

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.

L'image de $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ par cette fonction est l'intervalle $[-1 ; 1]$.

Soit l'application $f : [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1 ; 1]$
 $x \mapsto \sin x$

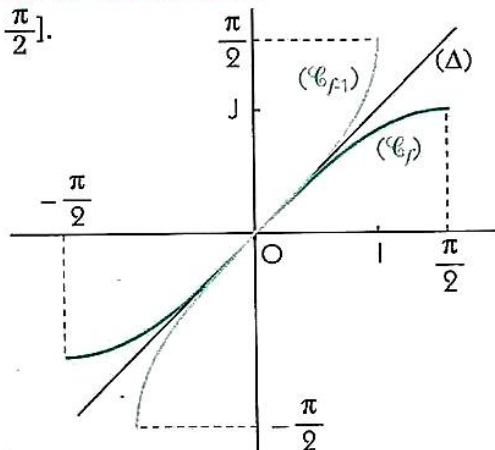
- Démontrer que f est une bijection ;
on désigne par f^{-1} sa bijection réciproque.
- Démontrer que f^{-1} est strictement croissante sur $[-1 ; 1]$.
(On pourra faire un raisonnement par l'absurde.)

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et f^{-1} .

On sait que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ se trace d'un trait continu ; il en est de même de la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$.

Ceci nous conduit à conjecturer que la fonction f^{-1} est continue sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.



Plus généralement, nous admettons la propriété suivante.

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K .

- f réalise une bijection de K vers $f(K)$.
- La bijection réciproque, notée f^{-1} , est continue sur l'intervalle $f(K)$.
- f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation que f .

Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

Lorsqu'une fonction f est continue et strictement monotone sur K , $f(K)$ est un intervalle de même nature que K et ses bornes sont les limites de f aux bornes de K .

Le tableau ci-dessous précise $f(K)$ suivant la nature de K et le sens de variation de f .

K	f(K)	
	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a ; b]$	$[f(a) ; f(b)]$	$[f(b) ; f(a)]$
$[a ; b[$	$\left[f(a) ; \lim_{x \nearrow b} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \nearrow b} f(x) ; f(a) \right]$
$]a ; b[$	$\left] \lim_{x \searrow a} f(x) ; \lim_{x \nearrow b} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \nearrow b} f(x) ; \lim_{x \searrow a} f(x) \right[$
$[a ; +\infty[$	$\left[f(a) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; f(a) \right]$
$\mathbb{R}$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

Fonction racine n-ième

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par : $f_n(x) = x^n$.
La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a : $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Donc, f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$; elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.

Définition

Soit n un entier naturel non nul.

La fonction racine n -ième est la bijection réciproque de la fonction : $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^n$

• L'image de tout nombre réel positif x par la fonction racine n -ième

est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.

• On a : $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}_+ \\ x = y^n \end{cases}$

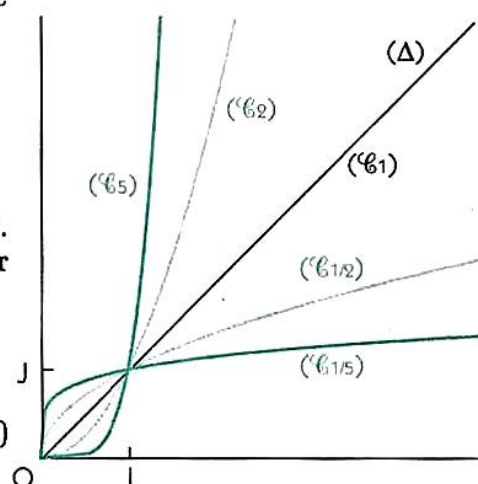
• On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.

• La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

• Pour tout entier naturel non nul n , on désigne respectivement par $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{n}})$ les courbes représentatives des fonctions :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ & \text{et} \quad \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^n & x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{array}$$

Les courbes $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{n}})$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.



Puissance d'exposant rationnel

Soit $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a : $\frac{kp}{kq} = \frac{p}{q}$ et $\left[(\sqrt[q]{x})^{kp} \right]^q = (\sqrt[q]{x})^{kpq} = \left[(\sqrt[q]{x})^{kq} \right]^p = x^p = \left[(\sqrt[q]{x})^q \right]^p = \left[(\sqrt[q]{x})^p \right]^q$.

Donc : $\left(x^{\frac{1}{kq}} \right)^{kp} = \left(x^{\frac{1}{q}} \right)^p$.

Ce calcul suggère la définition suivante.

Définition

Soit $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle x à la puissance $\frac{p}{q}$ le nombre réel, noté $x^{\frac{p}{q}}$, défini par : $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

• L'égalité ci-dessus peut s'écrire : $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

• Soit r et r' deux nombres rationnels non nuls et x un élément de $\mathbb{R}_+^*$; on a : $x^r x^{r'} = x^{r+r'}$.

Il existe en effet des nombres p, p', q ($p \in \mathbb{Z}^*$, $p' \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$) tels que : $r = \frac{p}{q}$ et $r' = \frac{p'}{q}$.

On a : $(x^r x^{r'})^q = (x^r)^q (x^{r'})^q = \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q \cdot \left(\sqrt[q]{x^{p'}}\right)^q = \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^p \cdot \left(\sqrt[q]{x^{p'}}\right)^{p'} = x^p x^{p'}$

$$(x^{r+r'})^q = \left(\sqrt[q]{x^{p+p'}}\right)^q = \left(\sqrt[q]{x^p}\right)^{p+p'} = x^p x^{p'} = x^p x^{p'}$$

On en déduit que : $(x^r x^{r'})^q = (x^{r+r'})^q$; donc : $x^r x^{r'} = x^{r+r'}$.

• On étend de même aux puissances d'exposants rationnels toutes les propriétés de calculs établies pour les puissances d'exposants entiers.

3.4. Travaux dirigés

Résolution approchée d'une équation



Un peintre place deux échelles [AB] et [CD], de longueurs respectives 2 m et 3 m, entre les murs d'un couloir, comme indiqué sur la figure ci-contre. Sachant qu'elles se croisent à une hauteur de 1 m, on se propose de calculer la largeur x du couloir.

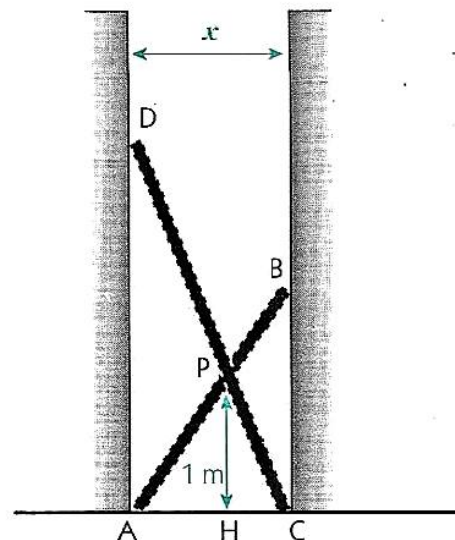
1°) a) Démontrer que : $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = 1$.

b) En déduire que x est solution de l'équation $f(x) = 1$, où f désigne la fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}.$$

2°) a) Étudier la fonction f et en déduire que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}_+$.

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.



Solution

1°) a) On a : $\frac{PH}{AD} = \frac{HC}{AC}$ et $\frac{PH}{BC} = \frac{AH}{AC}$; donc : $\frac{PH}{AD} + \frac{PH}{BC} = \frac{AH + HC}{AC} = 1$.

Or : $PH = 1$; donc : $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = 1$.

b) On a : $AD^2 = CD^2 - AC^2$ et $BC^2 = AB^2 - AC^2$; on en déduit que : $AD = \sqrt{9-x^2}$ et $BC = \sqrt{4-x^2}$.

Donc, x est solution de l'équation : $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = 1$.

2°) a) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$, $x \in \mathbb{R}_+$.

• L'ensemble de définition de f est $[0 ; 2[$.

• f est dérivable sur $[0 ; 2[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;
donc : $\forall x \in [0 ; 2[$, $f'(x) > 0$.

• On a : $f(0) = \frac{5}{6}$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

f est continue et strictement croissante sur $[0 ; 2[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[0 ; 2[$.

b) On a : $f(1) \approx 0,93$ et $f(1,5) \approx 1,14$; $f(1) < 1 < f(1,5)$, donc : $\alpha \in [1 ; 1,5]$.

On obtient une valeur approchée de α avec la précision voulue en utilisant un des algorithmes suivants.

• **Méthode par balayage**

On choisit un « pas » et on procède à un balayage systématique de l'intervalle $[1 ; 1,5]$.

– Pour un pas de 0,1, on calcule $f(1,1), f(1,2), \dots, f(1,4)$.

On obtient : $f(1,2) \approx 0,98$ et $f(1,3) \approx 1,02$; donc : $\alpha \in [1,2 ; 1,3]$.

– Pour un pas de 0,01, on calcule $f(1,11), f(1,12), \dots, f(1,19)$.

On obtient : $f(1,23) \approx 0,999$ et $f(1,24) \approx 1,003$; donc : $\alpha \in [1,23 ; 1,24]$.

Donc, 1,23 et 1,24 sont des valeurs approchées, respectivement par défaut et par excès, à 10^{-2} près de α .

• **Méthode par dichotomie**

On a : $\alpha \in [1 ; 1,5]$; on choisit le milieu x_0 de cet intervalle ;

– si $f(x_0) > 1$, alors $\alpha \in [1 ; x_0]$;

– si $f(x_0) < 1$, alors $\alpha \in [x_0 ; 1,5]$.

On recommence ce calcul en choisissant le milieu x_1 de l'intervalle obtenu, puis le milieu $x_2, \dots$ et on poursuit jusqu'à obtention de la précision voulue.

À la n -ième étape, pour un intervalle initial d'amplitude 0,5, l'incertitude est inférieure à $\frac{0,5}{2^{n+1}}$. On obtient une valeur approchée à 10^{-2} près de α pour n tel que : $\frac{0,5}{2^{n+1}} \leq 10^{-2}$; c'est-à-dire pour : $n \geq 5$.

On a : $x_5 = 1,226\,562\,5$; donc : $x \approx 1,226\,562\,5$ à 10^{-2} près.

M

Pour effectuer la résolution approchée d'une équation du type $f(x) = k$, on peut procéder de la façon suivante :

- étudier les variations de la fonction f ;
- en déduire et justifier l'existence des solutions ;
- localiser chacune de ces solutions ;
- utiliser un algorithme pour déterminer une valeur approchée de chacune des solutions :
 - balayage d'un intervalle contenant la solution avec un pas correspondant à la précision désirée ;
 - dichotomie (à chaque étape, l'amplitude de l'intervalle contenant la solution est divisé par 2).

Exercices

3.a Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et justifier qu'elles sont continues sur cet ensemble :

a) $x \mapsto \sqrt{\frac{2x+1}{x^2-x+1}}$ b) $x \mapsto \sqrt{\left| \frac{2x+1}{x^2-x+1} \right|}$

c) $x \mapsto \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ d) $x \mapsto \sqrt{1 + \tan^2 x}$.

3.b Déterminer $f(K)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f: x \mapsto x^2 + x - 2$, $K = [-2 ; 3]$

b) $f: x \mapsto \frac{x-2}{x^2}$, $K =]0 ; +\infty[$

c) $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$, $K = \mathbb{R}$.

3.c Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle K :

a) (E) : $x^4 - 3x = 1$, $K =]1 ; 2[$

b) (E) : $\cos x = x$, $K = \mathbb{R}$

c) (E) : $\frac{x^3 - 3x - 1}{x - 1} = m$ ($m \in \mathbb{R}$) $K =]1 ; +\infty[$.

3.d Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre de solutions de l'équation (E) et une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune de ces solutions :

a) (E) : $x^3 - 3x - 1 = 0$ b) (E) : $x^4 - 2x = 1$

c) (E) : $\sin x = x - 1$.

3.e Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} et tracer sur le même graphique les courbes représentatives de f et f^{-1} :

a) $f: x \mapsto x^3$, $K = \mathbb{R}$

b) $f: x \mapsto \sqrt{x^3 + x + 1}$, $K =]1 ; +\infty[$

c) $f: x \mapsto x - \sin x$, $K =]-\pi ; 3\pi[$.

Exercices

APPRENTISSAGE

Le plan est muni du repère (O,I,J).

Calculs de limites

1 Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

$$a) x \mapsto \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 8} \quad b) x \mapsto \frac{3x - 5}{x^2 - x + 1}$$

$$c) x \mapsto \frac{x^2 + 1}{-2x + 3} \quad d) x \mapsto \frac{x^2 + 1}{|-2x + 3|}$$

2 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en 0.

$$a) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad b) f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2}$$

$$c) f(x) = \frac{\tan^2 x}{x} \quad d) f(x) = \frac{\sin x}{\tan x}$$

$$e) f(x) = \frac{x^3 \cos^3 x}{\sin^2 x} \quad f) f(x) = \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{2 \tan x}$$

3 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en 0.

$$a) f(x) = \frac{\sin x + \tan x}{x} \quad b) f(x) = \frac{\sin x - \tan x}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{\sin x + \tan x}{\sqrt{x^2}} \quad d) f(x) = \frac{\sin x - \tan x}{\sqrt{x^2}}$$

4 1. Démontrer que : $\forall x \in [1; +\infty[, \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$.

En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$.

2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x + \sin x| \leq 2$.

En déduire les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction : $x \mapsto \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$.

5 Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sin x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{3 + \cos x} \quad f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \cos x}{3 + \cos x}$$

6 1. Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

2. En déduire les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \tan x} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$$

7 Calculer les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{x-2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x^2-x-6}} \quad f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}}$$

8 Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$a) f(x) = x + \sqrt{1-x} \quad b) f(x) = 2x + \sqrt{x-1}$$

$$c) f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1} \quad d) f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$$

9 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$a) f(x) = \sqrt{2x^2-x+3} \quad b) f(x) = 2x + \sqrt{x^2+1}$$

$$c) f(x) = x - \sqrt{x^2-4} \quad d) f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

$$e) f(x) = \frac{x - \sqrt{|x|}}{3x+2} \quad f) f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x+2|}} - \frac{x}{\sqrt{|x+1|}}$$

10 1. Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

2. En déduire les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x}$$

11 Calculer les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \quad d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{2x - \frac{\pi}{2}}$$

12 Calculer les limites suivantes.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x} \quad d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

13 Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

$$a) x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} + x \quad b) x \mapsto \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}}$$

$$c) x \mapsto \sqrt{|\sqrt{x^2+1} - x^2|} \quad d) x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2+1} - x}$$