

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

Terminale scientifique
OPTION SCIENCES EXPÉRIMENTALES

Elméhdi Ag HAMATY
Pierre DAGBEGNON LAWIN ORÈ
Georgette HADDAD-OUÉDRAOGO
Denis OUÉHI
Baye OULD EL HADJ AMAR
Faustin TOUADERA

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN	COMORES	GUINÉE	RÉP. DÉM. CONGO
BURKINA FASO	CONGO	MADAGASCAR	RWANDA
BURUNDI	COTE D'IVOIRE	MALI	SÉNÉGAL
CAMEROUN	DJIBOUTI	MAURITANIE	TCHAD
CENTRAFRIQUE	GABON	NIGER	TOGO

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

Georgette HADDAD-OUÉDRAOGO		
Mamadou BINATÉ	Adou NIAMEN	Denis OUÉHI

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997 et à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999, à Ouagadougou en 2000.

ISSN 1248-587-X

ISBN 2-84-129478-1

© EDICEF 1999

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

P R É F A C E

Dans un monde qui évolue rapidement, la maîtrise et l'approfondissement des mathématiques apparaissent comme une condition indispensable au développement des nations, plongées qu'elles sont dans l'ère de la haute technologie et de la mondialisation des marchés.

Voilà pourquoi les mathématiciens africains ont commencé, dès 1983, à organiser des réunions de concertation sur les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques qui jouent un rôle essentiel dans la préparation des jeunes aux défis de l'avenir.

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques que nous proposons aujourd'hui aux élèves de l'Enseignement Secondaire des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien est le fruit de cette collaboration franche et fraternelle qui a abouti, au mois de juin 1992, à l'élaboration et à l'adoption par tous ces pays des programmes des premier et second cycles de l'Enseignement Secondaire.

Elle a pour objectifs majeurs :

- l'harmonisation de la pédagogie des mathématiques et la mise à la disposition des élèves et des enseignants africains de manuels de qualité tenant compte du milieu socioculturel africain en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques ;
- l'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion ;
- la diminution du coût du manuel pour permettre la réalisation d'un vieux rêve : un élève, un livre.

Les ouvrages de la Collection Inter-Africaine de Mathématiques, rédigés par des équipes d'enseignants, de chercheurs et de responsables pédagogiques africains, belges et français, s'appuient sur l'environnement des élèves pour les motiver, les faire agir, les amener à comprendre et à agir de nouveau, de manière autonome et créatrice. Les contenus adoptés et les méthodes pédagogiques préconisées ont été systématiquement expérimentés dans plusieurs pays avant que ne soient entreprises les rédactions définitives.

Conformément à notre conception de l'enseignement des mathématiques, nous n'avons pas voulu présenter les leçons sous forme d'exposés théoriques, mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture de documents (le plus souvent empruntés au milieu africain) sont mises en œuvre pour solliciter et provoquer constamment la participation active des élèves.

Insérés dans les leçons, des exercices d'application immédiate permettent l'assimilation des notions étudiées. Placés à la fin des chapitres, des exercices d'entraînement et d'approfondissement permettent aux élèves d'éprouver leur compétence et aux professeurs d'évaluer leur enseignement.

Nous exprimons notre gratitude aux différents Ministres chargés de l'Éducation dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien, ainsi qu'aux responsables de la Coopération Française et de la Coopération Belge qui, par leur compréhension, leurs encouragements et leur soutien constant tant moral que matériel, nous ont permis de réaliser ces ouvrages dans les meilleures conditions possibles.

Enfin, nous espérons que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (professeurs et élèves). Afin d'en améliorer les prochaines éditions, nous accueillerons avec reconnaissance les remarques, les critiques et les suggestions qu'ils voudront bien nous faire et, par avance, nous les en remercions.

Salioù Touré

SOMMAIRE

1	LIMITES ET CONTINUITÉ	7	10	NOMBRES COMPLEXES	205
	1. Limites et continuité en a			1. Nombres complexes, forme algébrique	
	2. Continuité sur un intervalle			2. Formes trigonométriques et exponentielles	
	3. Fonctions continues strictement monotones			3. Résolution d'équations	
2	DÉRIVÉE – PRIMITIVES	35	11	NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE	229
	1. Dérivation			1. Nombres complexes et configurations du plan	
	2. Fonctions dérivées			2. Nombres complexes et transformations du plan	
	3. Primitives				
3	ÉTUDES DE FONCTIONS	59	12	GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE	241
	1. Quelques généralités sur les fonctions			1. Vecteurs et points de l'espace	
	2. Exemples d'études de fonctions			2. Produit scalaire	
				3. Produit vectoriel	
4	FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN	81	13	SYSTÈMES LINÉAIRES	259
	1. Définition – Propriétés			1. Résolution d'un système linéaire par la méthode de Gauss	
	2. Dérivées – Primitives-limites			2. Résolution de problèmes	
	3. Exemples d'études de fonctions				
5	FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE	105	14	STATISTIQUE	269
	1. Définition – Propriétés algébriques			1. Séries statistiques doubles - Nuage de points	
	2. Dérivées – Primitives – Limites			2. Ajustement et corrélation linéaire	
	3. Exemples d'études de fonctions				
6	FONCTIONS EXPONENTIELLES FONCTIONS PUISSANCES	123	15	PROBABILITÉ	293
	1. Les nombres réels a^x			1. Analyse combinatoire	
	2. Les fonctions exponentielles de base a			2. Probabilités d'un événement	
	3. Les fonctions puissances d'exposant a				
	4. Exemples d'études de fonctions				
7	CALCUL INTÉGRAL	141	16	PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET VARIABLE ALÉATOIRE	313
	1. Intégrale d'une fonction continue			1. Probabilités conditionnelles	
	2. Techniques du calcul d'intégrales			2. Variable aléatoire	
	3. Calcul de grandeurs				
8	SUITES NUMÉRIQUES	165	PROBLÈMES DE SYNTHÈSE	335	
	1. Généralités				
	2. Convergence				
	3. Suites arithmétiques et géométriques				
	4. Résolution de problèmes concrets				
9	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	191	Index	351	
	1. Résolution d'équations différentielles				
	2. Résolution de problèmes				

PRÉSENTATION DU MANUEL

Organisation d'un chapitre

Le cours

permet à l'élève de reprendre seul le travail effectué en classe avec le professeur.

■ **L'essentiel à mémoriser**, constitué des définitions, propriétés, méthodes, tableaux récapitulatifs, est placé sur fond couleur souvent prolongé par un cadre couleur contenant des traductions mathématiques et des illustrations.

■ **Les exemples** sont souvent des exercices commentés et résolus entièrement ou partiellement. L'énoncé de ces exemples est placé sur fond gris afin d'inviter l'élève à le traiter avant de comparer sa démarche à celle proposée.

■ **Les activités** présentent :

- soit l'introduction d'une notion ;
- soit une démarche pour démontrer une propriété ou un problème ;
- soit une démarche pratique pour appliquer une méthode ou une technique.

Pour les mêmes raisons que dans les exemples, la description de la situation mathématique et le problème posé dans ces activités sont placés sur fond gris.

■ **Les exercices d'applications directes** sont placés après chaque paragraphe.

Les exercices

clôturent chacun des chapitres avec en général des différentes parties :

- Entraînement
- Approfondissement
- Problèmes

Les informations

Des informations historiques, scientifiques, technologiques, culturelles... apportent un « plus » au thème du chapitre. Elles se trouvent dans le flash d'ouverture ou dans des encadrés.

Les travaux pratiques

contiennent un zoom sur quelques thèmes.

Ils sont de trois types :

1. **Les exercices commentés** qui présentent :
 - des méthodes de résolution de problèmes
 - des modèles de rédaction de solution de ces problèmes
2. **Le langage et la logique** qui présentent :
 - des différentes méthodes de démonstration
 - des concepts unificateurs sur les opérations (notions de groupe commutatif, de corps commutatif, d'espace vectoriel).
3. **Des élargissements de notions.**

Sommaire des travaux pratiques

CHAPITRE		CHAPITRE	
1	TP1 Calcul de limite 31	8	TP Limite d'une suite monotone du type : $u_{n+1} = g(u_n)$ 186
	TP2 Démonstration par implication et par contraposition 31	9	TP Courbes paramétrées 201
2	TP Démonstration par récurrence 55	10	TP Formules d'Euler et calcul trigonométrique 223
3	TP1 Recherche d'asymptotes obliques 74	11	TP Caractérisation géométrique et écriture complexe d'une rotation et d'une homothétie 239
	TP2 Recherche de courbes asymptotes 75	12	TP Corps commutatif – Espace vectoriel 255
	TP3 Recherche d'une direction asymp. 76	14	TP1 Exemple d'ajustement se ramenant à un ajustement affine 285
	TP4 Types et méthodes de démonstration 77		TP2 Ajustement affine et ajustement exponentiel 287
4	TP1 La fonction logarithme décimal 100	15	TP Opérations sur les ensembles finis et calcul des probabilités 308
	TP2 La fonction logarithme de base a 101	16	TP1 Très faible probabilité de gagner au tiercé ! 328
5	TP1 Étude de la continuité et de la dérivabilité en x_0 118		TP2 Loi binomiale et contrôle de qualité 330
	TP2 Un exemple d'étude de fonction 118		TP3 Probabilité conditionnelle et suite arithmético-géométrique 331
6	TP1 Recherche de primitives 136		
	TP2 Étude d'équation comportant des fonctions puissances d'exposants réels .. 136		
	TP3 Étude d'une fonction du type u^v 138		
7	TP1 Encadrement d'une intégrale comportant $\ln$ 158		
	TP2 Calcul d'une intégrale comportant $\ln$ 158		
	TP3 Fonction définie par une intégrale 159		
	TP4 Détermination de primitives 160		

Articulation des chapitres – Répartition en modules

Organisation des données (des outils de modélisation)	14 - Statistique 15 - Probabilité 16 - Probabilités conditionnelles et variable aléatoire
--	--

De nouveaux nombres	10 - Nombres complexes 11 - Nombres complexes et géométrie
----------------------------	---

Vers la géométrie analytique de l'espace (outils de résolution de problèmes)	12 - Géométrie dans l'espace 13 - Systèmes linéaires
---	---

Les fondements de l'analyse	1 - Limites et continuité 2 - Dérivée - primitives 3 - Études de fonctions
------------------------------------	--



De nouvelles fonctions de référence	4 - Fonction logarithme népérien 5 - Fonction exponentielle népérienne 6 - Fonctions exponentielles – Fonctions Puissance
--	--



De nouvelles techniques Des outils de modélisation en analyse	7 - Calcul intégral 8 - Suites numériques 9 - Équations différentielles
--	---

Limites et continuité

Les notions de limite et de continuité étaient considérées comme intuitives par les mathématiciens du XVII^e et du XVIII^e siècles.

Certains mathématiciens tels que Gauss, Cauchy et Abel attirèrent l'attention sur la nécessité de produire des définitions et des démonstrations rigoureuses, inaugurant ainsi une ère nouvelle de l'Analyse qui eut son aboutissement au XX^e siècle sur la topologie.

L'Allemand Karl Weierstrass, par les brillants résultats sur ses recherches en analyse, devint l'un des plus célèbres analystes européens de son temps.

À la stupeur de ses contemporains, il définit une courbe continue n'admettant de tangente en aucun point !



© BOYER-VOLLET

Karl Weierstrass
mathématicien allemand – 1815-1897.

SOMMAIRE

1. Limites et continuité en a	8
2. Continuité sur un intervalle	17
3. Fonctions continues strictement monotones	23

Tableau récapitulatif

① Limites de référence

- a et c étant des nombres réels, $\lim_{x \rightarrow a} c = \lim_{x \rightarrow +\infty} c = \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$

- On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

- a étant un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^n = 0$$

Pour n pair : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$

Pour n impair : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty ; & \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty ; & \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \end{cases}$

② Calcul de limite à l'infini de fonctions polynômes et rationnelles

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

③ Critères de continuité en a

- f étant une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a ,
 f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

- Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires est continue en tout élément de son ensemble de définition.

1.1. Limites de référence et continuité en a

■ Limite à gauche - Limite à droite

■ Tableau récapitulatif

① Définition

a et l sont des nombres réels, f une fonction d'ensemble de définition D_f

On dit que f admet une **limite à gauche** en a égale à l lorsque la restriction g de f à $D_f \cap]-\infty; a[$ admet en a une limite égale à l .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = l.$$

On dit que f admet une **limite à droite** en a égale à l lorsque la restriction g de f à $D_f \cap]a; +\infty[$ admet en a une limite égale à l .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l.$$

② Propriété

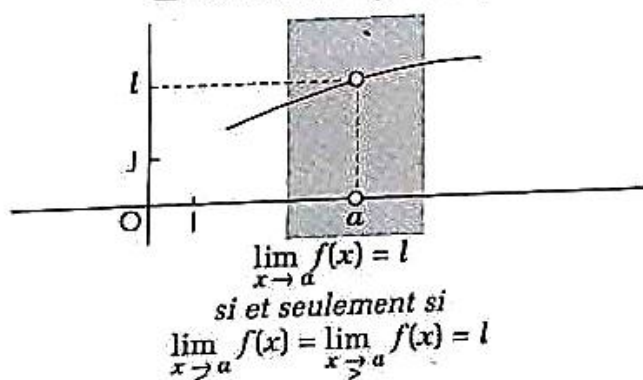
a et l sont des nombres réels, f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a , sauf éventuellement en a .

Dans le cas où f n'est pas définie en a ,

f admet une limite l en a

si et seulement si

f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à l .

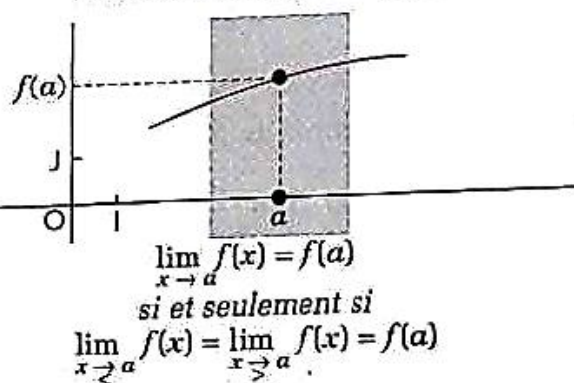


Dans le cas où f est définie en a ,

f admet une limite en a

si et seulement si

f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(a)$.



■ Exemple

Étudions la limite et la continuité en 1 de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; 1], f(x) = x^2 - x + 2 \\ \text{pour } x \in]1; +\infty[, f(x) = x + 1 \end{cases}$$



Calculons la limite à gauche en 1 de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x + 2) = 2$$

Calculons la limite à droite en 1 de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{et} \quad f(1) = 2$$

donc f admet une limite en 1 égale à $f(1)$; par conséquent la fonction f est continue en 1.

Prolongement par continuité

■ Exemple introductif

Étudions la limite et la continuité en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.
On veut trouver une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, continue en 1 et qui coïncide sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ avec f .

Calcul de la limite

Pour tout élément x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = x + 2$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3.$$

La fonction f admet une limite en 1, égale à 3.

Étude d'une fonction auxiliaire

Considérons la fonction g définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, g(x) = f(x) \\ g(1) = 3 \end{cases}$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = g(1).$$

donc g est continue en 1. On dit que g est le prolongement par continuité de f en 1.

Définition et propriété

f est une fonction d'ensemble de définition D_f , a un nombre réel n'appartenant pas à D_f .
On suppose que f admet une limite finie l en a .

Alors la fonction g définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in D_f \setminus \{a\}, g(x) = f(x) \\ g(a) = l \end{cases}$

est continue en a . Elle est appelée **prolongement par continuité de f en a** .

■ Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Démontrons que f admet un prolongement par continuité en 0.

$$\text{On a : } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Donc f admet un prolongement par continuité en 0, la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, g(x) = f(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Exercices

1.a Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x+2}$$

1.b Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité en 2 de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; 2[, f(x) = 2x^2 - 4x - 4 \\ \text{pour } x \in [2 ; +\infty[, f(x) = \frac{2x+3}{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; 2[, f(x) = 2x^2 - 4x - 4 \\ \text{pour } x \in [2 ; +\infty[, f(x) = \frac{x-6}{x-1} \end{cases}$$

1.c Étudier la continuité en 1 de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; 1[, f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1} \\ \text{pour } x \in [1 ; +\infty[, f(x) = -x^2 + 4x - 4 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

1.d On donne la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}.$$

Justifier que f admet un prolongement par continuité en 1 et préciser ce prolongement.

1.2. Limites, opérations, composition

Tableau récapitulatif

① Limites d'une somme

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$

Si f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite en a	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut pas conclure

② Limites d'un produit

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$

Si f a pour limite en a	l	$l, l > 0$	$l, l < 0$	$l, l > 0$	$l, l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite en a	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors fg a pour limite en a	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	on ne peut pas conclure

③ Limites d'un inverse

f est une fonction ; l un nombre réel ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$

Si g a pour limite en a	$l', l' \neq 0$	0 (g étant positive sur K) *	0 (g étant négative sur K) *	$-\infty$ ou $+\infty$
alors $\frac{1}{g}$ a pour limite en a	$\frac{1}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

④ Limites d'un quotient

f et g sont des fonctions ; l et l' des nombres réels ; a un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$

Si f a pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et si g a pour limite en a	$l', l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l', l' > 0$	$l', l' < 0$	$l', l' > 0$	$l', l' < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	on ne peut pas conclure	

* Dans le tableau « Limite d'un inverse », K désigne un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de g et est l'un des types suivants :

– lorsque x tend vers le nombre réel a $\xrightarrow{a}$ $\xrightarrow{a}$ $\xrightarrow{a}$ $\xrightarrow{a}$ $\xrightarrow{a}$ $\xrightarrow{a}$

– lorsque x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$) $] -\infty ; A[$ (resp. $] B ; +\infty[$)

Exemples d'utilisation des opérations sur les limites

■ Limite d'une somme

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty & \text{et} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty & \text{donc} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sqrt{x}) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 & \text{et} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7) = -7 & \text{donc} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^3} - 7\right) = -7. \end{array}$$

■ Limite d'un produit

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2) = -2 & \text{et} & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty & \text{donc} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty & \text{et} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty & \text{donc} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} = +\infty. \end{array}$$

■ Limite d'un inverse

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty & & \text{donc} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0. \\ \text{pour } x \neq 1, (x-1)^2 > 0 & \text{et} & \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 & \text{donc} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty. \\ \text{pour } x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[, \sin x < 0 & \text{et} & \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 & \text{donc} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} = -\infty. \end{array}$$

Formes indéterminées

■ Notations

Lorsque les tableaux ci-dessus ne permettent pas de déterminer la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions, connaissant leurs limites respectives, on dit qu'il y a une forme indéterminée.

On relève quatre types de formes indéterminées :

$\infty - \infty$
traduit la dernière colonne
du tableau
« Limite d'une somme »

$0 \times \infty$
traduit la dernière colonne
du tableau
« Limite d'un produit »

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$
traduisent les dernières
colonnes du tableau
« Limite d'un quotient »

■ Exemples

En faisant la somme des limites
pour calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(3x^2 + 5x - 1) - \sqrt{x}]$$

on obtient la forme indéterminée :

$$\infty - \infty$$

En faisant le produit des limites
pour calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 2x - 5) \left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)]$$

on obtient la forme indéterminée :

$$0 \times \infty$$

En faisant le quotient des limites
pour calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

on obtient respectivement les
formes indéterminées :

$$\frac{0}{0} \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Limite d'une fonction composée

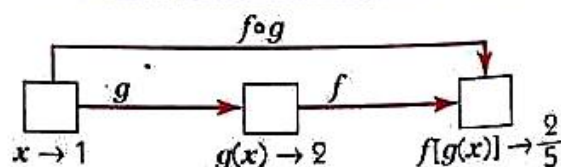
■ Exemple introductif

On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ et $g(x) = x + 1$.
On veut étudier la limite en 1 de $f \circ g$.

Ensemble de définition de $f \circ g$
 $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$; donc $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

$$\text{Pour tout nombre réel } x, f \circ g(x) = \frac{x+1}{(x+1)^2 + 1}.$$

On obtient le schéma ci-contre.



On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

f et g sont des fonctions, a , l et l' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = l'$.

Exemples

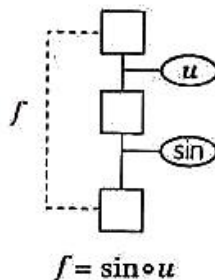
Calculons la limite en 1 de la fonction

$$f : x \mapsto \sin \frac{\pi x^2}{x+1}.$$

f est la composée de la fonction $u : x \mapsto \frac{\pi x^2}{x+1}$ suivie de la fonction sinus.

$$\text{or : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi x^2}{x+1} = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{X \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin X = 1 \end{cases}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x^2}{x+1} = 1.$$



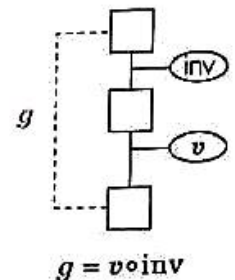
Calculons la limite en $+\infty$ de la fonction

$$g : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}.$$

g est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction $v : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

$$\text{or : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \end{cases}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1.$$



Limites de $\sqrt{f}$ et $|f|$

Cas particuliers de limites de fonctions composées

Propriété

f est une fonction, a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, l un nombre réel positif ou nul, l' un nombre réel.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l'|$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$

Exemples

Calculons les limites en $-\infty$ et en 0 de la fonction

$$h : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 3}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3) = +\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} = +\infty.$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 3) = 3$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + x + 3} = \sqrt{3}.$$

Calculons les limites en 0 et en $-\infty$ de la fonction

$$h : x \mapsto |x^3 + x - 5|$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x - 5) = -5$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} |x^3 + x - 5| = 5.$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x - 5) = -\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x^3 + x - 5| = +\infty.$$

Exercices

1.e Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3}) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 10} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2}.$$

1.f Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{\pi x^2}{x+1} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x}.$$

1.3. Limites et inégalités

Passage à la limite dans une inégalité

Activité introductive

Considérons les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$.

On vérifie aisément que $f \geq g$.

Comparer les limites de f et g en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

a est un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, f et g deux fonctions admettant des limites en a .

Si $f \geq g$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Cette propriété ne permet pas de calculer des limites mais de les comparer.

Calcul de limites par comparaison

On démontre et nous admettons les propriétés suivantes. Elles permettent de calculer des limites.

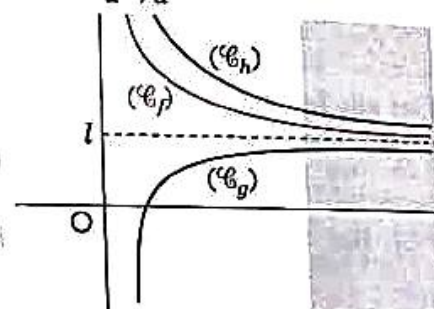
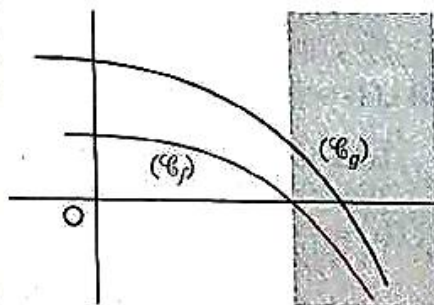
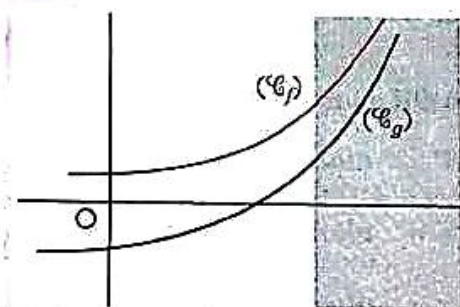
Propriétés

a et l sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, f et g des fonctions.

Si $f \geq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Si $f \leq g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Si $g \leq f \leq h$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$
alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.



Exemples

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Soit x un nombre réel strictement positif,

on a : $-1 < \sin x \leq 1$

d'où : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \cos x)$.

Soit x un nombre réel strictement positif,

on a : $-1 < \cos x \leq 1$

d'où : $x^2 - x \leq x^2 - x \cos x \leq x^2 + x$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \cos x) = +\infty$.

Exercices

1.g On donne la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x - E(x).$$

1. Justifier que : pour tout nombre réel x ,
 $x - 1 < E(x) \leq x$ et $x \leq f(x) < x + 1$.

2. En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f .

1.h Calculer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \sin x$.

1.i On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3}{(1+x^3)\sqrt{1+x^4}}.$$

1. Démontrer que :

pour tout nombre réel x , $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^3}$.

2. En déduire la limite en $+\infty$ de f .

1.4. Calcul de limites et formes indéterminées

Les exemples ci-dessous fournissent quelques procédés classiques permettant de calculer une limite dans le cas où les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée.

Exemples d'utilisation d'une factorisation

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}).$

Pour $x > 0$

on a : $x - \sqrt{x} = \sqrt{x} (\sqrt{x} - 1)$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty.$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) = +\infty.$

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^3+x^2+8}}.$

Pour $x > 0$

on a :
$$\frac{3x-1}{\sqrt{x^3+x^2+8}} = \frac{x(3-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(x+1+\frac{8}{x^2})}}$$
$$= \frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{x+1+\frac{8}{x^2}}}$$

or :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \frac{1}{x}) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1+\frac{8}{x^2}} = +\infty. \end{cases}$$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^3+x^2+8}} = 0.$

Exemples d'utilisation de l'expression conjuguée

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}).$

Transformation de l'expression $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.
(On multiplie et on divise par l'expression conjuguée)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = 0.$

Calculons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2+7} + 3x).$

Transformation de l'expression $\sqrt{9x^2+7} + 3x$.
(On multiplie et on divise par l'expression conjuguée)

$$\sqrt{9x^2+7} + 3x = \frac{7}{\sqrt{9x^2+7} - 3x}$$

or : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2+7} - 3x) = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{\sqrt{9x^2+7} - 3x} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2+7} + 3x) = 0.$

Exemple d'utilisation de l'expression conjuguée et d'une factorisation

Calculons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x-2} + x).$

Transformons l'expression $\sqrt{x^2+3x-2} + x$ en multipliant et en divisant par l'expression conjuguée.

On obtient : $\sqrt{x^2+3x-2} + x = \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x-2}-x}$

La dernière expression donne encore une forme indéterminée.

Poursuivons la transformation en mettant x en facteur au numérateur et au dénominateur.

On obtient :
$$\frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x-2}-x} = \frac{x(3-\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2})}-x} = \frac{x(3-\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}-x}$$

Pour $x < 0$ $\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x = \frac{x(3 - \frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} - x} = \frac{-3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1}$

or : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3 + \frac{2}{x}) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1) = 2$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} + x) = -\frac{3}{2}$.

Exemples d'utilisation d'un taux de variation

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

La fonction racine carrée $f: x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en 1 et on a :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{2}$.

Calculons : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}}$.

On a : $\frac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} (\cos x + \frac{1}{2})$

or : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = (\cos)'(\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\cos x + \frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$

donc : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x - \frac{1}{4}}{x - \frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exemples de changement d'écriture

Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

Transformation d'écriture

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{x} \times \sqrt{x}$$

Calcul des limites

or : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$.

Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$.

Transformation d'écriture

$$\frac{\sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x^2}$$

Calcul des limites

or : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3} = +\infty$.

On examinera comme dernier exemple le calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$ effectué à l'aide de la décomposition, dans le paragraphe 1.2.

Exercice

1. j Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} + 2x}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} + 2x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

2

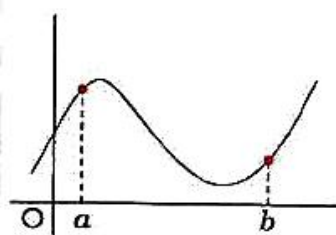
Continuité sur un intervalle

2.1. Définition – Propriétés

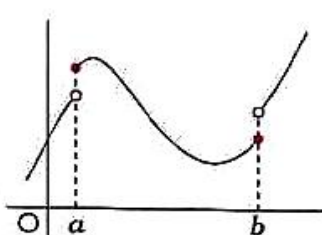
Continuité d'une fonction sur un intervalle

Propriété

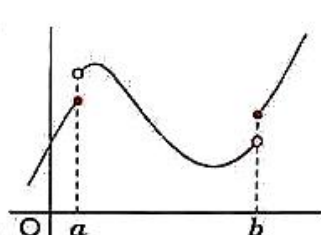
Une fonction f est dite *continue sur un intervalle* K lorsque sa restriction à K est continue en tout élément de K .



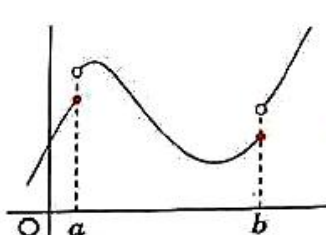
f est continue sur $[a; b]$



f est continue sur $[a; b]$



f n'est pas continue sur $[a; b]$
 f est continue sur $]a; b]$



f n'est pas continue sur $[a; b]$
 f est continue sur $]a; b]$

Image d'un intervalle par une fonction continue

Exemple introductif

On considère la fonction f définie sur $[-2; 3[$ par : $f(x) = xE(x)$.

Pour chaque intervalle K ci-dessous, étudions graphiquement la continuité de f sur K et déterminons graphiquement l'image $f(K)$ de K par f :

$[-2; -1[$; $[-1; 1[$; $] -1; 1[$; $] 0; 1[$; $[-1; 0]$; $[1; 3[$; $] 0; 2[$; $[-1; 1]$.

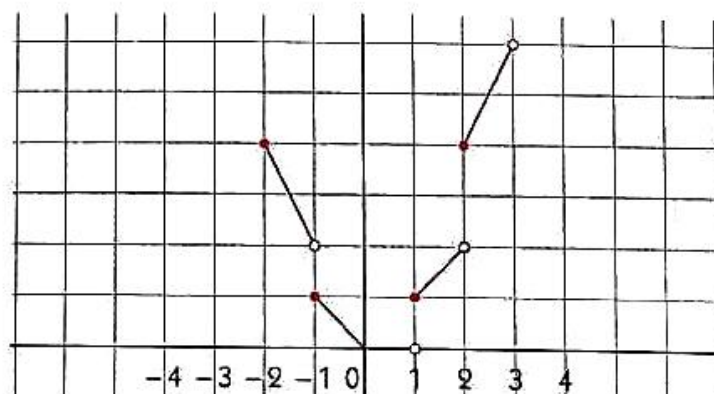
Formules explicites de la fonction f

x	-2	-1	0	1	2	3
$E(x)$	$\boxed{-2}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
$f(x)$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{\text{hatched}}$

$$\begin{cases} \text{pour } x \in [-2; -1[, & f(x) = -2x \\ \text{pour } x \in [-1; 0[, & f(x) = -x \\ \text{pour } x \in [0; 1[, & f(x) = 0 \\ \text{pour } x \in [1; 2[, & f(x) = x \\ \text{pour } x \in [2; 3[, & f(x) = 2x \end{cases}$$

Représentation graphique de f

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J)



Continuité de f sur K et image de K par f

K	$[-2; -1[$	$[-1; 1[$	$] -1; 1[$	$]0; 1[$	$[-1; 0]$	$]1; 2[$	$]1; 3[$	$[-1; 1]$
Continuité de f sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f est continue sur K	f n'est pas continue sur K	f n'est pas continue sur K	f n'est pas continue sur K
$f(K)$	$]2; 4[$	$[0; 1]$	$[0; 1[$	$[0]$	$[0; 1]$	$]1; 2[$	$]1; 2[\cup [4; 6[$	$[0; 1]$

Conclusion

On constate que :

Si f est continue sur K alors $f(K)$ est un intervalle ou un singleton.

Si f est continue sur K et K fermé alors $f(K)$ est un intervalle fermé ou un singleton.

Les réciproques ne sont pas vraies.

En effet : f n'est pas continue sur $[-1; 1]$; cependant $f([-1; 1]) = [0; 1]$.

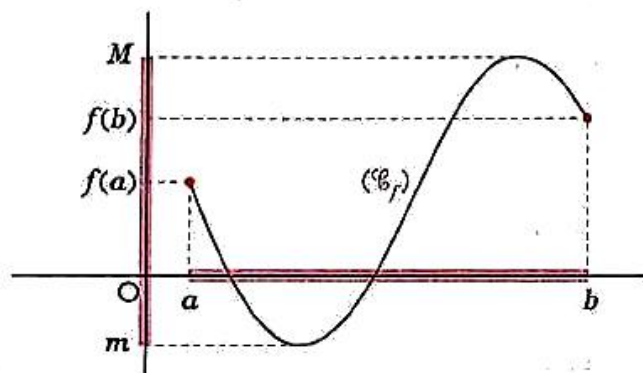
f est continue sur $[-1; 1[$; cependant $f([-1; 1[) = [0; 1]$.

On démontre et nous admettons la propriété fondamentale suivante :

Propriété

Par une fonction continue :

- l'image d'un intervalle est un intervalle ou un singleton.
- l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé ou un singleton.

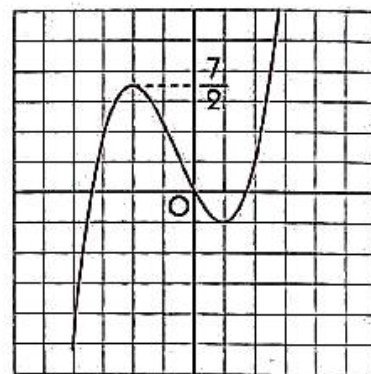


f est continue sur $[a; b]$

$$f([a; b]) = [m; M]$$

m est le minimum de f sur $[a; b]$

M est le maximum de f sur $[a; b]$



$$f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{6}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$

$$f([-3; 2]) = [-1; \frac{7}{2}]$$

$$f([-2; +\infty]) = [-1; +\infty[$$

Cette propriété est très importante. Elle permet,

- d'une part, de déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue dans les cas particuliers où :
l'intervalle est fermé

la fonction est strictement monotone,

- d'autre part, de démontrer l'existence de zéros d'une fonction et de déterminer des valeurs approchées de ces zéros.

■ ■ ■ ■ ■ Détermination de l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue

■ Exemple 1

Déterminons l'image de l'intervalle $[-1; 2]$ par la fonction $f: x \mapsto x^2$.

Détermination du maximum et du minimum de f sur $[-1; 2]$

Soit x un nombre réel.

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$$

car f est décroissante sur $] -\infty; 0]$

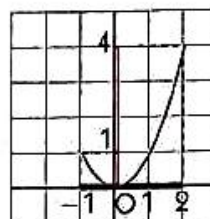
car f est croissante sur $]0; +\infty[$

donc : Pour tout nombre réel x , $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4$
d'où : 0 est un minorant de f et 4 un majorant de f sur $[-1; 2]$
or : $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$,
donc : 0 et 4 sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[-1; 2]$.

Détermination de l'image de $[-1; 2]$ par f

$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [-1; 2] \\ \text{le minimum de } f \text{ sur } [-1; 2] \text{ est } 0 \\ \text{le maximum de } f \text{ sur } [-1; 2] \text{ est } 4 \end{cases}$

donc : $f([-1; 2]) = [0; 4]$.



■ Exemple 2

Déterminons l'image de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$ par la fonction cosinus.

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Détermination du minimum et du maximum de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$

Pour tout nombre réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$

donc : -1 est un minorant de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$ et 1 est un majorant de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$

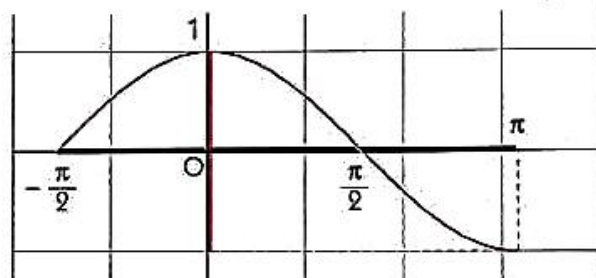
or : $\cos \pi = -1$ et $\cos 0 = 1$.

donc : -1 et 1 sont respectivement le minimum et le maximum de la fonction cosinus sur $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Détermination de l'image de $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$ par $\cos$

$\begin{cases} \cos \text{ est continue sur } [-\frac{\pi}{2}; \pi] \\ \text{le minimum de } \cos \text{ sur } [-\frac{\pi}{2}; \pi] \text{ est } -1 \\ \text{le maximum de } \cos \text{ sur } [-\frac{\pi}{2}; \pi] \text{ est } 1 \end{cases}$

donc : $\cos([-\frac{\pi}{2}; \pi]) = [-1; 1]$.



■■■■■ Détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

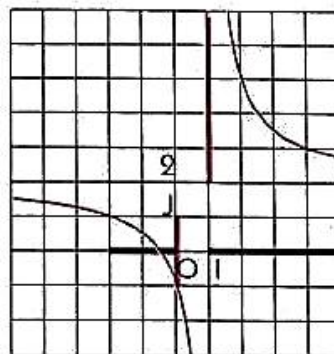
■ Exemple introductif

On donne la fonction $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.

Déterminons graphiquement l'image par f de chacun des intervalles $[-2; 0]$ et $]1; +\infty[$.

Tableau de variation et représentation graphique de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$2 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 2$	



Détermination graphique de $f([-2; 0])$ et de $f(]1; +\infty[)$

$f([-2; 0]) = [-1; 1]$; $f(]1; +\infty[) =]2; +\infty[$

Conclusion

f est continue et strictement décroissante sur $[-2; 0]$

f est continue et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

donc : $f([-2; 0]) = [f(0); f(-2)]$;

donc : $f(]1; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} f(x)[$.

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

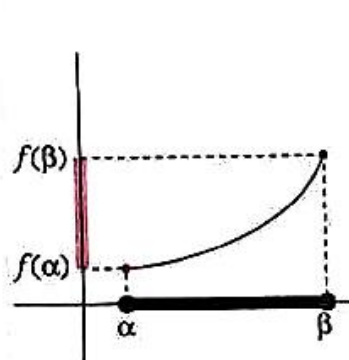
Propriété

α et β sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tels que $\alpha < \beta$,

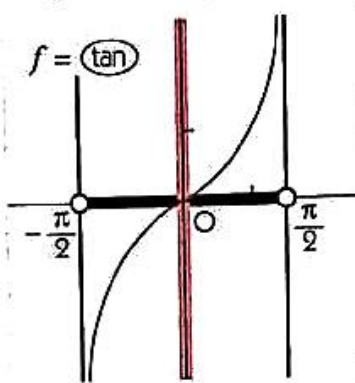
f est une fonction admettant une limite à droite en α et une limite à gauche en β .

- Si f est continue et strictement croissante sur $[\alpha; \beta]$ alors $f([\alpha; \beta]) = [f(\alpha); f(\beta)]$.
- Si f est continue et strictement croissante sur $[\alpha; \beta[$ alors $f([\alpha; \beta]) =]\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x); \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)[$

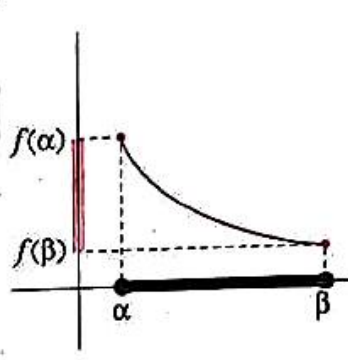
- Si f est continue et strictement décroissante sur $[\alpha; \beta]$ alors $f([\alpha; \beta]) = [f(\beta); f(\alpha)]$
- Si f est continue et strictement décroissante sur $[\alpha; \beta[$ alors $f([\alpha; \beta]) =]\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x); \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)[$



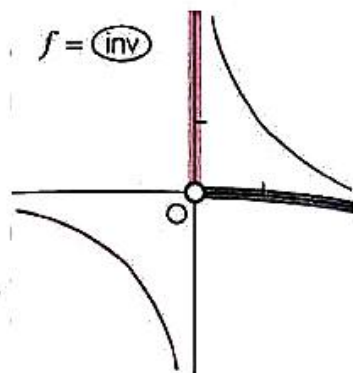
$$f([\alpha; \beta]) = [f(\alpha); f(\beta)]$$



$$f(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) = \mathbb{R}$$



$$f([\alpha; \beta]) = [f(\beta); f(\alpha)]$$



$$f(0; +\infty) =]0; +\infty[$$

Exemples

Déterminons l'image de chacun des intervalles $[-2; 3]$, $]-1; 1[$, $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 1]$ par la fonction cube $f: x \mapsto x^3$.

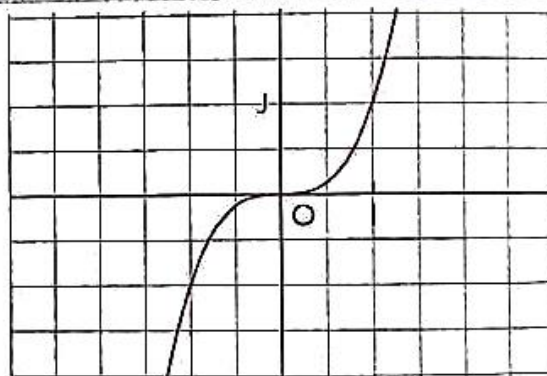
La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur chacun des intervalles $[-2; 3]$, $]-1; 1[$, $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 1]$

$$\text{donc : } f([-2; 3]) = [f(-2); f(3)] = [-8; 27]$$

$$f(]-1; 1[) =]f(-1); f(1)[=]-1; 1[$$

$$f(]0; +\infty[) =]f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]0; +\infty[$$

$$f(]-\infty; 1]) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(1)] =]-\infty; 1]$$



Déterminons l'image de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par la fonction tangente.

La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$,

donc :

$$\tan(]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) =]\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x[= \mathbb{R}.$$

Déterminons l'image de $]0; +\infty[$ par la fonction inverse.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$,

donc :

$$f(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}[=]0; +\infty[.$$

Exercices

2.a On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}.$$

1. Étudier les variations et dresser le tableau de variation de f .

2. En déduire l'image de chacun des intervalles $]0; 4]$ et $[3; +\infty[$.

2.b On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

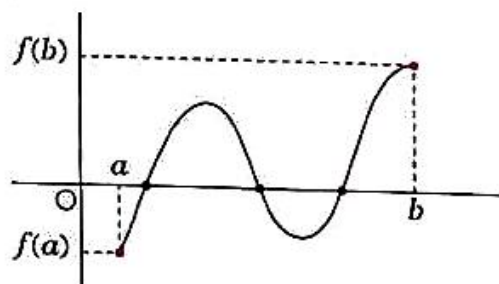
$$f(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants : $[0; \frac{7}{2}]$, $[2; +\infty[$, $]-\infty; 1]$.

2.2. Calcul approché des zéros d'une fonction continue

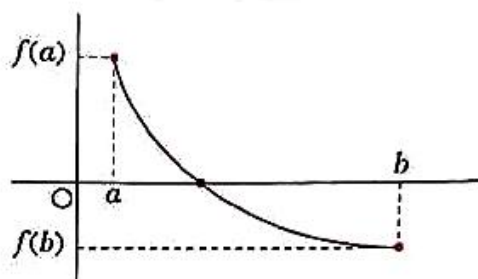
Propriété

- a et b sont des nombres réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a ; b]$, (E) l'équation $f(x) = 0$.
- Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation (E) admet au moins une solution dans $[a ; b]$.
 - Si de plus f est strictement monotone sur $[a ; b]$ alors l'équation (E) admet une unique solution dans $[a ; b]$.



L'équation (E) admet trois solutions.

$$(E) \quad f(x) = 0$$



L'équation (E) admet une seule solution.

Exemple d'utilisation de la méthode par balayage

Démontrons que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ a une seule solution x_0 appartenant à $]-1 ; 0[$ et déterminons un encadrement de x_0 d'amplitude 0,001.



Résoudre l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ revient à chercher les zéros de la fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$.

Localisation du zéro de f

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

or : $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$

donc : f a un seul zéro, x_0 , appartenant à $]-1 ; 0[$.

Encadrement de x_0 par la méthode de balayage

- Recherche d'un encadrement de x_0 par des décimaux consécutifs d'ordre 1

Calculons, de proche en proche, les images par f des nombres décimaux d'ordre 1 de l'intervalle $[-1 ; 0]$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
$f(x)$	-	-	-	+					

On obtient : $-0,7 < x_0 < -0,6$ et $-0,6 - (-0,7) = 0,1$.

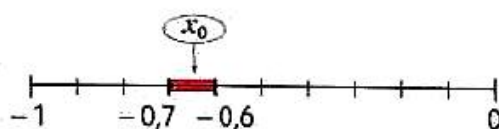
- Recherche d'un encadrement de x_0 par des décimaux consécutifs d'ordre 2

Calculons, de proche en proche, les images par f des nombres décimaux d'ordre 2 de l'intervalle $[-0,7 ; -0,6]$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	-0,69	-0,68	-0,67	-0,66	-0,65	-0,64	-0,63	-0,62	-0,61
$f(x)$	-	+							

On obtient : $-0,69 < x_0 < -0,68$ et $-0,68 - (-0,69) = 0,01$.

Illustrations graphiques

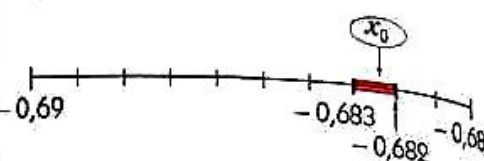


• Recherche d'un encadrement de x_0 par des décimaux consécutifs d'ordre 3

Calculons, de proche en proche, les images par f des nombres décimaux d'ordre 3 de l'intervalle $[-0,69 ; -0,68]$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	-0,689	-0,688	-0,687	-0,686	-0,685	-0,684	-0,683	-0,682	-0,681
$f(x)$	-	-	-	-	-	-	-	+	

On obtient : $-0,683 < x_0 < -0,682$ et $-0,682 - (-0,683) = 0,001$.



Exemple d'utilisation de la méthode de dichotomie



On considère l'équation (E) $\cos x = x$. Démontrons que l'équation (E) a une seule solution α et déterminons une valeur approchée de α à 0,1 près.

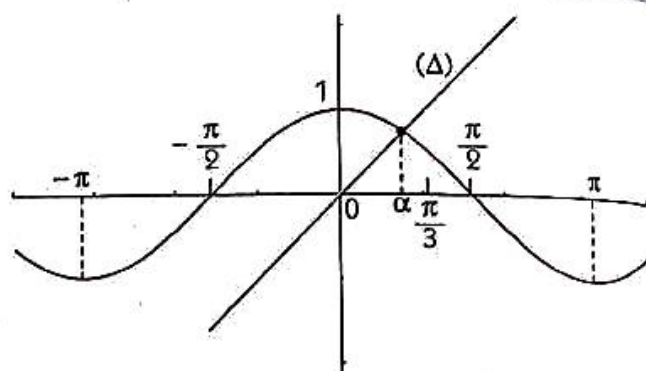
■ Approche graphique

Le plan est muni d'un repère. Désignons par (C) la courbe représentative de la fonction cosinus et par (Δ) la droite d'équation $y = x$.

La courbe (C) coupe (Δ) en un seul point, ce point a pour abscisse α tel que :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

donc l'équation (E) admet une seule solution α et cette solution vérifie $\alpha \in]0 ; \pi[$.



■ Étude algébrique

Résoudre l'équation (E) revient à chercher le zéro de la fonction définie sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$ par : $f(x) = \cos x - x$.

Localisation du zéro de f

f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{3}]$, $f'(x) = -\sin x - 1$

d'où : pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{3}]$, $f'(x) < 0$.

f est donc continue et strictement décroissante sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$.

De plus : $f(0) > 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) < 0$ (car $f(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}$)

d'où : f a un seul zéro α ; ce zéro appartenant à $[0 ; \frac{\pi}{3}]$, l'équation (E) admet donc une seule solution et $\alpha \in [0 ; \frac{\pi}{3}]$.

Encadrement de α par la méthode de dichotomie

$$f(0) > 0 \text{ et } f(\frac{\pi}{3}) < 0 ; \text{ donc } 0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

$$f(\frac{\pi}{6}) > 0 \text{ et } f(\frac{\pi}{3}) < 0 ; \text{ donc } \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

$$f(\frac{\pi}{6}) > 0 \text{ et } f(\frac{\pi}{4}) < 0 ; \text{ donc } \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

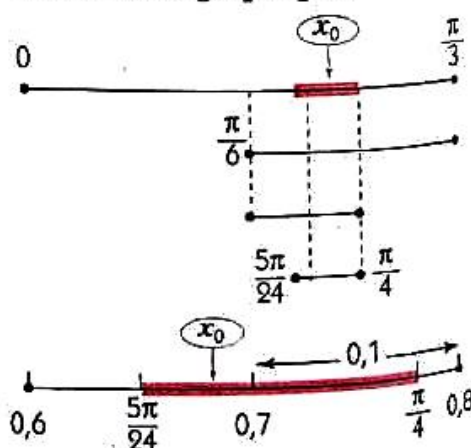
$$f(\frac{5\pi}{24}) > 0 \text{ et } f(\frac{\pi}{4}) < 0 ; \text{ donc } \frac{5\pi}{24} < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

Conclusion

On a : $0,6 < \frac{5\pi}{24} < \alpha < \frac{\pi}{4} < 0,8$

donc : 0,7 est une valeur approchée de α à 0,1 près.

Illustrations graphiques



3

Fonctions continues strictement monotones

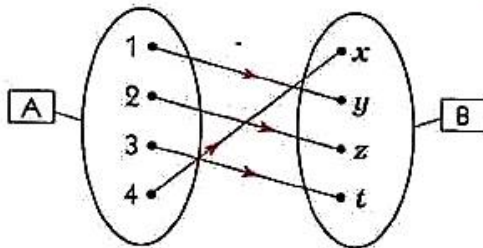
3.1. Applications bijectives, injectives, surjectives

Applications bijectives

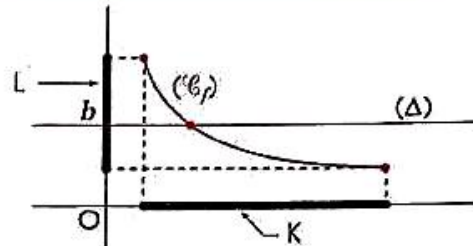
Définition

A et B sont des ensembles non vides, f est une application de A dans B.

On dit que f est une **application bijective** lorsque tout élément de B a un unique antécédent dans A.
On dit aussi que f est une **bijection**.



f est une bijection de A dans B
si et seulement si
pour tout élément b de B
l'équation $f(x) = b$
admet une seule solution dans A.



f est une bijection de K dans L
si et seulement si
pour tout élément b de L
la droite d'équation $y = b$
coupe (C_f) en un seul point.

Exemples

On considère l'application

$$f: [2; +\infty[\rightarrow [-3; +\infty[\\ x \mapsto x^2 - 4x + 1$$

Démontrons que f est une bijection.

Soit b un élément de $[-3; +\infty[$.

Réolvons l'équation (E) d'inconnue x :

$$(E) \quad f(x) = b$$

Résoudre (E) revient à :

- résoudre l'équation (E') $x^2 - 4x + 1 = b$
- ne retenir que les solutions de (E') appartenant à $[2; +\infty[$.

Résolution de (E')

$$(E') \quad x^2 - 4x + 1 = b \quad [b \geq -3]$$

$$(x - 2)^2 - (b + 3) = 0$$

$$(x - 2 - \sqrt{b + 3})(x - 2 + \sqrt{b + 3}) = 0$$

l'équation (E') admet pour solutions :

$$2 + \sqrt{b + 3} \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{b + 3}.$$

On considère l'application

$$g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x \mapsto \frac{2x + 1}{x - 1}$$

Démontrons que g est une bijection.

Soit b un élément de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Réolvons l'équation (E) d'inconnue x :

$$(E) \quad g(x) = b$$

Résoudre (E) revient à :

- résoudre l'équation (E') $\frac{2x + 1}{x - 1} = b$
- ne retenir que les solutions de (E') appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution de (E')

Ensemble de validité : $V = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$(E') \quad \frac{2x + 1}{x - 1} = b \quad [b \neq 2]$$

$$(2 - b)x + 1 + b = 0$$

$$x = \frac{b + 1}{b - 2}$$

Solutions de (E)

- Pour $b > -3$,
 $2 + \sqrt{b+3} > 2$ et $2 - \sqrt{b+3} < 2$

(E) admet une seule solution : $2 + \sqrt{b+3}$.

- Pour $b = -3$,

(E) admet une seule solution : 2.

Conclusion

Tout élément b de $[-3; +\infty[$ admet un antécédent unique par f , le nombre réel $2 + \sqrt{b+3}$.

L'application f est donc bijective.

Sa réciproque est $f^{-1} : [-3; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[$
 $x \mapsto 2 + \sqrt{b+3}$

Solutions de (E)

On a : $b+1 \neq b-2$;

donc : $\frac{b+1}{b-2} \neq 1$

(E) admet une seule solution : $\frac{b+1}{b-2}$.

Conclusion

Tout élément b de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ admet un unique antécédent par g , le nombre réel $\frac{b+1}{b-2}$.

L'application g est donc bijective.

Sa bijection réciproque est $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 $x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$

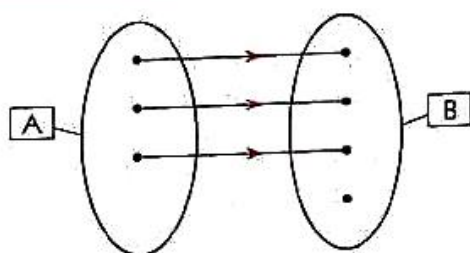
Applications injectives

Définition

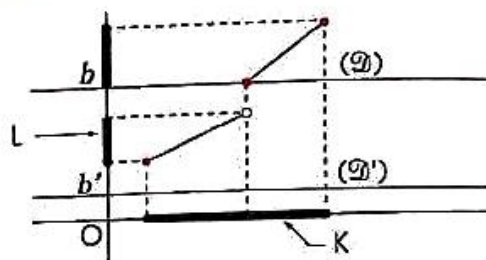
A et B sont des ensembles non vides, f une application de A dans B.

On dit que f est une **application injective** lorsque les images de deux éléments distincts de A sont différentes.

On dit aussi que f est une **injection**.



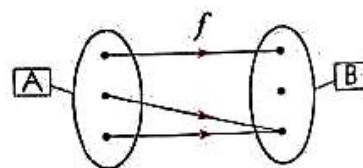
f est une injection de A dans B
 si et seulement si
 pour tout élément b de B
 l'équation $f(x) = b$
 admet une ou zéro solution dans A.



f est une injection de K dans L
 si et seulement si
 pour tout élément b de L
 la droite d'équation $y = b$
 coupe $(\mathcal{C}_f)$ en un ou zéro point.

Remarque

L'application f de A dans B, de diagramme ci-contre, n'est pas injective car deux éléments de A ont la même image.



Propriétés

A et B sont des ensembles non vides, f une application de A dans B.

f est injective si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tous éléments } x_1 \text{ et } x_2 \text{ de A,} \\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{array} \right.$

f est injective si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tous éléments } x_1 \text{ et } x_2 \text{ de A,} \\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array} \right.$

Démonstration guidée

La première propriété caractéristique est une traduction de la définition.

La deuxième propriété caractéristique est déduite de la définition à l'aide du raisonnement par l'absurde suivant :

Supposons que f est injective

Soient x_1 et x_2 des éléments de A tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Démontrons par l'absurde que : $x_1 = x_2$.

Supposons que : $x_1 \neq x_2$

or : f est injective

donc : $f(x_1) \neq f(x_2)$;

ceci est absurde car $f(x_1) = f(x_2)$

d'où : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Supposons que :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Démontrer, en utilisant la définition et un raisonnement par l'absurde, que f est injective.

Exemple

Démontrons que l'application f de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ est injective.

Démontrons que : pour tous éléments x_1 et x_2 de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Soient x_1 et x_2 des éléments de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1 - 3} = \frac{x_2 - 1}{x_2 - 3} \\ &\Leftrightarrow x_1 x_2 - 3x_1 - x_2 + 3 = x_1 x_2 - 3x_2 - x_1 + 3 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

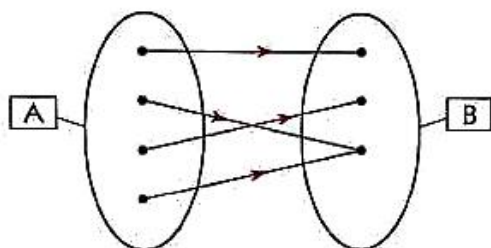
Applications surjectives

Définition

A et B sont des ensembles non vides, f une application de A dans B .

On dit que f est une **application surjective** lorsque l'image de A par f est égale à B .

On dit aussi que f est une **surjection**.

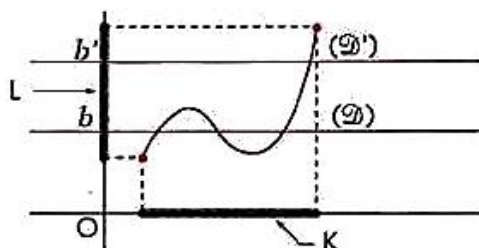


f est une surjection de A dans B
si et seulement si

pour tout élément b de B

l'équation $f(x) = b$

admet une ou plusieurs solutions dans A .



f est une surjection de K dans L
si et seulement si

pour tout élément b de L

la droite d'équation $y = b$

coupe $(\mathcal{C}_f)$ en un ou plusieurs points.

Remarque

- Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.
- f étant une application de A dans B , E une partie de A , si la restriction de f à E est injective alors f permet de définir la bijection $g: E \rightarrow f(E)$
$$x \mapsto f(x)$$

On dit que f détermine une bijection de E dans $f(E)$.

Exercices

3.a Les applications suivantes sont-elles bijectives, injectives, surjectives ?

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x-3}{x+1}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$$

$$x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$$

3.b On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}.$$

Trouver deux ensembles A et B pour que f détermine une application bijective de A dans B .

3.2. Fonctions continues strictement monotones

Bijection continue strictement monotone

Propriété

Toute application strictement monotone est injective.

Démonstration

Soient A et B des ensembles non vides de $\mathbb{R}$

f une application de A dans B strictement monotone

x_1 et x_2 deux éléments de A

Démontrons que : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Si f est strictement croissante

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Si f est strictement décroissante

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

d'où :

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

L'application f est donc injective.

On déduit aisément de la propriété précédente la conséquence suivante :

Propriété

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle K détermine une bijection de K dans $f(K)$.

Remarque

La continuité de f est une hypothèse superflue dans la propriété précédente. Cependant elle permet de déterminer $f(K)$.

Exemples

Démontrons que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ détermine une bijection de $] -\frac{3}{2}; +\infty[$ dans $] -\infty; \frac{1}{2}[$.

Démontrons que l'application g de $] -\infty; \frac{1}{2}[$ dans $] \frac{5}{2}; +\infty[$ définie par $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$ est bijective.

Étude des variations de f

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\infty$
			$\frac{1}{2}$

f étant continue et strictement croissante sur $] -\frac{3}{2}; +\infty[$, on a : $f(]-\frac{3}{2}; +\infty[) =]-\infty; \frac{1}{2}[$.

Conclusion

f détermine une bijection de $] -\frac{3}{2}; +\infty[$ dans $] -\infty; \frac{1}{2}[$.

Étude des variations de g

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{5}{2}$

g étant continue et strictement décroissante sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$, on a : $g(]-\infty; \frac{1}{2}[) =]\frac{5}{2}; +\infty[$.

Conclusion

g est une bijection de $] -\infty; \frac{1}{2}[$ dans $] \frac{5}{2}; +\infty[$.

Récapitulatif Réciproque d'une bijection continue strictement monotone

■ Activité introductive

Considérons la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.

On veut : - démontrer que f détermine une bijection φ de $] -2 ; +\infty[$ dans $] -\infty ; 3[$.
- étudier la continuité et le sens de variation de f^{-1} .

Pour cela, on peut :

- étudier les variations et dresser le tableau de variation de f ; en déduire que f détermine une bijection φ de $] -2 ; +\infty[$ dans $] -\infty ; 3[$;
- représenter graphiquement φ et φ^{-1} dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) et étudier graphiquement la continuité de φ^{-1} ;
- déterminer la formule explicite de φ^{-1} et étudier son sens de variation.

Propriété

φ est une bijection d'un intervalle K dans un intervalle L .

Si φ est continue et strictement monotone sur K ,

alors sa bijection réciproque φ^{-1} est également continue et strictement monotone sur L .

De plus, φ et φ^{-1} ont le même sens de variation.

Démonstration

Admettons la continuité de φ^{-1} et démontrons que φ et φ^{-1} ont le même sens de variation.

Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de K .

Posons : $y_1 = \varphi(x_1)$ et $y_2 = \varphi(x_2)$;

- Si φ est strictement croissante, alors

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$$

d'où

$$\varphi^{-1}(y_1) < \varphi^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2$$

donc φ^{-1} est strictement croissante.

- On prouve de même que si φ est strictement décroissante, alors φ^{-1} est strictement décroissante.

- On en déduit que φ et φ^{-1} ont le même sens de variation.

■ Exemple

On a vu que l'application g de $] -\infty ; 0,5[$ dans $] 2,5 ; +\infty[$ définie par $g(x) = 2x^2 - 2x + 5$ est bijective. Déterminons sa bijection réciproque g^{-1} .

Résolution de l'équation (E) $2x^2 - 2x + 5 = y$ [$y > 2,5$]

(E) admet deux solutions x_1 et x_2 : $x_1 = \frac{1 - \sqrt{2y-9}}{2}$; $x_2 = \frac{1 + \sqrt{2y-9}}{2}$.

On vérifie que : $x_1 < \frac{1}{2}$; $x_2 > \frac{1}{2}$.

L'équation $f(x) = y$ [$y > 2,5$] admet x_1 pour unique solution dans $] -\infty ; 0,5[$.

Conclusion

On obtient $g^{-1} :] -\infty ; 0,5[\rightarrow] 2,5 ; +\infty[$

$$y \mapsto \frac{1 - \sqrt{2y-9}}{2}$$

Exercices

3.c Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie par sa formule. Démontrer que f définit une bijection de l'intervalle K sur un intervalle que l'on précisera.

(1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$, $K =]2 ; +\infty[$.

(2) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$, $K =]1 ; 5[$.

(3) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$, $K =]2 ; +\infty[$.

(4) $f(x) = -4x^3 + 6x + 5$, $K = [1 ; +\infty[$.

(5) $f(x) = \frac{x-2}{3x^2-2x+8}$, $K = [0 ; 2]$.

3.d Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :

(1) $2x^3 - 24x + 3 = 0$.

(2) $x^3 + 2x + 2 = 0$.

3.3. Fonctions puissances d'exposants rationnels

Fonctions racine $n^{\text{ième}}$

■ Activité d'approche

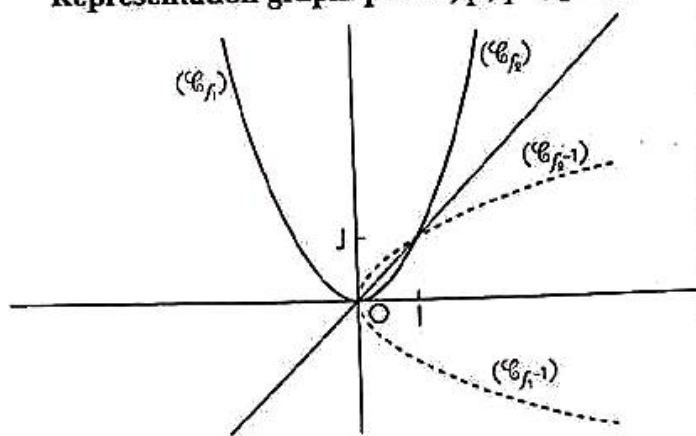
On donne la fonction carrée f et la fonction cube g définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.

Démontrer que :

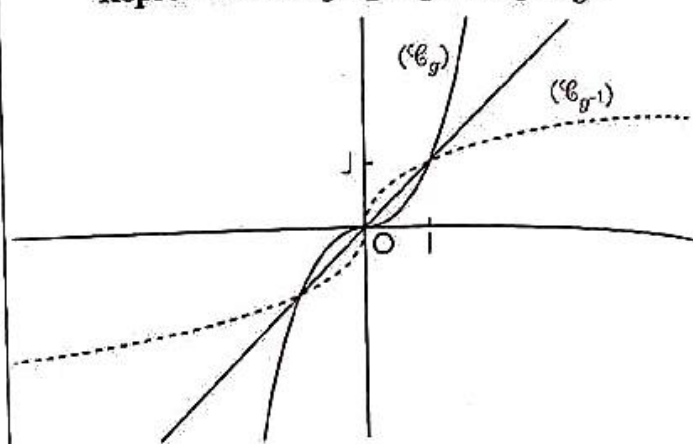
f détermine { une bijection f_1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$
une bijection f_2 de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$

g détermine { une bijection g_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
une bijection g_2 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$
une bijection g_3 de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_-$

Représentation graphique de f_1, f_1^{-1}, f_2 et f_2^{-1}



Représentation graphique de g et g^{-1}



■ Présentation

n est un nombre entier naturel non nul, f_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = x^n$.
Démontrons que f_n détermine une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Étude du sens de variation de f_n

f_n est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x , $f'_n(x) = nx^{n-1}$.

n est pair

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

n est impair

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	$+$	0	$+$
$f_n(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Recherche de bijections

f_n est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

f_n détermine donc :

- une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
- une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$.

f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus,

$f_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

f_n détermine donc :

- une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
- une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_-$.
- une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Conclusion

D'une manière générale, f_n détermine une bijection f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Pour tout nombre entier naturel non nul n , l'application $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une bijection.

Elle admet donc une bijection réciproque.

$$x \mapsto x^n$$

Définition

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle *fonction racine $n^{\text{ième}}$* la bijection réciproque de la bijection $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^n$

Notation

y est un nombre réel positif ou nul.

L'antécédent de y par φ_n est noté :

$\sqrt[n]{y}$ et on lit « racine $n^{\text{ième}}$ de y »

ou bien

$y^{\frac{1}{n}}$ et on lit « y exposant $\frac{1}{n}$ »

– Pour $n = 2$,

on écrit $\sqrt{y}$ et on lit « racine carrée de y »

– Pour $n = 3$,

on écrit $\sqrt[3]{y}$ et on lit « racine cubique de y ».

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition.

Propriétés

x et y étant des nombres réels positifs ou nuls et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt[n]{y} \geq 0$$

$$(\sqrt[n]{y})^n = \sqrt[n]{y^n} = y$$

$$x^n = y \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{n}}$$

$$y^{\frac{1}{n}} \geq 0$$

$$(y^{\frac{1}{n}})^n = (y^n)^{\frac{1}{n}} = y$$

Exemples

$5^2 = 25$ donc $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$; $2^3 = 8$ donc $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$; $1,1^4 = 1,4641$ donc $\sqrt[4]{1,4641} = 1,4641^{\frac{1}{4}} = 1,1$.

Calculs avec les racines $n^{\text{ième}}$

Propriétés

a et b étant des nombres réels positifs, m et n deux nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

$$(1) \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$$

si $b \neq 0$ alors

$$(2) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$(3) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$$

$$(4) \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

$$(5) \quad \sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

$$a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}} = (a^{m+n})^{\frac{1}{nm}}$$

Démonstration

$$(1) \quad (\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n = ab$$

$$\text{donc : } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}.$$

On démontre de même les propriétés (2), (3) et (4).

$$(5) \quad (\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a})^{mn} = (\sqrt[m]{a})^{mn} \times (\sqrt[n]{a})^{mn}$$

$$= [(\sqrt[m]{a})^m]^n \times [(\sqrt[n]{a})^n]^m$$

$$= a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\text{donc : } \sqrt[mn]{a^{m+n}} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a}.$$

Exemples

Simplifier au maximum : $\frac{\sqrt[3]{8a^9}}{(2\sqrt{a})^3}$ [$a > 0$]

$$\frac{\sqrt[3]{8a^9}}{(2\sqrt{a})^3} = \frac{\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{a^9}}{8\sqrt{a^3}} = \frac{2a^3}{8a\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{a}}{4}$$

Simplifier au maximum : $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt{5} \times \sqrt[3]{4}}$

$$\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt{5} \times \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{5^3 2^2}}{\sqrt{5} \times \sqrt[3]{4}} = \frac{5 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{5} \times \sqrt[3]{2^2}} = \sqrt{5}$$

■ ■ ■ ■ ■ Fonctions puissances d'exposants rationnels

Convention d'écriture

x étant un nombre réel positif ou nul, p un nombre entier et q un nombre entier supérieur ou égal à 2

le nombre réel $(x^p)^{\frac{1}{q}}$ est noté $x^{\frac{p}{q}}$;

pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$ est noté $x^{-\frac{p}{q}}$.

Exemples

$$64^{\frac{2}{3}} = (64^{\frac{1}{3}})^2 = 4^2 = 16 \quad ; \quad 16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{[(2^4)^{\frac{1}{4}}]^3} = \frac{1}{8}$$

Définition

r étant un nombre rationnel non nul, on appelle *fonction puissance d'exposant r* , la fonction : $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto x^r$$

On démontre aisément les propriétés suivantes :

Propriétés

r et r' étant des nombres rationnels non nuls, x et y des nombres réels strictement positifs,

$$x^r \times y^r = (xy)^r$$

$$(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$$

$$\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$$

Exemples

$$\left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{4}{3}} \times \left(\frac{26}{5}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{4}{3}} \quad ; \quad \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{7^{\frac{5}{2}}}{9^{\frac{5}{2}}} = \frac{49\sqrt{7}}{243} \quad ; \quad 4^{\frac{3}{4}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \quad ; \quad 11^{\frac{2}{3}} \times 11^{\frac{1}{2}} = 11^{\frac{7}{6}}$$

Exercices

3.e Calculer :

(1) $\sqrt[3]{15625}$

(2) $\sqrt[5]{0,000064}$

(3) $\sqrt[3]{1728 \times 81}$

(4) $\sqrt[4]{6561}$

3.f Simplifier :

(1) $\frac{\sqrt[3]{32} \times \sqrt{675}}{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{405}}$

(2) $\frac{12 \times 14^{-\frac{4}{5}}}{7^{-\frac{5}{6}} \times 6^{-\frac{2}{3}}}$

3.g À l'aide d'une calculatrice, calculer une valeur approchée de chacun des nombres réels suivants :

(1) $5^{0,1}$

(2) $2^{0,142\,857}$

(3) $7^{\frac{1}{3}}$

(4) $8^{\sqrt{3}}$

(5) $\left(\frac{2}{7}\right)^{0,09}$

(6) $\frac{3^{-1,4}}{2^{6,2}}$

TP Travaux pratiques

TP1 Calcul de limite

Ce TP a pour objectif de donner un exemple spécifique de calcul de limite par comparaison.
Exercice commenté

E étant la fonction partie entière, calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

E étant la fonction « partie entière », la difficulté de cet exercice pourrait résider dans la recherche d'un « bon encadrement » de $x \mapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$ par deux fonctions affines ayant la même limite en 0.

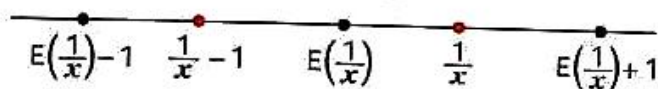
Encadrement de $E\left(\frac{1}{x}\right)$

Soit x un nombre réel non nul, par définition de E ,

$$\text{on a : } E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$$

$$\text{d'où : } E\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \leq \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{donc : } \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$



Encadrement de $xE\left(\frac{1}{x}\right)$ et conclusion

$$\text{pour } x > 0 : 1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\text{pour } x < 0 : 1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) = 1$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

TP2 Démonstration par implication et par contraposition

L'objet de ce TP est de poursuivre la mise en place des différents types et méthodes de démonstration. Dans le cadre de l'apprentissage à la résolution de problèmes, ce TP doit être consulté tout le long de l'année et tendre à devenir une fiche de référence personnalisée par des annotations individuelles.

■ Implication

- Dans un énoncé de propriété, « l'implication » se traduit par : si (p) alors (q)
on note : (p) $\Rightarrow$ (q)
on lit : (p) implique (q)

Cependant, dans certains énoncés de propriété, l'implication est implicite.

- Dans une démonstration, l'utilisation d'une « implication » permet de déduire directement une conclusion C à partir d'une donnée D du problème, on évitera alors l'expression : « si D alors C », ce qui pourrait sous-entendre une supposition (ce qui n'est pas le cas d'une donnée D de problème).

En général, on écrit indifféremment :

$$(1) \text{ on a } D ; \text{ donc } C.$$

$$(2) \text{ puisque } D ; \text{ donc } C.$$

L'implication permet une démonstration par déduction directe d'une conclusion C à partir de la donnée D d'un problème, ou de l'hypothèse H d'une propriété.

■ Contraposée d'une implication

Définition – Propriété

- On appelle **contraposée** de l'implication : (p) $\Rightarrow$ (q)
l'implication : non (q) $\Rightarrow$ non (p).
- On admet qu'une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes.

Lorsqu'il est difficile de démontrer une implication (p) $\Rightarrow$ (q), on peut penser à démontrer sa contraposée : non (q) $\Rightarrow$ non (p).

Exemple

Pour reconnaître une injection, on peut utiliser :

$$\text{ou bien } \begin{cases} \text{l'implication : } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \text{sa contraposée : } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$$

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Limite et continuité en a

Limite à gauche, limite à droite

1 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; -2[, f(x) = \frac{3x^2 + 5x}{x+2} \\ \text{pour } x \in]-2; +\infty[, f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + x - 2} \end{cases}$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en -2 .

2 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{|x-3| - |x+5|}{x^2 - 4}$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en 2 et en -2 .

3 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x+5}}{x^2 - 1}$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en 1 et en -1 .

4 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = xE(x).$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en 1 , en -1 et en n (n étant un nombre entier).

5 Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) (x^2 + 1) & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-2x)^2}{1-x} \\ (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{x-2} & \quad (4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-4x}{x^2 - 9} \end{aligned}$$

Prolongement par continuité

6 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; 1[, f(x) = \frac{6x}{x+2} \\ \text{pour } x \in]1; +\infty[, f(x) = \sqrt{3x+1} \end{cases}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

7 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $]0; 1[$.

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \frac{\sin x}{x} & (2) f(x) &= \frac{\tan x}{x} \\ (3) f(x) &= \frac{1 - \cos x}{x} & (4) f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

8 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $[0; 1]$.

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (2) f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$(3) f(x) = \frac{|x| - 1}{x - 1}$$

$$(4) f(x) = \frac{x(1-x)}{x-1}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

Limites et opérations

9 Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$, de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

10 Pour chacune des fonctions suivantes f et g déterminer leur limite en $+\infty$.

$$(1) f: x \mapsto 3x\sqrt{x+7} \quad (2) g: x \mapsto 2x^3 + \sqrt{x+4}$$

Limites de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles

11 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction rationnelle.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$(1) f(x) = \frac{7x^2 + 3x - 8}{(x-1)(x-2)} \quad (2) f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x+9}$$

12 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction polynôme.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= -x^3 + 4x^2 + 5x - 1 & (3) f(x) &= x^2 - 3x + 6 \\ (2) f(x) &= 2x^3 + 4x^2 + 5x - 1 & (4) f(x) &= -5x^3 - 3x + 6 \end{aligned}$$

Limites d'une fonction composée

$$\mathbf{13} \quad 1. \text{ On sait que : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Étudier les limites suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} & \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} & \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} \end{aligned}$$

$$2. \text{ Calculer : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} \quad [a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*].$$

$$3. \text{ Calculer : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x}.$$

$$\mathbf{14} \text{ Démontrer que : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Étudier les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{4x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{2x}$$

$$\mathbf{15} \text{ On sait que : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$1. \text{ On considère la fonction } f: x \mapsto \frac{1 - \cos 2x}{x^2}.$$

Démontrer que $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{x^2}$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$2. \text{ Dédurre que : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 2.$$

Passage à la limite dans une inégalité

16 On considère une fonction f définie sur $]1; +\infty[$, admettant une limite ℓ finie en $+\infty$, et vérifiant :

$$1 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x} \text{ sur }]1; +\infty[.$$

Déterminer un encadrement de la limite ℓ .

17 Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto x + 2\cos x$ (2) $x \mapsto x^2 - 2\cos(x^3)$

18 Étudier la limite en 0 de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ (2) $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$
(3) $x \mapsto \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$ (4) $x \mapsto x^3 \cos \frac{1}{x}$

19 Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto x + \sin x$ (2) $x \mapsto \frac{1}{x + \cos x}$
(3) $x \mapsto \frac{x + \cos x}{2 + \sin x}$ (4) $x \mapsto \frac{\sin x}{3x + 2}$
(5) $x \mapsto \frac{\cos x}{x - 1}$ (6) $x \mapsto \frac{E(x)}{x}$

20 On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x - 1}$.

Encadrer f par deux fonctions rationnelles.
En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

21 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x \cos x}{1 + x^2}.$$

Encadrer f par deux fonctions rationnelles.
En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

22 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{E(x)}{x}$.

Encadrer f par deux fonctions.
En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

23 On considère la fonction $f : x \mapsto 2x + E(x)$.

1. En utilisant la définition de E , démontrer que :
pour tout x , $x - 1 \leq E(x) \leq x$.

Encadrer f par deux fonctions affines.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Calcul de limites - Utilisation d'une factorisation

24 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3} + 8x$.

1. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Démontrer que : pour $x < 0$, $f(x) = x \left(-\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + 8 \right)$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

25 On considère $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 1} - 3x$.

1. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. Démontrer que : pour $x > 0$, $f(x) = x \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - 3 \right)$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Calcul de limites - Utilisation de l'expression conjuguée

26 On considère $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3} - 5x$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en utilisant l'expression conjuguée.

27 En utilisant des expressions conjuguées, déterminer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9 - x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{6x} - 2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-4}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+x^2} - 5}{4x^2}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x^2 - 1}$

(6) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$

28 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{3x} + 1$.

1. Justifier que ni les règles opératoires sur les limites, ni la « mise en facteur » par $\sqrt{3x}$ ne permettent de déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. À l'aide d'une expression conjuguée de $f(x) - 1$, et en s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Calcul de limites - Utilisation du taux de variation

29 À l'aide du taux de variation de fonctions bien choisies, calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5} - 3}{x-2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$

(5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{3x - \pi}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{2x - \pi}$

(6) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$

30 a étant un nombre réel, calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$

Calcul de limites - Changement d'écriture

31 1. Rappeler les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

2. Calculer la limite en 0 de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x^2}$

(2) $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(3) $x \mapsto x \sin x$

(4) $x \mapsto \sqrt{x} \sin x$

(5) $x \mapsto \frac{\tan x}{x^3}$

(6) $x \mapsto \frac{\tan x}{\sin x}$

(7) $x \mapsto \frac{\tan x - \sin x}{x}$

(8) $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$

32 Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = 2$

(voir exercice n° 15), calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \tan x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos 2x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$

Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle

33 Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

- (1) $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; 0[, & f(x) = 1 - x \\ \text{pour } x \in]0; +\infty[, & f(x) = 5x^3 + x + 1 \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; 0[, & f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 9 \\ & f(0) = 9 \end{cases}$

34 Dans chacun des cas suivants, déterminer a pour que f soit une fonction continue sur $\mathbb{R}$:

- (1) $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, & f(x) = \frac{8x-13}{4x+1} \\ & f(1) = a \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}, & f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-7} \\ & f(7) = a \end{cases}$

35 Dans chacun des cas suivants, déterminer a et b pour que f soit une fonction continue sur l'intervalle $[-1; 1]$:

- (1) $\begin{cases} \text{pour } x \in [-1; 1], & f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2+2x+3}} \\ & f(-1) = a \\ & f(1) = b \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} \text{pour } x \in [-1; 1] \setminus \{0; -\frac{1}{2}\}, & f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{1}{4x^2+3} \\ & f(0) = a \\ & f(-\frac{1}{2}) = b \end{cases}$

Détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue

36 1. Construire la courbe d'équation : $y = -x^3$. En déduire la représentation graphique de la fonction polynôme f définie par : $f(x) = (x-1)^3 - 2$.

2. Justifier que f est une fonction strictement monotone (on évitera d'utiliser la dérivée de f).

3. Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des intervalles suivants : $]-3; 1]$ et $[0; +\infty[$.

Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

37 1. Construire la courbe d'équation : $y = \frac{1}{x}$. En déduire la représentation graphique de la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$.

2. Justifier que f est une fonction strictement monotone (on évitera d'utiliser la dérivée de f).

3. Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des intervalles suivants : $[-2; 2]$ et $[3; +\infty[$.

Vérifier par le calcul les résultats obtenus.

38 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-4	-3	0	$+\infty$
$f(x)$	1	3	$+\infty$	0	-2

Quelle est l'image par f de chacun des intervalles suivants ?

$[-4; -3]$; $[-3; 0]$; $[-3; +\infty[$; $]-\infty; -4]$.

Calcul approché des zéros d'une fonction continue

39 1. Construire la courbe d'équation : $y = \cos x$. En déduire la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

2. Déterminer graphiquement un encadrement du zéro de f ayant la plus petite partie entière positive par deux nombres entiers consécutifs.

On désigne par α ce zéro de f .

Déterminer par la méthode de balayage (ou de dichotomie) une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

40 f est la fonction polynôme définie par :

$$f(x) = (x+2)^2 - 47.$$

1. Justifier que f est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle admet un unique zéro α .

2. À l'aide d'une calculatrice programmable, déterminer un encadrement de α par deux nombres consécutifs.

3. Déterminer par la méthode de balayage (ou de dichotomie) une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Fonctions continues strictement monotones

Applications bijectives, injectives, surjectives

41 Les applications suivantes sont-elles bijectives, injectives, surjectives ?

$$f: x \mapsto x^4 + 1 ; \quad g: x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} ; \quad h: x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Bijection continue strictement monotone

42 f est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Donner des ensembles A et B tels que f détermine une application bijective de A dans B .

43 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	$-\infty$

Donner les ensembles A , B et C tels que f détermine les applications bijectives :

- de $]-\infty; 0]$ dans A
- de $[0; 1]$ dans B
- de $[1; +\infty[$ dans C .

Réciproque d'une bijection continue strictement monotone

44 On considère la fonction :

$$f:]-1; +\infty[\rightarrow]-4; +\infty[\\ x \mapsto x^2 + 2x - 3$$

1. Justifier que f est une bijection.

2. Déterminer la bijection réciproque de f .

3. Établir le tableau de variation de f^{-1} .

4. Construire la représentation graphique de f , en déduire celle de f^{-1} .

Fonctions puissances à exposants rationnels

45 Écrire sous la forme la plus simple possible chacun des nombres réels suivants :

$$(1) \frac{\sqrt[3]{36}}{3}$$

$$(2) \frac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{200}}$$

$$(3) 27^{\frac{2}{3}}$$

$$(4) 8^{-\frac{4}{3}}$$

$$(5) \frac{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt[3]{9}}{3\sqrt[3]{3}}$$

On a vu en classe de Première SE que Isaac Newton (1642-1727) en Angleterre et Gottfried Leibniz (1646-1716) en Allemagne créèrent la notion de dérivée, indépendamment l'un de l'autre.

À la fin du XIX^e siècle, le problème qui se pose est le suivant : quelles sont les fonctions qui admettent pour dérivée une fonction donnée ?

Le mathématicien français Lebesgue apporta une réponse à cette question, ce qui permit d'introduire la notion de primitive.



© ARTIPHOT

Henri Lebesgue
France – 1875-1941.

SOMMAIRE

1. Dérivation	36
2. Fonctions dérivées	41
3. Primitives	49

1

Dérivation

1.1. Dérivabilité en x_0

Propriété – Définition

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0 .
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) La fonction $h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie l en 0.

(2) Il existe un nombre réel l et une fonction φ définie sur un intervalle K contenant 0, tels que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\varphi(h) \quad [x_0 + h \in K \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0].$$

Lorsque l'une des deux propriétés est réalisée, on dit que la fonction f est dérivable en x_0 .

Le nombre réel l est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

ou encore

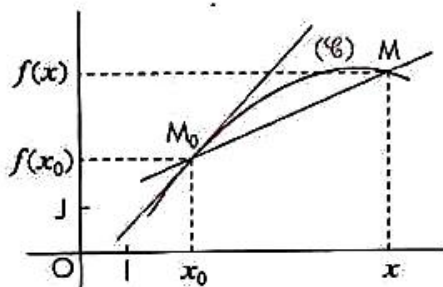
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Interprétation géométrique

Si la fonction f est dérivable en x_0 , alors la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f admet une tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$.

Une équation de cette tangente est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



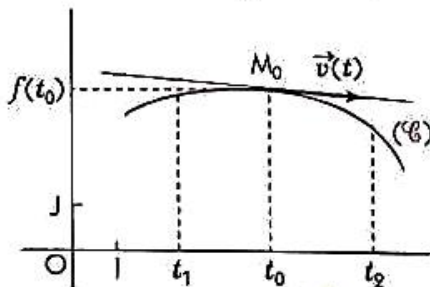
$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ en $M_0(x_0; f(x_0))$.

Interprétation cinématique

Si la loi horaire d'un mouvement est une fonction f dérivable en t_0 , alors la trajectoire $(\mathcal{C})$ admet une tangente au point $M_0(t_0; f(t_0))$.

La vitesse moyenne entre t et t_0 est :

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



$f'(t_0)$ est la vitesse instantanée à l'instant t_0 .

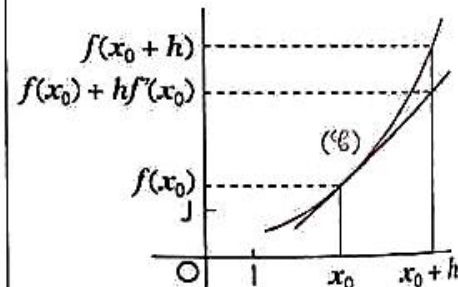
Interprétation numérique

D'après la définition,

$f(x_0) + hf'(x_0)$ est une approximation de $f(x_0 + h)$, l'erreur étant $h\varphi(h)$.

On a donc :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h).$$



$h \mapsto f(x_0) + hf'(x_0)$ est la meilleure approximation affine de f en x_0 .

Exercices

1.a Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. En utilisant la définition de la dérivée, étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 .

(1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; $x_0 = 1$

(2) $f(x) = \sin x^2$; $x_0 = 0$

1.b Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Trouver une fonction affine qui permet d'approcher $f(a + h)$ pour h voisin de zéro.

(1) $f(x) = 3x^2 + 1$; $a = 3$

(2) $f(x) = \frac{2}{x+2}$; $a = 1$

1.2. Dérivabilité sur un intervalle

Exemple introductif

On donne la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; 1], f(x) = x^2 \\ \text{pour } x \in [1 ; +\infty[, f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de f et déterminons la dérivée f' .
Donnons une interprétation graphique des résultats obtenus.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	x^2	1	$\frac{1}{x}$

Dérivabilité en tout élément de $]-\infty ; 1[$ et de $]1 ; +\infty[$

Sur $]-\infty ; 1[$, f coïncide avec $g : x \mapsto x^2$
donc, f est dérivable en tout élément de $]-\infty ; 1[$.
On dit que f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et :
pour tout x élément de $]-\infty ; 1[$, $f'(x) = g'(x) = 2x$.

Sur $]1 ; +\infty[$, f coïncide avec $h : x \mapsto \frac{1}{x}$
donc, f est dérivable en tout élément de $]1 ; +\infty[$.
On dit que f est dérivable sur $]1 ; +\infty[$ et :
pour tout x élément de $]1 ; +\infty[$, $f'(x) = h'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Étude de la dérivabilité en 1

Étudions la limite en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 2.$$

On dit que f est dérivable à gauche en 1.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ est appelée le nombre dérivé à gauche en 1 de f , noté : $f'_g(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1) = -1.$$

On dit que f est dérivable à droite en 1.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ est appelée le nombre dérivé à droite en 1 de f , noté : $f'_d(1)$.

Conclusion

La fonction f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et dérivable à gauche en 1, on dit que la fonction f est dérivable sur $]-\infty ; 1]$

$$\text{et : } \begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; 1[, f'(x) = g'(x) = 2x \\ f'_g(1) = g'(1) = 2. \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $]1 ; +\infty[$ et dérivable à droite en 1, on dit que la fonction f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$

$$\text{et : } \begin{cases} \text{pour } x \in]1 ; +\infty[, f'(x) = h'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ f'_d(1) = h'(1) = -1. \end{cases}$$

Interprétation graphique

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

$(\mathcal{C})$, $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{H})$ sont les représentations graphiques respectives de f , g , h .

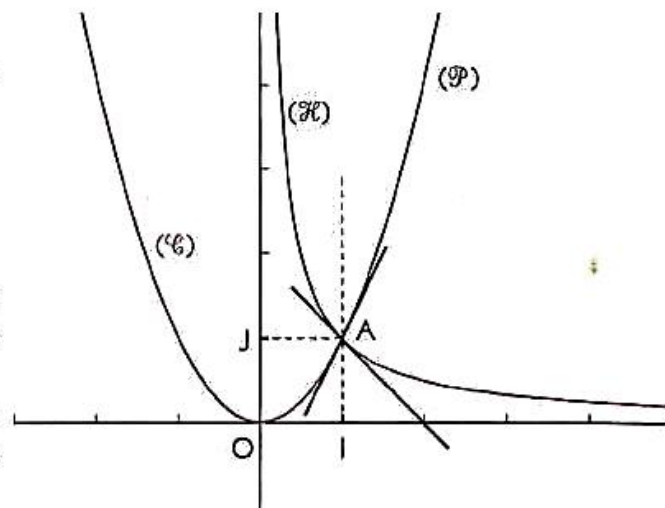
$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{H})$ sont sécantes au point $A(1 ; 1)$.

$(\mathcal{C})$ coïncide avec $(\mathcal{P})$ sur $]-\infty ; 1]$.

$(\mathcal{C})$ coïncide avec $(\mathcal{H})$ sur $[1 ; +\infty[$.

– La tangente en A à $(\mathcal{P})$ est appelée la **tangente à gauche en A** à $(\mathcal{C})$, c'est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'_g(1)$ égal à 2.

– La tangente en A à $(\mathcal{H})$ est appelée la **tangente à droite en A** à $(\mathcal{C})$, c'est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'_d(1)$ égal à -1 .



Définition

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0 .

On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 lorsque

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et est finie.}$$

Cette limite est appelée le **nombre dérivé à gauche** en x_0 de f .

On note : $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

La droite passant par le point $M_0(x_0; f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'_g(x_0)$ est appelée la **tangente à gauche** à la courbe représentative de f au point M_0 .

On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 lorsque

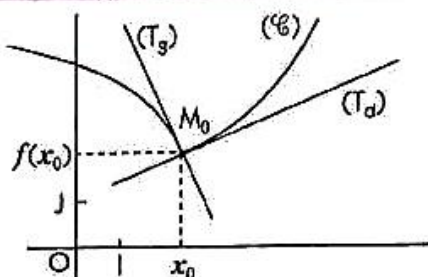
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et est finie.}$$

Cette limite est appelée le **nombre dérivé à droite** en x_0 de f .

On note : $f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

La droite passant par le point $M_0(x_0; f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ est appelée la **tangente à droite** à la courbe représentative de f au point M_0 .

$$f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0) \\ (T_g) \neq (T_d)$$



On dit que M_0 est un **point anguleux** de (C)

À l'aide de ces définitions on démontre la propriété suivante :

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant x_0 .

f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche en x_0 , dérivable à droite en x_0 et :

$$f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Leftrightarrow f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$$

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x|x - 1|.$$

Calculons le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite en 1.

La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe de $x - 1$	-	0	+
$f(x)$	$x(-x + 1)$	0	$x(x - 1)$

Nombre dérivé à gauche en 1

Pour $x < 1$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x(-x + 1)}{x - 1} = -x$

donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$

d'où : $f'_g(1) = -1$

Nombre dérivé à droite en 1

Pour $x > 1$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x$

donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$

d'où : $f'_d(1) = +1$

La fonction f n'est pas dérivable en 1 car $f'_g(1) \neq f'_d(1)$.

Tangente verticale

Exemple introductif

On donne la fonction racine carrée f ; elle est définie par : $f(x) = \sqrt{x}$.
Son ensemble de définition est $[0; +\infty[$. Étudions la dérivabilité de f en 0.

Étude de la dérivabilité de f en 0

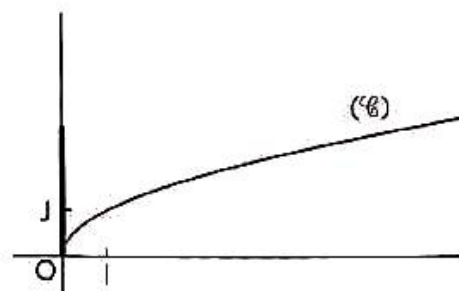
On sait que la fonction f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

donc, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique

Le plan est muni du repère (O, I, J) . On sait que la courbe représentative de f admet une tangente verticale en 0.



On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle K contenant x_0 .

Lorsque la limite à droite ou la limite à gauche de la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est infinie, la représentation graphique de f admet une tangente verticale au point $M_0(x_0; f(x_0))$.

Exemple

On donne la fonction f définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; -3], & f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\ \text{pour } x \in [-3; +\infty[, & f(x) = x + \sqrt{x^2 + 10x + 21} \end{cases}$
Étudions la dérivabilité de f en -3 .

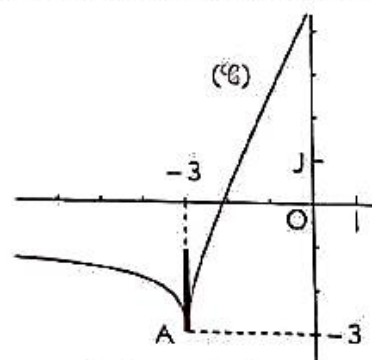
• pour $x < -3$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} &= \frac{x + 3 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x + 3} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{(x+3)(x-1)}}{-x-3} = 1 - \frac{\sqrt{(x+3)(x-1)}}{(\sqrt{-x-3})^2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = 1 - \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{\frac{-x+1}{-x-3}} = -\infty$$

• pour $x > -3$, on obtient de même : $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = -\infty$

• La représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f admet donc au point $A(-3; -3)$ une tangente verticale.



On dit que A est un point de rebroussement

Dérivabilité sur un intervalle

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle $]a; b[$.

On dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ lorsque f est dérivable en tout élément de $]a; b[$.

f est une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$.

On dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a; b]$ lorsque f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, est dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .

Exemple 1

Étudions la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x\sqrt{x}$.

Ensemble de définition de f

$$D_f = [0 ; +\infty[$$

La fonction f est le produit de la fonction identité $x \mapsto x$ et de la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.
La fonction identité est dérivable, et la fonction racine carrée est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et non dérivable en 0.

Étude de la dérivabilité de f sur $]0 ; +\infty[$

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et :

$$\text{pour tout } x \text{ élément de }]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Étude de la dérivabilité de f en 0

$$\text{on a : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\sqrt{h}}{h} = 0$$

donc f est dérivable en 0 et : $f'(0) = 0$.

Dérivée de f

La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sa dérivée f' est définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

f' est donc définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Exemple 2

Étudions la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x^2 - 4|$.

Étude de la dérivabilité de f sur $]-\infty ; -2]$, sur $[2 ; +\infty[$ et sur $[-2 ; 2]$

Considérons donc les fonctions polynômes g et h définies par $g(x) = x^2 - 4$ et $h(x) = 4 - x^2$.

f coïncide avec g sur $]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$.

f coïncide avec h sur $[-2 ; 2]$.

x	$-\infty$	0	0	$+\infty$	
signe de $x^2 - 4$	+	0	-	0	+
expression de $ x^2 - 4 $	$x^2 - 4$	0	$4 - x^2$	0	$x^2 - 4$

Les fonctions g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2x$; $h'(x) = -2x$

f est donc dérivable sur $]-\infty ; -2]$, sur $[2 ; +\infty[$, sur $[-2 ; 2]$ et :

$$\text{pour tout } x \text{ élément de }]-\infty ; -2[, f'(x) = g'(x) = 2x$$

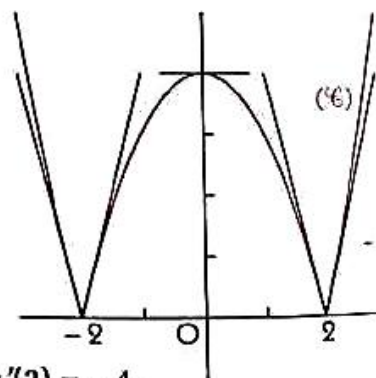
$$\text{et } f'_g(-2) = g'(-2) = -4$$

$$\text{pour tout } x \text{ élément de }]2 ; +\infty[, f'(x) = g'(x) = 2x$$

$$\text{et } f'_g(2) = g'(2) = 4$$

$$\text{pour tout } x \text{ élément de }]-2 ; 2[, f'(x) = h'(x) = -2x$$

$$\text{et } f'_h(-2) = h'(-2) = 4, f'_h(2) = h'(2) = -4.$$



Exercices

1.c Déterminer la tangente au point d'abscisse a de la représentation graphique de chacune des fonctions f définies ci-dessous.

$$(1) f(x) = x^2 + 3x - |x| \quad ; \quad a = 0$$

$$(2) \begin{cases} \text{pour } x \in [1 ; +\infty[, f(x) = x^2 \\ \text{pour } x \in]-\infty ; 1[, f(x) = \frac{3x^2 + 1}{3} \end{cases} \quad ; \quad a = 1$$

1.d Dans chacun des cas suivants, déterminer le (ou les) intervalles sur lesquels la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie ci-dessous est dérivable.

$$(1) f(x) = 2x - 3 - \frac{5}{x} \quad (2) f(x) = x^2 - \sqrt{x}$$

$$(3) f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad (4) f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$$

$$(5) f(x) = \cos^3 x \quad (6) f(x) = 2x \sin x$$

2

Fonctions dérivées

2.1. Dérivées successives

Définition

Exemple introductif

Déterminons la dérivée de la dérivée f' de la fonction polynôme f définie par :

$$f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 1.$$

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée f' est la fonction polynôme, définie par :

$$f'(x) = 15x^2 + 8x - 7.$$

f' est donc aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $(f')'$ est la fonction polynôme définie par :

$$(f')'(x) = 30x + 8.$$

La fonction $(f')'$ est appelée **dérivée seconde** de f ; on note f'' .

Définition

f est une fonction dérivable sur un intervalle K .

Si f' est dérivable sur K , sa dérivée est appelée **dérivée seconde** de f , notée f'' ou $f^{(2)}$.

f' est aussi appelée **dérivée première** de f , on la note $f^{(1)}$.

Par itération, la dérivée n^{e} de la fonction f est la dérivée de la dérivée $(n-1)^{\text{e}}$ de f .
on note :

$$f^{(1)} = f' ; f^{(2)} = f'' ; \dots ; f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Notation différentielle

On adopte souvent en physique la notation suivante : $f^{(1)} = \frac{df}{dx}$; $f^{(2)} = \frac{d^2f}{dx^2}$; ... ; $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Exemple

n est un nombre entier naturel non nul.

Déterminons la dérivée n^{e} de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos x$.

Calculons les dérivées successives de f

f est dérivable ainsi que ses dérivées successives.

Soit x un nombre réel ;

$$\text{on a : } f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\sin\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 3 \times \frac{\pi}{2}\right).$$

On peut alors émettre la conjecture suivante :

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \times \frac{\pi}{2}\right) \quad [n \in \mathbb{N}].$$

À l'aide d'une démonstration par récurrence, contrôlons cette conjecture (voir TP p. 55)

$$\text{— On a bien : } f^{(1)}(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{— Supposons que : } f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \times \frac{\pi}{2}\right) \quad [k \in \mathbb{N}]$$

$$\text{on a : } f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = -\sin\left(x + k \times \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(x + k \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(x + (k+1) \times \frac{\pi}{2}\right).$$

Conclusion

pour tout nombre entier naturel n ,

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \times \frac{\pi}{2}\right).$$

Exercices

2.a Dans chacun des cas suivants, déterminer les deux premières dérivées de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par sa formule explicite.

$$(1) f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$$

$$(3) f(x) = \sin 4x$$

$$(4) f(x) = x\sqrt{2x}.$$

2.b n est un nombre entier naturel non nul.

Déterminons la dérivée n^{e} de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin x$.

2.2. Dérivée d'une fonction composée

■ Présentation et propriétés

Exemple introductif

Déterminons le nombre dérivé de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (2x - 5)^3$.

f est une fonction polynôme, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction f comme composée de $u : x \mapsto 2x - 5$ suivie de $v : x \mapsto x^3$.

On a : pour tout nombre réel x , $f(x) = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$ et $f'(x) = 24x^2 - 120x + 150 = 6(2x - 5)^2$

or : pour tout nombre réel x , $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3x^2$

donc : pour tout nombre réel x , $f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

On démontre et nous admettons les propriétés suivantes :

Propriétés

u est une fonction définie sur un intervalle K , et v une fonction définie sur un intervalle L contenant $u(K)$.

- Si la fonction u est dérivable en un élément x_0 de K et la fonction v est dérivable en $u(x_0)$, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable en x_0 , et : $(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$.
- Si la fonction u est dérivable sur K et la fonction v est dérivable sur L , alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur K , et : $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.

■ Racine carrée d'une fonction dérivable et strictement positive

■ Présentation

On donne une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle K .
Déterminons la dérivée de la fonction $\sqrt{u}$.

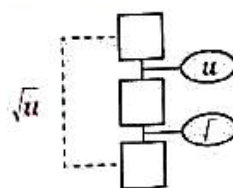
Considérons la fonction racine carrée v , elle est définie par : $v(x) = \sqrt{x}$
donc : $\sqrt{u} = v \circ u$.

La fonction v est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\text{pour tout nombre réel } x, v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La fonction $\sqrt{u}$ est donc dérivable sur K et :

$$\text{pour tout } x \text{ élément de } K, (\sqrt{u(x)})' = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}.$$



$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

■ Exemple

Déterminons la dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

On considère la fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$.

Pour tout nombre réel x , $u(x) > 0$.

u est dérivable et pour tout nombre réel x , $u'(x) = 2x$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$.

■ ■ ■ ■ ■ Puissance $n^{\text{ième}}$ d'une fonction dérivable

■ Présentation

On donne une fonction u dérivable sur un intervalle K , n un nombre entier naturel non nul. Déterminons la dérivée de la fonction u^n .

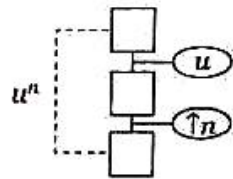
Considérons la fonction v de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $v(x) = x^n$ donc : $u^n = v \circ u$.

La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

pour tout nombre réel x , $v'(x) = nx^{n-1}$.

La fonction u^n est donc dérivable sur K et :

pour tout x élément de K , $([u(x)]^n)' = u'(x) \times n[u(x)]^{n-1}$.



$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

■ Exemple

Déterminons la dérivée des fonctions f et g définies par : $f(x) = (5x^2 - 2x + 3)^6$; $g(x) = \sin^5 x$.

Dérivée de f

u est la fonction polynôme définie par :

$$u(x) = 5x^2 - 2x + 3 ;$$

d'où : $f = u^6$

donc : $f'(x) = 6u'(x)u^5(x) = 6(10x - 2)(5x^2 - 2x + 3)^5$

Dérivée de g

u est la fonction sinus ;

d'où : $g = u^5$

donc : $g'(x) = 5u'(x)u^4(x) = 5\cos x \sin^4 x$

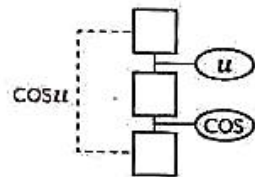
■ ■ ■ ■ ■ Cosinus ou sinus d'une fonction dérivable

■ Présentation

On donne une fonction u dérivable sur un intervalle K . Déterminons la dérivée de $\cos u$ et $\sin u$.

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
pour tout nombre réel x , $\cos'x = -\sin x$ et $\sin'x = \cos x$.

Les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont donc dérivables sur K et :
pour tout x élément de K , $(\cos u(x))' = u'(x)(-\sin u(x))$
 $(\sin u(x))' = u'(x)(\cos u(x))$



$$\begin{aligned} (\cos u)' &= -u'\sin u \\ (\sin u)' &= u'\cos u \end{aligned}$$

■ Exemple

Déterminons la dérivée de la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \cos(2x^2 - 3)$.

g est la composée de $u : x \mapsto 2x^2 - 3$ suivie de $v : x \mapsto \cos x$; donc : $g = v \circ u$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'image par u de tout élément de $\mathbb{R}$ est un élément de $\mathbb{R}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = -4x \sin(2x^2 - 3)$.

Exercice

2.c Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de f .

(1) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 1}$

(2) $f : x \mapsto (4x^2 - x - 1)^4$

(3) $f : x \mapsto 5x^3 - 3 + \sqrt{-x^2 + 2}$

(4) $f : x \mapsto \cos^4 x$

(5) $f : x \mapsto \tan(x^2 - 4)$

(6) $f : x \mapsto 2\sin^2 x + x^2$

(7) $f : x \mapsto 2\cos(1 - 2x)^2$

(8) $f : x \mapsto \sin(1 - 5x)$

(9) $f : x \mapsto 2\sin^2 x$

(10) $f : x \mapsto 1 + \tan^2 x$

(11) $f : x \mapsto \cos^3(4 - x^3)$

2.3. Dérivée de la réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

Étude graphique

■ Étude préliminaire : droites symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$

• Caractérisation analytique de $S_{(\Delta)}$

$M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ sont des points.

$$M' = S_{(\Delta)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

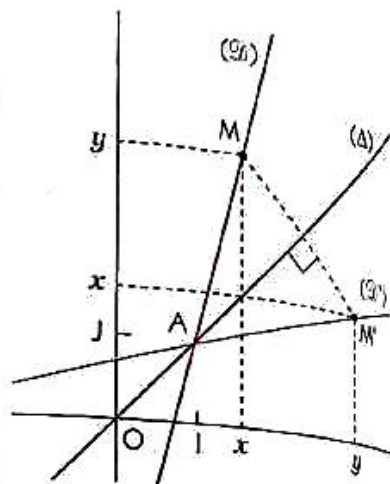
• Relation entre les coefficients directeurs de deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ symétriques par rapport à (Δ)

La caractérisation de la symétrie $S_{(\Delta)}$ permet d'obtenir une équation de $(\mathcal{D}')$, image de $(\mathcal{D})$ par $S_{(\Delta)}$.

$(\mathcal{D})$ est la droite d'équation : $y = ax + b$, $[a \neq 0]$.

$(\mathcal{D}')$ est la droite d'équation : $x' = ay' + b$ c'est-à-dire $y' = \frac{1}{a}x' - \frac{b}{a}$.

Δ étant la droite d'équation $y = x$, deux droites distinctes de (OI) et (OJ) symétriques par rapport à (Δ) ont des coefficients directeurs inverses l'un de l'autre.



Exemple

On donne la fonction de $[0; \frac{\pi}{2}]$ vers $[0; 1]$ définie par : $f(x) = \sin x$

f est une bijection car elle est continue strictement croissante et $[0; 1] = [\sin 0; \sin \frac{\pi}{2}]$.

On veut déterminer graphiquement le nombre dérivé $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{2})$, f^{-1} étant la bijection réciproque de f .

On a : $\frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont les représentations graphiques respectives de f et f^{-1} .

(T_A) est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point $A(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$

(T_B) est la tangente à $(\mathcal{C}')$ au point $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{3})$.

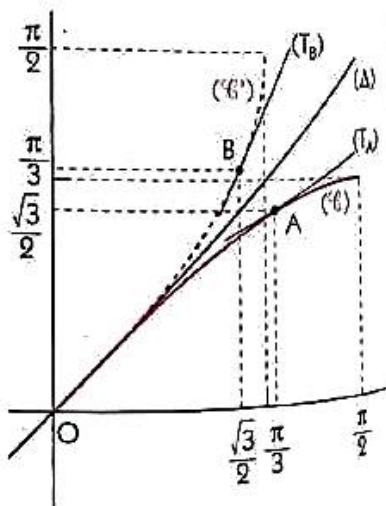
Les points A et B sont symétriques par rapport à (Δ)

donc (T_A) et (T_B) sont symétriques par rapport à (Δ) ,

elles ont des coefficients directeurs inverses l'un de l'autre :

– coefficient directeur de $(T_A) = f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

– coefficient directeur de $(T_B) = (f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = 2$.



Étude algébrique

Exemple 1

f est une application bijective, dérivable et strictement monotone sur un intervalle K .
On veut calculer le nombre dérivé $(f^{-1})'(\alpha)$, où α est un élément de $f(K)$.

Soit x un élément de l'intervalle K tel que :

$$f'(x) \neq 0.$$

On sait que :

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

par suite :

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = 1$$

La dérivation d'une composée de fonction donne : $(f^{-1})'(f(x)) \times f'(x) = 1$

d'où :

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Cette étude algébrique donne une méthode de détermination de la dérivée de f^{-1} , réciproque d'une bijection f dérivable et strictement monotone sur un intervalle K .

M Pour calculer le nombre dérivé en α de f^{-1} , réciproque d'une fonction f dérivable et strictement monotone sur un intervalle K , on peut procéder comme suit :

• on pose : $f^{-1}(\alpha) = \beta$

• on écrit : $f^{-1}(\alpha) = \beta \Leftrightarrow \alpha = f(\beta)$

• on calcule : $f'(\beta)$

• on vérifie que : $f'(\beta) \neq 0$

• on conclut : $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{f'(\beta)}$

Exemple 2

On donne un nombre entier naturel non nul n .

Déterminons la dérivée de l'application réciproque de l'application bijective $f:]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$
 $x \mapsto x^n$

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto x^n$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

f est dérivable et pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = nx^{n-1} \text{ et } f'(x) \neq 0.$$

f^{-1} est dérivable et pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exemple 3

On donne un nombre rationnel r . (On sait qu'il existe p et q tels que : $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $r = \frac{p}{q}$.)

Déterminons la dérivée de l'application bijective $g:]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$
 $x \mapsto x^r$

Soit x un élément de $]0; +\infty[$;

on a : $g(x) = x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ [$p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$].

g est donc la composée de la fonction $u: x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ suivie de la fonction $v: x \mapsto x^p$

d'où : $g'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$

$$= \left(\frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}\right) \times p \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = r x^{r-1}.$$

Exercices

2.d Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .
Démontrer que la fonction f de $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

est une bijection.

Sans expliciter sa bijection réciproque f^{-1} , calculer $(f^{-1})'(1)$.

2.e Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

Démontrer que la fonction f de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ vers

$[-1; 1]$ définie par : $f(x) = \cos x$, est une bijection. On désigne par f^{-1} sa bijection réciproque. Représenter graphiquement les applications f et f^{-1} sur le même dessin.

Calculer le nombre dérivé de f^{-1} en $\frac{1}{2}$.

2.4. Tableau récapitulatif

① Dérivées des fonctions élémentaires

Fonction f	Fonction f'	f est dérivable sur l'intervalle
$x \mapsto c \ [c \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax \ [a \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r \ [r \in \mathbb{Q}^*]$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^r} \ [r \in \mathbb{Q}^*]$	$x \mapsto \frac{-r}{x^{r+1}}$	$] -\infty ; 0[\text{ ou }] 0 ; +\infty [$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty [$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k ; \frac{\pi}{2} + k[\ [k \in \mathbb{Z}]$
$x \mapsto \cotan x$	$x \mapsto \frac{-1}{\sin^2 x}$	$] k\pi ; \pi + k\pi[\ [k \in \mathbb{Z}]$

② Opérations

Fonction	$u + v$	au	$u \times v$	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée sur K	$u' + v'$	au'	$u' \times v + u \times v'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Conditions		$a \in \mathbb{R}$		$v(x) \neq 0$	$v(x) \neq 0$

③ Compositions

Fonction	$v \circ u$	u^r	$\sqrt{u}$	$\cos u$	$\sin u$
Dérivée sur K	$u' \times v' \circ u$	$ru'u^{r-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$-u'\sin u$	$u'\cos u$
Conditions		$r \in \mathbb{Q}^*$	$u(x) > 0$		

2.5. Application de la dérivée

Dérivée et sens de variation des fonctions – Tableaux récapitulatifs

① Variations d'une fonction

f est une fonction dérivable sur un intervalle K .

- Si f' est strictement positive (sauf en des éléments isolés où elle s'annule), alors f est strictement croissante.
- Si f' est strictement négative (sauf en des éléments isolés où elle s'annule), alors f est strictement décroissante.
- Si f' est nulle, alors f est constante.

② Extremums d'une fonction

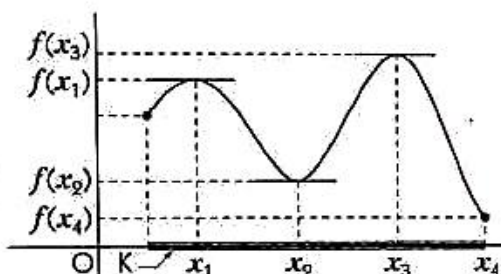
f est une fonction dérivable sur un intervalle K contenant x_0 .

$f(x_0)$ est un extremum relatif de la fonction f
si et seulement si

f' s'annule en x_0 en changeant de signe.

Si f admet un extremum relatif en x_0 ,

alors $f'(x_0) = 0$.

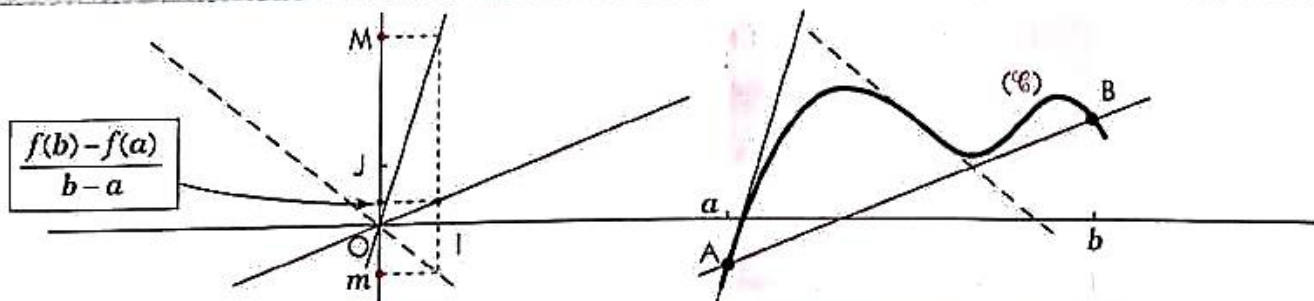


$f(x_1), f(x_2)$ et $f(x_3)$ sont des extremums relatifs de f ,
 $f(x_1)$ et $f(x_3)$ sont des maximums relatifs de f ,
 $f(x_2)$ est un minimum relatif de f ,
 $f(x_4)$ est le minimum de f ,
 $f(x_3)$ est le maximum de f .

Dérivée et encadrements

■ Activité

Le plan est muni du repère (O, I, J) . On donne une fonction f définie sur $[a; b]$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f sur $[a; b]$, A et B les points de $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives a et b . À l'aide du graphique, on veut comparer le coefficient directeur de la droite (AB) avec les coefficients directeurs extrêmes des tangentes à $(\mathcal{C})$.



À l'aide d'une règle qui matérialise la position des tangentes à la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f sur $[a; b]$, on peut déterminer approximativement les tangentes à $(\mathcal{C})$ dont les coefficients directeurs sont extrêmes, m et M .

On constatera alors que le coefficient directeur de la sécante (AB) est compris entre ces deux extrêmes :

$$m < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < M$$

■ Point de vue cinématique

La vitesse moyenne entre t_1 et t_2 d'un point mobile est comprise entre les vitesses instantanées extrêmes.

■ Inégalités des accroissements finis

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K , a et b deux éléments de K tels que $a < b$.
S'il existe des nombres M et m tels que : pour tout x élément de $[a ; b]$, $m \leq f'(x) \leq M$,
alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Démonstration

– Considérons la fonction g définie sur $[a ; b]$ par : $g(x) = f(x) - mx$.

g est dérivable sur K et : pour tout x élément de K , $g'(x) = f'(x) - m \geq 0$

donc :

g est croissante sur K ,

$g(a) < g(b)$ (car $a < b$).

Par conséquent :

$f(a) - ma \leq f(b) - mb$

$m(b-a) \leq f(b) - f(a)$.

– En utilisant les variations de la fonction h définie sur $[a ; b]$ par : $h(x) = f(x) - Mx$,
on établit que : $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

– Dans le cas particulier où $m = -M$,

on vérifie que : $-M(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

c'est-à-dire :

$|f(a) - f(b)| \leq M|a - b|$.

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K .

S'il existe un nombre réel M tel que : pour tout x de K , $|f'(x)| \leq M$,

alors, pour tous éléments a et b de K , $|f(a) - f(b)| \leq M|a - b|$.

■ Exemple de recherche d'encadrements

Démontrons que : pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$.

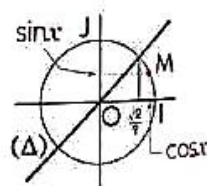
La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction cosinus

or : pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1$

Soit u un élément de $[0 ; \frac{\pi}{4}]$. L'inégalité des accroissements finis appliquée

à la fonction cosinus sur $[0 ; u]$ donne : $\frac{\sqrt{2}}{2}(u-0) \leq \sin u - \sin 0 \leq u$

donc : pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$.



Exercices

2.f Pour tout x élément de $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, appliquer les inégalités des accroissements finis à la fonction cosinus sur l'intervalle $[0 ; x]$.

En déduire que :

$$1 - x^2 \leq \cos x \leq 1.$$

2.g En utilisant les inégalités des accroissements finis, démontrer que :
pour tout nombre réel x positif, $-x \leq \sin x \leq x$.

2.h Démontrer que :
pour tout x de $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, $\tan x \geq x$.

3

Primitives

3.1. Notion de primitive

Définition

■ Position du problème

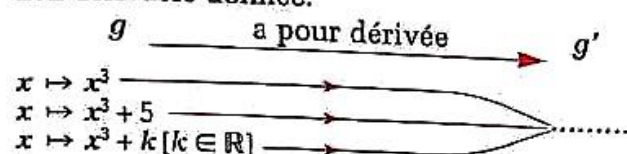
• Étant donné une fonction f dérivable sur un intervalle K , on sait déterminer sa dérivée f' .
L'opération qui à toute fonction associe sa dérivée est la **dérivation**.

• Inversement, étant donné une fonction f définie sur un intervalle K , peut-on déterminer une fonction F telle que f est la dérivée de F ? Quelles sont les conditions d'existence d'une telle fonction F ? Existe-t-il d'autres fonctions vérifiant la même propriété que F ?

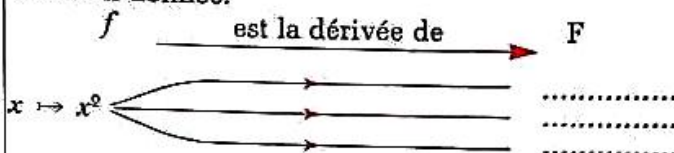
■ Dérivée et primitives

On donne la fonction cube g . C'est une fonction dérivable. Déterminer sa dérivée.
On donne la fonction carrée f . Peut-on déterminer une fonction F dérivable sur un intervalle K et ayant pour dérivée f ? Peut-on déterminer une autre fonction vérifiant la même condition que F ?

Dérivation
ou détermination de la fonction dérivée d'une fonction dérivable donnée.



« Anti-dérivation »
ou recherche d'une fonction ayant pour dérivée une fonction donnée.



On dit que F est une **primitive** sur $\mathbb{R}$ de f .

f définie sur K est la dérivée de $F \Leftrightarrow F$ est une primitive sur K de f .

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle K .

On appelle **primitive** sur K de f toute fonction F dérivable sur K telle que f est la dérivée de F .

■ Condition d'existence d'une primitive

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle K admet une primitive sur K .

Les primitives d'une même fonction

Propriété

- Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle K , alors, pour tout nombre réel c , la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive sur K de f .
- Toute primitive sur K de f est de cette forme.

Démonstration

– Soit F une primitive sur K de f . Donc F est dérivable sur K et, pour tout x élément de K , $F'(x) = f(x)$.
Soit k un nombre réel, désignons par G la fonction définie par : $G(x) = F(x) + k$.
 G est donc une primitive sur K de f car G est dérivable sur K et $G' = F' = f$.

– Soit H une primitive sur K de f . La fonction $(H - F)$ est dérivable sur K et $(H - F)'$ est la fonction nulle.
La fonction $(H - F)$ est donc une fonction constante sur K et pour tout élément x de K , $(H - F)(x) = k [k \in \mathbb{R}]$.
D'où H est définie par : $H(x) = F(x) + k [k \in \mathbb{R}]$.

Exemples

- Les primitives de la fonction $x \mapsto \cos x$ sont les fonctions $x \mapsto \sin x + k$ [$k \in \mathbb{R}$].
- Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions $x \mapsto 2\sqrt{x} + k$ [$k \in \mathbb{R}$].

La primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle K , x_0 un nombre réel de K et y_0 un nombre réel. Il existe une et une seule primitive de la fonction f sur l'intervalle K qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Démonstration

f étant continue sur K , elle admet une primitive G sur K .

Toutes les autres primitives sont de la forme $G + k$.

On cherche les valeurs de k pour que : $(G + k)(x_0) = G(x_0) + k = y_0$.

La primitive cherchée est donc la fonction F , définie sur K par : $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

Exemple

La primitive de la fonction sinus qui prend la valeur $\sqrt{3}$ en 0 est de la forme : $x \mapsto -\cos x + k$ [$k \in \mathbb{R}$]. Elle vérifie : $F(0) = -\cos 0 + k = \sqrt{3}$.

On a donc : $F : x \mapsto -\cos x + 1 + \sqrt{3}$.

Représentation graphique des primitives d'une fonction

– Le plan est muni du repère (O, I, J) . On désigne par

f la fonction affine définie par : $f(x) = x - 5$,

F la fonction polynôme définie par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$

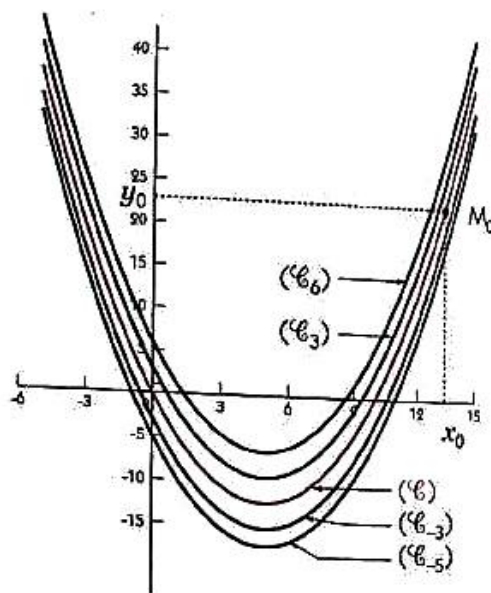
F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f ;

sa représentation graphique est la parabole $(\mathcal{C})$.

– Une autre primitive sur $\mathbb{R}$ de f est une fonction G_k définie par : $G_k(x) = F(x) + k$ [$k \in \mathbb{R}$].

Sa représentation graphique $(\mathcal{C}_k)$ se déduit donc de $(\mathcal{C})$ par la translation de vecteur $k\vec{OJ}$.

– À chaque valeur de k correspond une courbe $(\mathcal{C}_k)$. Une seule de ces courbes contient le point $M_0(x_0; y_0)$. C'est la représentation graphique de la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui prend la valeur y_0 en x_0 .



Exercices

3.a Dans chacun des cas suivants, F et f sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer que F est une primitive sur l'intervalle K de f .

(1) $F(x) = x^5 + 6x - 1999$

$f(x) = 5x^4 + 6$

$K = \mathbb{R}$

(2) $F(x) = x\sqrt{x} + 2$; $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$K = [0; +\infty[$

(3) $F(x) = x + \frac{1}{x^2}$; $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

$K = [0, +\infty[$

(4) $F(x) = x \cos x + 56$;
 $f(x) = \cos x - x \sin x$

$K = \mathbb{R}$

(5) $F(x) = \tan x - x$;
 $f(x) = \tan^2 x$

$K =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

3.b Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Déterminer la primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

(1) $f(x) = 5x^4 + 6$

$x_0 = 1, y_0 = 0$

(2) $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$x_0 = -1, y_0 = 1$

(3) $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

$x_0 = 2, y_0 = -1$

(4) $f(x) = x + 5$

$x_0 = -2, y_0 = \frac{2}{\sqrt{2}}$

(5) $f(x) = \sin x$

$x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = \frac{1}{2}$

3.2. Détermination d'une primitive

Recherche de primitives

Nous pouvons utiliser les propriétés qui se déduisent des opérations et des compositions des fonctions dérivables pour rechercher des primitives.

■ De la propriété de linéarisation de la dérivation, on déduit la propriété suivante :

Propriété

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle K , alors pour tous nombres réels α et β , la fonction $(\alpha F + \beta G)$ est une primitive sur K de la fonction $(\alpha f + \beta g)$.

Exemple

La fonction : $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + 1999$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto x^3 + 3x^2 - 5x + 2$.

■ De la technique de dérivation de la puissance n^{e} d'une fonction, on déduit les démarches suivantes :

f est une fonction dérivable sur un intervalle K , f' sa dérivée, n un nombre entier naturel non nul.

- f^2 est dérivable sur K et $(f^2)' = 2ff'$; donc $\frac{1}{2} f^2$ est une primitive sur K de ff' .
- f^{n+1} est dérivable sur K et $(f^{n+1})' = (n+1)f^n f'$; donc $\frac{1}{n+1} f^{n+1}$ est une primitive sur K de $f^n f'$.

Exemple 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin^2 x \cos x$.
 f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$; elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.
Déterminons une de ces primitives.

Désignons par u la fonction sinus. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $u'(x) = \cos x$
donc : $f = u^2 u'$,
or une primitive de $u^2 u'$ est $\frac{1}{3} u^3$;
donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x$.

f est une fonction dérivable sur un intervalle K qui ne s'annule pas sur K , f' sa dérivée, n un nombre entier naturel plus grand que 1.

- $\frac{1}{f}$ est dérivable sur K et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$; donc $-\frac{1}{f}$ est une primitive sur K de $\frac{f'}{f^2}$.
- $\frac{1}{f^{n-1}}$ est dérivable sur K et $\left(\frac{1}{f^{n-1}}\right)' = -\frac{(n-1)f'}{f^n}$; donc $-\frac{1}{(n-1)f^{n-1}}$ est une primitive sur K de $\frac{f'}{f^n}$.

Exemple 2

On donne la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{1}{(\frac{1}{3}x - 1)^4}$.

f est une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; elle admet donc des primitives sur $]-\infty; 3[$ et sur $]3; +\infty[$.
Déterminons une primitive sur $]3; +\infty[$ de f .

Désignons par u la fonction affine définie par : $u(x) = \frac{1}{3}x - 1$.

Elle est dérivable et ne s'annule pas sur $]3; +\infty[$ et : pour tout x élément de $]3; +\infty[$, $u'(x) = \frac{1}{3}$

donc : $f = 3 \frac{u'}{u^4}$

or une primitive de $\frac{u'}{u^4}$ est $-\frac{1}{3u^3}$;

donc une primitive sur $]3; +\infty[$ de f est la fonction : $x \mapsto \frac{-1}{\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3}$.

■ De la technique de dérivation de la racine carrée d'une fonction, on déduit la démarche suivante :
 f est une fonction dérivable sur un intervalle K , de dérivée f' strictement positive sur K .

• $\sqrt{f}$ est dérivable sur K et $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$; donc $2\sqrt{f}$ est une primitive sur K de $\frac{f'}{\sqrt{f}}$.

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$.

f est une fonction continue sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$; elle admet donc des primitives sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Déterminons une de ces primitives.

Désignons par u la fonction définie par : $u(x) = 2x - 1$;

u est dérivable, strictement positive sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ et, pour tout x élément de $]\frac{1}{2}; +\infty[$, $u'(x) = 2$

donc : $f = \frac{5u'}{2\sqrt{u}}$

or une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $\sqrt{u}$;

donc une primitive de f sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ est la fonction : $x \mapsto 5\sqrt{2x-1}$.

■ Plus généralement, de la dérivation d'une fonction composée, on en déduit la démarche suivante :
 f est une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur un intervalle L tel que $f(K)$ soit inclus dans L , f' la dérivée de f sur K et g' la dérivée de g sur L .

• $g \circ f$ est dérivable sur K et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$; donc $g \circ f$ est une primitive sur K de $(g' \circ f) \times f'$.

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$.

f est une fonction continue, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

Déterminons une de ces primitives.

• Désignons par u la fonction affine $x \mapsto 2x - \frac{\pi}{3}$ et par v la fonction sinus

donc : $f = -\frac{1}{2} u' \times (v \circ u)$

or une primitive sur $\mathbb{R}$ de $u' \times (v \circ u)$ est $(v \circ u)$;

donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

• Ici on aurait pu utiliser la méthode suivante :

– on vérifie qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est de la forme : $x \mapsto a \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + b$ [$b \in \mathbb{R}$] ;

– on peut alors déterminer la constante a .

En effet, on a : pour tout nombre réel x , $(a \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + b)' = 2a \cos(2x - \frac{\pi}{3})$, d'où : $a = \frac{1}{2}$.

Remarques

– Cette méthode de recherche d'une primitive peut être utilisée lorsque l'on connaît la forme de cette primitive.

– Lorsqu'une primitive est déterminée, il est conseillé de procéder à une vérification en déterminant sa dérivée.

Tableau récapitulatif

① Primitives des fonctions élémentaires

Fonction f	Une primitive de f	sur l'intervalle
$x \mapsto a \quad [a \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r \quad [r \in \mathbb{Q}]$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^r} \quad [r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}]$	$x \mapsto \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}}$	$] -\infty ; 0[\text{ ou }]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$	$] -\frac{\pi}{2} + k ; \frac{\pi}{2} + k[, [k \in \mathbb{Z}]$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\cotan x$	$]k\pi ; \pi + k\pi[, [k \in \mathbb{Z}]$

② Opérations et compositions

Fonction f	au'	$u' + v'$	$u' \times u'$	$\frac{u'}{u'}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u' \cos u$	$u' \sin u$
Une primitive sur l'intervalle K	au	$u + v$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	$2\sqrt{u}$	$\sin u$	$-\cos u$
Conditions	$a \in \mathbb{R}^*$		$r \in \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$ u ne s'annule pas sur K	u est strictement positive sur K		

Détermination pratique des primitives

■ Utilisation directe des tableaux

Exemples

On donne la fonction

$$f: x \mapsto x^3 + 3x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}$$

Déterminons une primitive F sur $\mathbb{R}_*^+$ de f .

f est égale à la somme de quatre fonctions.

Déterminons les primitives de chacune de ces fonctions ; on a ainsi une primitive de f

$$F: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{x} + k \quad [k \in \mathbb{R}].$$

On donne la fonction

$$f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Déterminons une primitive F sur $\mathbb{R}$ de f .

u est la fonction polynôme définie par : $u(x) = 1 + x^2$,

on constate que : $f = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = (\sqrt{u})'$,

$$F: x \mapsto \sqrt{1+x^2} + k \quad [k \in \mathbb{R}].$$

■ Linéarisation ou transformation des fonctions trigonométriques

On donne la fonction

$$f: x \mapsto \sin^3 x \times \cos^2 x.$$

Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .

Soit x un nombre réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^3 x \times \cos^2 x = \sin x \times \sin^2 x \times \cos^2 x \\ &= \sin x \times (1 - \cos^2 x) \times \cos^2 x \\ &= \sin x \times \cos^2 x - \sin x \times \cos^4 x \end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est donc la fonction :

$$x \mapsto -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + k \quad [k \in \mathbb{R}].$$

On donne la fonction

$$f: x \mapsto \sin x \times \cos 2x.$$

Déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .

Soit x un nombre réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \times \cos 2x = \frac{1}{2} [\sin(x+2x) + \sin(x-2x)] \\ &= \frac{1}{2} [\sin 3x - \sin x] \end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est donc la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 3x}{3} + \cos x \right] + k \quad [k \in \mathbb{R}].$$

■ Décomposition des fractions rationnelles

On donne la fonction

$$f: x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3(x+1)^2}.$$

Déterminons une primitive sur $]0; +\infty[$ de f .

Décomposons $f(x)$ sous la forme $\frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= \frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2} \\ &= \frac{a(x+1)^2 + bx^3}{x^3(x+1)^2} \\ &= \frac{bx^3 + ax^2 + 2ax + a}{x^3(x+1)^2} \end{aligned}$$

d'où : $b = 1$; $a = 1$.

donc, pour tout x élément de $]0; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Une primitive sur $]0; +\infty[$ de f est donc la fonction :

$$x \mapsto -\frac{1}{2x^2} + \frac{-1}{x+1} + k \quad [k \in \mathbb{R}].$$

On donne la fonction

$$f: x \mapsto \frac{x^4 - 3x + 3}{x^4(x-1)}.$$

Déterminons une primitive sur $]1; +\infty[$ de f .

Décomposons $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 - 3x + 3}{x^4(x-1)} \\ &= \frac{x^4 - 3(x-1)}{x^4(x-1)} \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^4} \end{aligned}$$

donc, pour tout x élément de $]1; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^4}$$

À ce stade de notre étude, nous ne connaissons pas de primitive à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$.

Pour cela nous attendrons le chapitre 4 pour compléter cet exemple.

Exercices

3.c Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f et préciser le plus grand intervalle sur lequel elle est définie.

(1) $f: x \mapsto x^4 - 2x^3$

(2) $f: x \mapsto \frac{5}{x^2}$

(3) $f: x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2}$

(4) $f: x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

(5) $f: x \mapsto (x+2)^3$

(6) $f: x \mapsto x\sqrt{x^2 + 1}$

3.d Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive sur K de la fonction f prenant la valeur y_0 en x_0 .

(1) $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{(x-3)^2}$

$x_0 = 0$; $y_0 = -1$; $K =]-\infty; 3[$

(2) $f(x) = -3x + \frac{2}{x^2}$

$x_0 = 1$; $y_0 = 2$; $K =]0; +\infty[$

(3) $f(x) = x - 1 + \frac{5}{x^3}$

$x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $K =]0; +\infty[$

TP Démonstration par récurrence

Ce TP a pour objet d'introduire une nouvelle méthode de démonstration.

■ Exemple

n étant un nombre entier naturel, déterminons la dérivée n^{e} de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x-a} \quad [a \in \mathbb{R}]$$

• Détermination des dérivées $f', f'', f^{(3)}$

Soit x un élément de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$\text{On a : } f(x) = (x-a)^{-1} = \frac{1}{x-a}$$

$$f'(x) = -(x-a)^{-2} = \frac{-1}{(x-a)^2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)(x-a)^{-3} = \frac{(-1)^2 \times 1 \times 2}{(x-a)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)(x-a)^{-4} = \frac{(-1)^3 \times 1 \times 2 \times 3}{(x-a)^4}$$

En continuant ce calcul de proche en proche, il semble que :

$$\text{pour tout nombre entier naturel } n, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}. \quad (1)$$

On veut contrôler cette conjecture lorsque n prend les valeurs : 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; ...

Cependant, il n'est pas possible de contrôler cette conjecture en procédant à une infinité de calculs !

• Détermination de $f^{(n)}$

Pour démontrer que (1) est vraie, utilisons un raisonnement appelé **démonstration par récurrence**.

Soit x un élément de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, n étant un nombre entier naturel différent de 0.

$$\text{On considère} \quad P_n : f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

1^{re} étape : établissement de la condition initiale

On vérifie que P_1 est vraie

$$: f^{(1)}(x) = \frac{-1}{(x-a)^2}$$

2^e étape : démonstration d'un algorithme récurrent

– On suppose que :

$$\text{pour un nombre entier naturel, } P_k \text{ est vraie : } f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x-a)^{k+1}}.$$

$$\text{– On en déduit alors que } P_{k+1} \text{ est vraie : } f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{(x-a)^{k+2}}.$$

On conclut que (1) est vraie.

■ Principe de la démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence comporte deux étapes avant la conclusion.

Pour démontrer que : pour tout nombre entier naturel supérieur à n_0 , P_n ,
on peut procéder comme suit :

1^{re} étape : établissement de la condition initiale qui est « l'existence d'un héritage ».
On vérifie que : P_{n_0} est vraie.

2^e étape : démonstration d'un algorithme récurrent ; c'est « le principe d'un droit de succession »
On établit que : si pour un nombre entier naturel k supérieur à n_0 , P_k est vraie,
alors P_{k+1} est vraie.

Conclusion : pour tout nombre entier naturel n supérieur à n_0 , P_n .

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Dérivation

Dérivabilité en x_0

1 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$

par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+5x}-1}{x}$.

1. Démontrer que f admet un prolongement par continuité en 0.

2. Ce prolongement par continuité est-il dérivable en 0 ? Si oui, quel est son nombre dérivé en 0 ?

Tangente

2 a est un nombre réel et f_a est la fonction définie

par : $f_a(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + a}{x^2}$.

a) Déterminer les intervalles sur lesquels f_a est dérivable.

b) Calculer f'_a .

c) Déterminer a pour que la représentation graphique de f_a ait, en son point d'abscisse -1 , une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 0$.

Dérivabilité à gauche et à droite en x_0

3 Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité à gauche et la dérivabilité à droite en x_0 .

(1) $f(x) = |x^2 - 1|$ $x_0 = 1$

(2) $f(x) = \frac{x-2}{2-|x|}$ $x_0 = 0$

(3) $\begin{cases} \text{pour } x \in [0; 1], & f(x) = 5x^2 - 3 \\ \text{pour } x \in [1; 3], & f(x) = 3x - 1 \end{cases}$ $x_0 = 4$

(4) $\begin{cases} \text{pour } x \in [0; 1], & f(x) = 5x^2 - 3 \\ \text{pour } x \in [1; 3], & f(x) = 3x - 1 \end{cases}$ $x_0 = 4$

Tangente verticale

4 Dans chacun des cas suivants, $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de f .

Étudier l'existence de tangentes verticales au point M_0 d'abscisse x_0 à la courbe $(\mathcal{C})$.

(1) $f(x) = \sqrt{1-x}$ $x_0 = 1$

(2) $\begin{cases} \text{pour } x \in [0; +\infty], & f(x) = \sqrt{x} \\ \text{pour } x \in [-\infty; 0], & f(x) = \sqrt{-x} \end{cases}$ $x_0 = 0$

Dérivabilité sur un intervalle

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = |x(x-1)|$.

Étudier la dérivabilité de f .

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) , construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f et les tangentes (éventuellement la tangente à gauche et la tangente à droite) à $(\mathcal{C}_f)$ aux points O et I .

6 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$. Justifier que f est définie sur $[-1; 1]$ et étudier la dérivabilité de f sur $[-1; 1]$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . Préciser les tangentes (éventuellement la tangente à gauche et la tangente à droite) aux points de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisses : -1 ; 1 ; $-\frac{1}{2}$; 0 .

Fonction dérivée

Détermination de la dérivée

7 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé son ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivable.

(1) $f: x \mapsto \frac{2x^2 + 5x - 12}{7x - 1}$ (2) $f: x \mapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

(3) $f: x \mapsto \frac{1}{(3x-8)^3}$ (4) $f: x \mapsto \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé son ensemble de définition et l'ensemble sur lequel elle est dérivable.

(1) $f: x \mapsto \sin x + \cos x$ (2) $f: x \mapsto \frac{x}{\sin x}$

(3) $f: x \mapsto \frac{\sin x - 1}{1 + \sin x}$ (4) $f: x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée, quand elle existe, de f sur l'intervalle K .

(1) $f: x \mapsto \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$ $K =]0; \frac{\pi}{6}[$

(2) $f: x \mapsto \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ $K =]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$

Dérivées successives

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer les trois premières dérivées de la fonction f .

(1) $f: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ (2) $f: x \mapsto 2x^5 - 4x^3 + 2$

(3) $f: x \mapsto \frac{2x+5}{x+1}$ (4) $f: x \mapsto \frac{4x-5}{3x-1}$

11 Dans chacun des cas suivants, déterminer les deux premières dérivées de la fonction f .

(1) $f: x \mapsto \sin x$ (2) $f: x \mapsto \cos x$

(3) $f: x \mapsto x\sqrt{x}$ (4) $f: x \mapsto \cos 2x$

Dérivée d'une fonction composée

12 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f .

(1) $f: x \mapsto \sin(x-x^2)$ (2) $f: x \mapsto \cos(x^2+3x)$

(3) $f: x \mapsto \sin(3x - \frac{\pi}{4})$ (4) $f: x \mapsto \cos^2(3x + \frac{\pi}{4})$

(5) $f: x \mapsto \sqrt{3x^4+7}$ (6) $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$$(7) f: x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$(8) f: x \mapsto \sqrt{\frac{1+x^2}{x}}$$

$$(9) f: x \mapsto \sqrt{\sin x}$$

$$(10) f: x \mapsto \sqrt{1 - \sin x}$$

$$(11) f: x \mapsto \sqrt{\cos^2 x - 1}$$

$$(12) f: x \mapsto \frac{2\cos x + 1}{\sqrt{\cos x - 1}}$$

Dérivée de fonctions réciproques

13 On considère la fonction

$$f:]0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow]1; +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sin x}$$

Démontrer que f est une bijection.

Calculer le nombre dérivé en $\frac{2}{3}$ de la fonction réciproque f^{-1} .

14 On considère la fonction

$$f: [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0; 1]$$

$$x \mapsto \cos x$$

Démontrer que f est une bijection.

Calculer le nombre dérivé en $\frac{\sqrt{3}}{2}$ de la fonction réciproque f^{-1} .

Construire la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f^{-1} et la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sens de variation d'une fonction

15 Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la fonction f puis préciser ses extremums.

$$(1) f: x \mapsto x^3 - 3x + 2$$

$$(2) f: x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(3) f: x \mapsto \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$$

$$(4) f: x \mapsto x - 1 + \frac{1}{x + 1}$$

Dérivée et inégalité

16 Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, appliquer les inégalités des accroissements finis à la fonction sinus sur $[0; x]$. En déduire que : pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0,85 < \sin x < x$.

Primitives

Détermination d'une primitive

17 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

$$(1) f(x) = x^3 + x^2 + 3$$

$$(2) f(x) = (2x - 1)^3$$

$$(3) f(x) = (-2x + 3)(x - 1)$$

$$(4) f(x) = x^4 + x^2 - 1$$

$$(5) f(x) = 5(2x + 1)^{14}$$

$$(6) f(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)^3$$

18 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur l'intervalle K de la fonction f .

$$(1) f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$K =]0; +\infty[$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$$

$$K =]1; +\infty[$$

$$(3) f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^2}$$

$$K =]0; +\infty[$$

$$(4) f(x) = \frac{1 - x^2}{x^4}$$

$$K =]0; +\infty[$$

$$(5) f(x) = \frac{1}{(2x + 1)^2}$$

$$K =]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

19 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur l'intervalle K de la fonction f .

$$(1) f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}$$

$$K =]0; +\infty[$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

$$K =]1; +\infty[$$

$$(3) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$K =]0; +\infty[$$

$$(2) f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$K =]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

20 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f , sur l'intervalle K .

$$(1) f(x) = \sin x \cos^3 x$$

$$K = \mathbb{R}$$

$$(2) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$$

$$K =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

$$(3) f(x) = \sin^3 x \cos x$$

$$K = \mathbb{R}$$

$$(4) f(x) = \sin 2x \cos^2 2x$$

$$K = \mathbb{R}$$

21 Dans chacun des cas suivants, déterminer pour la fonction définie ci-dessous, la primitive sur l'intervalle K qui prend la valeur y_0 en x_0 .

$$(1) f(x) = (x - 1)^4$$

$$x_0 = 2; y_0 = 0; K = [0; +\infty[$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{(1 - x)^3}$$

$$x_0 = 0; y_0 = 0; K =]-\infty; 1[$$

22 Dans chacun des cas suivants, déterminer pour la fonction f définie ci-dessous, la primitive sur l'intervalle K qui prend la valeur y_0 en x_0 .

$$(1) f(x) = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$$

$$x_0 = y_0 = 1; K =]0; +\infty[$$

$$(2) f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$$

$$x_0 = y_0 = 1; K =]0; +\infty[$$

APPROFONDISSEMENT

Dérivée - Tangente

23 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$$

a et b étant deux nombres réels.

1. Déterminer a et b pour que la tangente (T) à la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de la fonction f , au point d'abscisse 0, ait pour équation : $y = 3x + 2$.

2. Préciser la position de (T) par rapport à $(\mathcal{C})$.

3. Étudier les variations de f .

24 1. Démontrer que les représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + 5$ et $x \mapsto \frac{2}{x}$ ont une tangente commune.

2. Déterminer une équation de cette tangente commune.

3. Combien y a-t-il de solutions ?

25 Déterminer, de deux manières, la dérivée de la fonction : $x \mapsto \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$.

26 Déterminer, de deux manières, la dérivée de la fonction : $x \mapsto \sin^6 x + \cos^6 x + 2\sin^3 x \cos^3 x$.

27 Dans chacun des cas suivants, déterminer m pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

- (1) $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; 1], f(x) = \frac{x-1}{x+2} \\ \text{pour } x \in [1; +\infty[, f(x) = m(x^2-1) \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; 0], f(x) = \frac{x-m}{x+1} \\ \text{pour } x \in [0; +\infty[, f(x) = x^3 + x^2 + x - m \end{cases}$

28 1. Démontrer que si une fonction dérivable est paire, sa fonction dérivée est impaire.
2. Donner un exemple.

29 Démontrer que chacune des fonctions suivantes ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- (1) $x \mapsto x - \sin x$ (2) $x \mapsto \frac{x^2}{2} + \cos x$

Dérivées successives

30 1. Déterminer la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction : $x \mapsto \sin x$. (On exprimera chacune des dérivées successives sous la forme d'un sinus.)
2. Même question pour la fonction : $x \mapsto \cos x$.

31 Déterminer la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction : $x \mapsto \sin^2 x$.

32 1. Déterminer les dérivées successives, quand elles existent, de la fonction rationnelle f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

2. On considère la fonction rationnelle g définie par :

$$g(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}.$$

Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

En déduire les dérivées successives de g , quand elles existent.

33 On considère la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x-1}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

Existe-t-il un autre point de $(\mathcal{C}_f)$ où la tangente est parallèle à (T) ?

2. $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle une tangente de coefficient directeur 0 ? 3 ?

3. Existe-t-il des points de $(\mathcal{C}_f)$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $11x + 4y - 1 = 0$?

Primitives

34 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{4 - (x-2)^2}{(x-2)^2}.$$

Transformer cette expression, puis déterminer une primitive de f sur un intervalle que l'on déterminera.

35 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}.$$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : pour tout nombre réel x différent de 1,

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}.$$

2. En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

3. Déterminer la primitive de f sur $]1; +\infty[$ prenant la valeur 8 en 3.

36 On donne une fonction f définie sur $[3; +\infty[$ par : $f(x) = (x-3)\sqrt{x-3}$.

1. Trouver l'ensemble sur lequel f est dérivable et déterminer la dérivée de f .

2. En déduire la primitive sur $]3; +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x-3}$ prenant la valeur 0 en 5.

37 1. Linéariser $\cos^4 x$.

2. Utiliser cette linéarisation pour déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \cos^4 x$.

38 1. Développer $(1 - \cos^2 x)^2$.

2. En remarquant que $\sin^5 x = \sin^4 x \sin x$, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \sin^5 x$.

3. Utiliser une méthode analogue pour déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \cos^5 x$.

PROBLÈMES

39 On donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 15\cos x + 6\cos 2x + \cos 3x.$$

1. Calculer la dérivée de f .

2. Vérifier que : $\sin 3x = \sin x (4\cos^2 x - 1)$.

Utiliser cette relation pour vérifier que :

$$f'(x) = -12\sin x (1 + \cos x)^2.$$

3. En déduire que $f(x) = 4(1 + \cos x)^3 + k$, k étant un nombre réel que l'on déterminera.

40 On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \sin(3x) \text{ et } g(x) = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

1. En utilisant les formules de trigonométrie, démontrer que $f = g$.

2. Déterminer f' et g' . En déduire une expression de $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

41 n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

1. Déterminer sa dérivée sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

2. Démontrer que pour tout nombre réel x différent de 1,

$$1, f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

3. En déduire une expression de :

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-1}.$$

Études de fonctions

Après la mise au point du concept fonction, la représentation graphique de celle-ci nécessitait au préalable des notations commodées.

C'est alors que, grand philosophe et mathématicien, René Descartes, auteur du Discours sur la méthode, a simplifié les notations algébriques, et Gottfried Leibniz les notations du calcul différentiel.

Un grand nombre de mathématiciens apportèrent leur contribution à l'étude des fonctions.

On peut citer Bernoulli, Leibniz...



© Photothèque HACHETTE

René Descartes
France – 1596-1650.



© Photothèque HACHETTE

Gottfried Wilhelm Leibniz
physicien et mathématicien
allemand – 1646-1716.

SOMMAIRE

- | | |
|---|----|
| 1. Quelques généralités sur les fonctions | 60 |
| 2. Exemples d'études de fonctions | 67 |

1

Quelques généralités sur les fonctions

1.1. Propriétés géométriques d'une représentation graphique

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

En classe de première, nous avons construit certaines représentations graphiques sans étude préalable de ces fonctions. Ce sont les courbes obtenues à partir de courbes connues, à l'aide d'une transformation du plan.

Pour réaliser ces constructions, on a utilisé les propriétés suivantes :

$(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction f .

La fonction g , dont la représentation graphique est l'image de $(\mathcal{C}_f)$

- par la symétrie orthogonale d'axe (OI) est définie par : $g(x) = -f(x)$;
- par la symétrie orthogonale d'axe (OJ) est définie par : $g(x) = f(-x)$;
- par la symétrie centrale de centre O est définie par : $g(x) = -f(-x)$;
- par la translation de vecteur $\vec{v}(\alpha; \beta)$ est définie par : $g(x) = f(x - \alpha) + \beta$.

Centre de symétrie

Activité

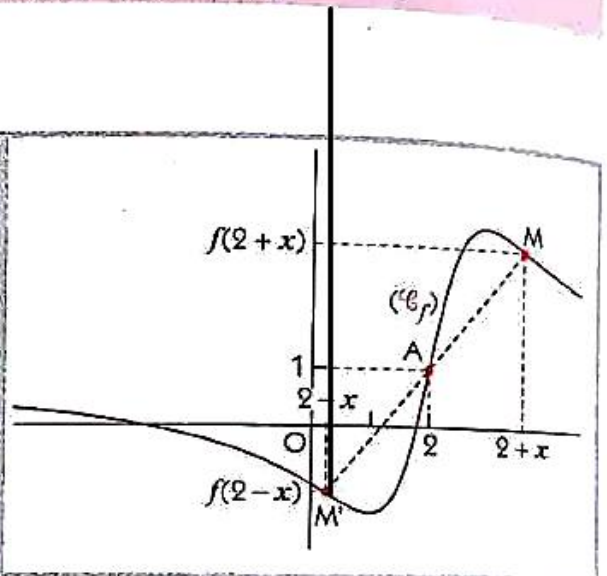
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - 4x + 5}$$

de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre.

On veut démontrer que le point $A(2; 1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$. Pour cela, on peut démontrer que la fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{AO}$ est impaire.

En observant le graphique ci-contre, trouver une autre méthode.

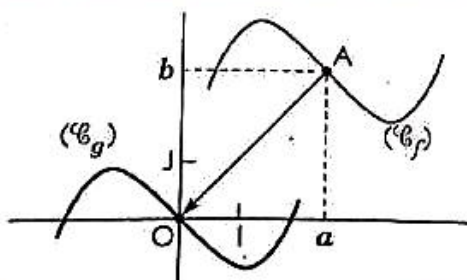


M

Le plan est muni du repère (O, I, J) . $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction f . Pour démontrer que le point $A(a; b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ on peut procéder comme suit :

1^{re} méthode

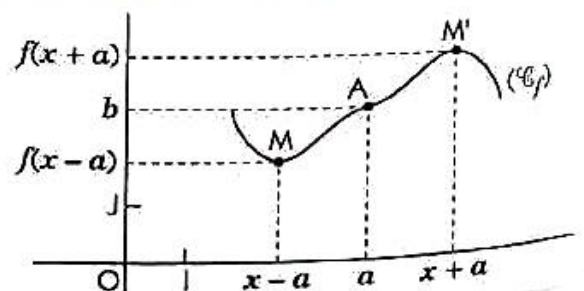
- on détermine la fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{AO}$, cette fonction g est définie par : $g(x) = f(x + a) - b$;
- on démontre que g est impaire.



2^e méthode

- on vérifie que l'ensemble de définition de f est centré en a , c'est-à-dire :
pour tout x élément de $\mathbb{R}$,
 $a - x \in D_f \Leftrightarrow a + x \in D_f$.
- on vérifie que :
pour tout nombre réel x tel que $a + x \in D_f$,

$$\frac{f(a + x) + f(a - x)}{2} = b.$$



Exemple

Démontrons que le point $A(2; 3)$ est un centre de symétrie de la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Première méthode

- La fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{AO}$ est définie par : $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ car $\vec{AO} \left(-2; -3 \right)$ et $g(x) = f(x - (-2)) + (-3)$.
 - g est une fonction impaire ;
- donc le point A est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Deuxième méthode

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
Soit x un nombre réel,
 $2 + x \in D_f \Leftrightarrow 2 - x \in D_f$
 $\Leftrightarrow 2 - x \neq 2$
 $\Leftrightarrow x \neq 0$
 - Pour $x \neq 0$, $\frac{f(2+x) + f(2-x)}{2} = 3$
- donc le point A est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Axe de symétrie

Activité

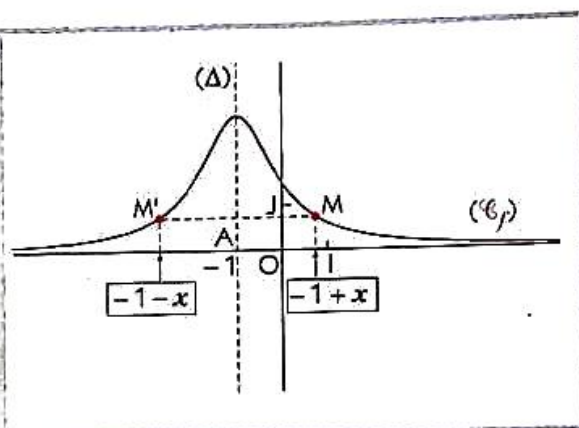
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x + 2}$$

de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre.

On veut démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$. Pour cela, on peut démontrer que la fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{AO}$ est paire, A étant le point de coordonnées $(-1; 0)$.

En observant le graphique ci-contre, trouver une autre méthode.



M

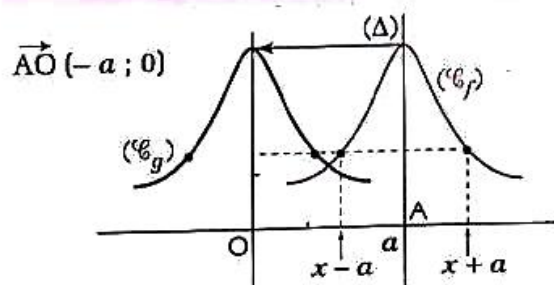
Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

$(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique d'une fonction f .

Pour démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ on peut procéder comme suit :

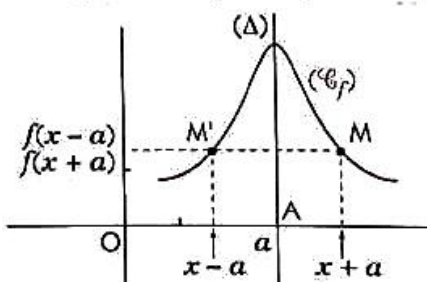
1^{re} méthode

- on détermine la fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{AO}$, A étant le point de coordonnée $(a; 0)$. Cette fonction g est définie par : $g(x) = f(x + a)$;
- on démontre que g est paire.



2^e méthode

- on vérifie que l'ensemble de définition de f est centré en a , c'est-à-dire :
pour tout x élément de $\mathbb{R}$,
 $a - x \in D_f \Leftrightarrow a + x \in D_f$;
- on vérifie que :
pour tout nombre réel x tel que $a + x \in D_f$,
 $f(a + x) = f(a - x)$.



■ Exemple

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . On considère la fonction polynôme f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 7$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique. Démontrons que la droite (Δ) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$.

Première méthode

A est le point de coordonnées $(2; 0)$.

- La fonction g dont la représentation graphique est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{AO}$ est définie par : $g(x) = x^2 + 3$, car $\vec{AO}(-2; 0)$ et $g(x) = f(x - (-2))$.
- g est une fonction paire ;
- donc la droite (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Deuxième méthode

- $D_f = \mathbb{R}$, donc D_f est centré en 2.
 - Pour tout nombre réel x , $f(x) = (x - 2)^2 + 3$
- Pour tout nombre réel x , $f(2 + x) = f(2 - x) = x^2 + 3$, donc la droite (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

■ Représentation graphique d'une fonction périodique

M

Pour reconnaître et étudier une fonction périodique de période T , on peut procéder comme suit :

- on vérifie que : pour tout x élément de D_f , $f(x + T) = f(x)$;
- on choisit un ensemble d'étude E tel que $E = D_f \cap K$, K étant un intervalle d'amplitude T ;
- on étudie les variations de la restriction de f à E et on construit sa représentation graphique $(\mathcal{C}_0)$;
- on obtient la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f en prenant les images de $(\mathcal{C}_0)$ par les translations de vecteurs $\vec{v}_k(kT; 0)$ [$k \in \mathbb{Z}$].

■ Exemple

Le plan est muni du repère (O, I, J) . $E(x)$ désigne la partie entière de x . On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x - E(x))^2$.

Démontrons que f est périodique de période 1 et construisons sa représentation graphique $(\mathcal{C})$.

Soit x un nombre réel.

Il existe un nombre entier relatif n tel que :

$$n \leq x < n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = E(x)$$

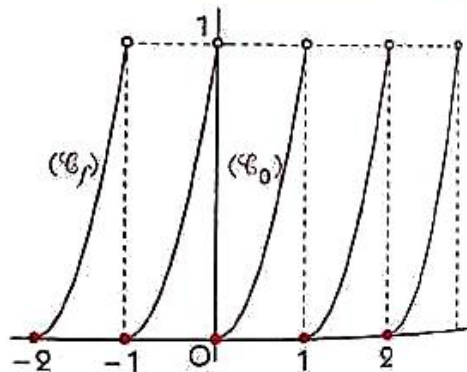
$$\text{donc : } n + 1 \leq x + 1 < n + 2 \quad \Leftrightarrow \quad E(x + 1) = E(x) + 1$$

$$\text{d'où : } f(x + 1) = [x + 1 - E(x + 1)]^2 = [x + 1 - E(x) - 1]^2 = f(x).$$

Désignons par $(\mathcal{C}_0)$ la représentation graphique de la restriction f_0 de f à l'intervalle $[0; 1]$.

f_0 est définie sur $[0; 1]$ par : $f_0(x) = x^2$.

On obtient la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f en prenant les images de $(\mathcal{C}_0)$ par les translations de vecteurs $k\vec{OI}$ [$k \in \mathbb{Z}$].



Exercices

- 1.a Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{5x + 7}{3x - 2}$.

Démontrer que le point A de coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{5}{3})$ est le centre de symétrie de la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f .

- 1.b Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . On considère la fonction polynôme f définie

par : $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Démontrer que la droite (D) d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f .

- 1.c Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \cos(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{2})$. Démontrer que f est périodique de période 3π .

1.2. Branches infinies d'une représentation graphique

Asymptotes

■ Tableau récapitulatif

Le plan est muni du repère (O, I, J) . $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique d'une fonction f .

La droite (D) d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C})$

si et seulement si

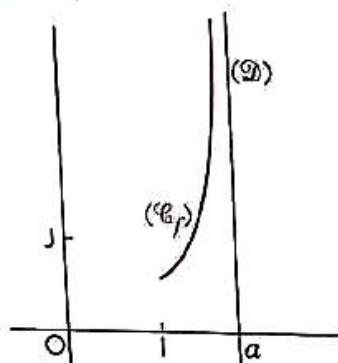
$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$$



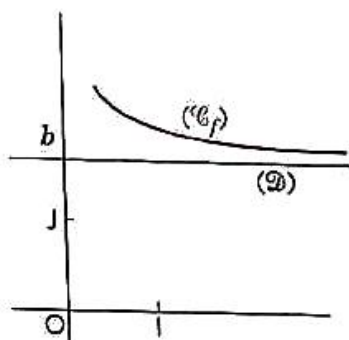
$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$$

La droite (D) d'équation $x = b$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$)

si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - b] = 0$$

$$\text{(resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - b] = 0 \text{)}$$



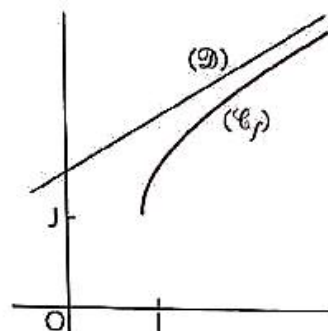
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

La droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$)

si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\text{(resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{)}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Remarque

L'équivalence logique suivante donne deux techniques qui permettent de reconnaître que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique en $+\infty$ de la représentation graphique de la fonction f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b.$$

■ Exemples

Démontrons que la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 3}$ d'ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 3$ et pour asymptote oblique la droite d'équation $y = x - 1$.

Asymptote verticale

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 3} |f(x)| = +\infty$$

Par conséquent, $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale, la droite d'équation : $x = 3$.

Asymptote oblique

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$$

$$\text{et : } f(x) - (x - 1) = \frac{2}{x - 3} ;$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0.$$

Par conséquent, $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, la droite d'équation : $y = x - 1$.

Démontrons que la représentation graphique (C) de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{4x^2 + 1} + 2x$ d'ensemble de définition $\mathbb{R}$, admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ et pour asymptote oblique la droite d'équation $y = 4x$.

Asymptote horizontale

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} = 0.$$

Par conséquent, (C) admet une asymptote horizontale en $-\infty$, la droite d'équation : $y = 0$.

Asymptote oblique

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) = +\infty$$

$$\text{et : } g(x) - 4x = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x}$$

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 4x] = 0.$$

Par conséquent, (C) admet une asymptote oblique en $+\infty$, la droite d'équation : $y = 4x$.

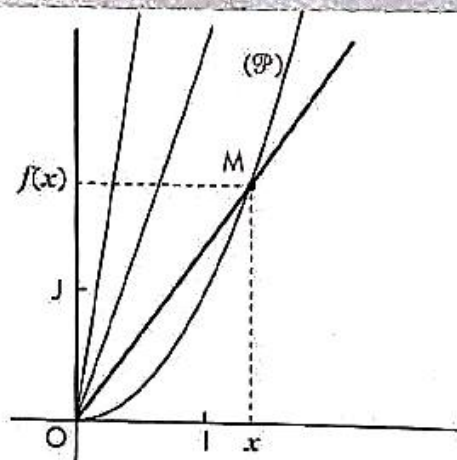
Branches paraboliques

Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Exemples de deux cas simples

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$

de représentation graphique l'arc de parabole (P) ci-dessous. M étant un point de (P) d'abscisse x non nul, déterminons la position limite de la droite (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.



Notons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Le coefficient directeur de la droite (OM) est $\frac{f(x)}{x}$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty;$$

donc : la position limite de la droite (OM) est (OJ).

On dit que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ).

Exemples d'une autre situation

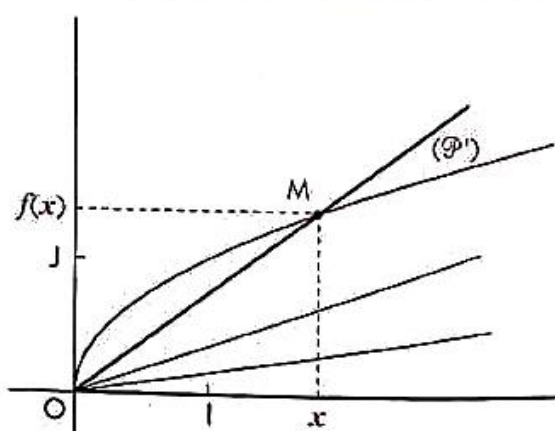
Considérons la fonction $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto \frac{1}{4}x + \sqrt{x}$$

de représentation graphique (C) ci-dessous. M étant un point de (C) d'abscisse x non nul, déterminons la position limite de la droite (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.
(C) admet-elle une asymptote oblique ?

Considérons la fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto \sqrt{x}$

de représentation graphique l'arc de parabole (P') ci-dessous. M étant un point de (P') d'abscisse x non nul, déterminons la position limite de la droite (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.



Notons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Le coefficient directeur de la droite (OM) est $\frac{f(x)}{x}$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0;$$

donc : la position limite de la droite (OM) est (OI).

On dit que (C) admet une branche parabolique de direction (OI).

Notons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

Le coefficient directeur de la droite (OM) est $\frac{f(x)}{x}$.

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{4}$;

La position limite de la droite (OM) est la droite (D) : $y = \frac{1}{4}x$.

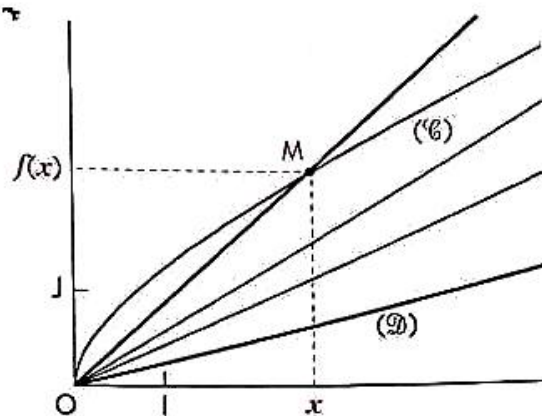
On admet que,

si (C) avait une asymptote oblique, celle-ci aurait pour coefficient directeur $\frac{1}{4}$, donc pour équation : $y = \frac{1}{4}x + b$.

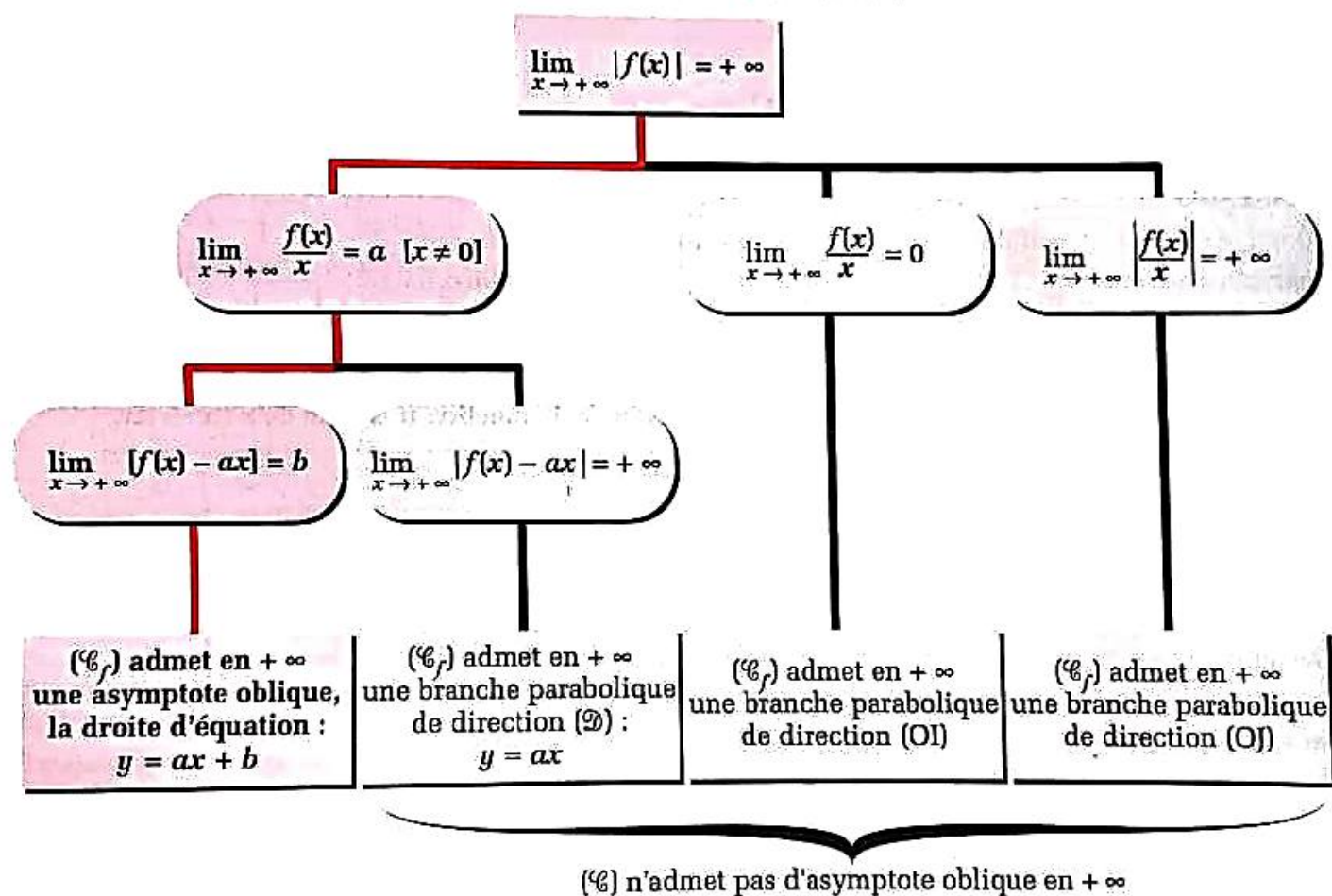
Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - (\frac{1}{4}x + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - b) = +\infty$.

donc (C) n'admet pas une asymptote oblique.

On dit que (C) admet une branche parabolique de direction (D) d'équation $y = \frac{1}{4}x$.



Organigramme d'étude d'une branche infinie



On obtient un organigramme similaire en $-\infty$.

Exercices

- 1.d Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{(x + 2)^2}$.

Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 4$ est une asymptote horizontale pour la représentation graphique (C) de f .

- 1.e Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$.

Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote pour la représentation graphique (C) de f . Par ailleurs (C) admet une asymptote verticale ; donner son équation.

1.3. Variations d'une composée de fonctions monotones

Propriétés

v est une fonction définie sur un intervalle L ;
 u une fonction définie sur un intervalle K et à valeurs dans L .

Si u et v sont strictement monotones et ont le même sens de variation,
 alors $v \circ u$ est strictement croissante sur K

Si u et v sont strictement monotones et ont des sens de variation différents,
 alors $v \circ u$ est strictement décroissante sur K

Cas particulier

u étant une fonction strictement monotone sur un intervalle K et α un nombre réel, la fonction αu est strictement monotone sur K . Plus précisément,

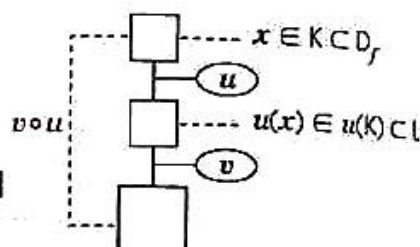
- si α est positif, alors αu et u ont le même sens de variation ;
- si α est négatif, alors αu et u ont des sens de variation différents.

Démonstration

- Supposons u strictement croissante sur L ;
 v strictement décroissante sur K et à valeurs dans L .

Soit x_1 et x_2 deux éléments de K tels que : $x_1 < x_2$

donc $u(x_1)$ et $u(x_2)$ sont deux éléments de L tels que : $u(x_1) < u(x_2)$
 par conséquent : $v[u(x_1)] > v[u(x_2)]$



- On examine de même tous les autres cas.
- On peut remarquer que la fonction αu est la composée de la fonction u suivie de $v : x \mapsto \alpha x$.

Exemple 1

Étudions les variations sur $[\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}]$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$.

Décomposons la fonction f en deux fonctions dont on connaît le sens de variation.

En effet, u étant la fonction linéaire définie par : $u(x) = 2x - \frac{\pi}{4}$,
 on a : $f = \sin \circ u$;

Des tableaux de variation de la fonction sinus et de la fonction u , on déduit celui de la fonction f .

Fonction u				Fonction sinus				Fonction f			
x	$-\infty$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$+\infty$	x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$2x - \frac{\pi}{4}$						$\sin x$					
		0	$\frac{\pi}{2}$	π			0	1	0		

Exemple 2

Fonction f				Fonction $-2f$				Fonction $5f$			
x	$-\infty$	α	$+\infty$	x	$-\infty$	α	$+\infty$	x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β		$-2f(x)$		-2β		$5f(x)$		5β	

2

Exemples d'études de fonctions

2.1. Plan d'étude d'une fonction

1 - Variations de f	2 - Représentation graphique ($\mathcal{C}_f$)	3 - Propriétés graphiques de f
Ensemble de définition Ensemble d'étude - parité - périodicité Limites Dérivée - détermination de f' - signe de f' Tableau de variation	Points et droites remarquables - asymptotes - tangentes Construction de ($\mathcal{C}_f$) - table de valeurs - esquisse de ($\mathcal{C}_f$) - choix de la fenêtre, du repère et des unités graphiques	Éléments de symétrie - axes de symétrie - centres de symétrie Branches paraboliques

■ Activités

f et g sont des fonctions rationnelles définies par leurs expressions explicites.
Étudier ces fonctions et contrôler les résultats obtenus avec ceux donnés ci-dessous.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{2x - 4}$$

Ensemble de définition

$$D_f = \mathbb{R}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	2	1		6	2

Asymptote

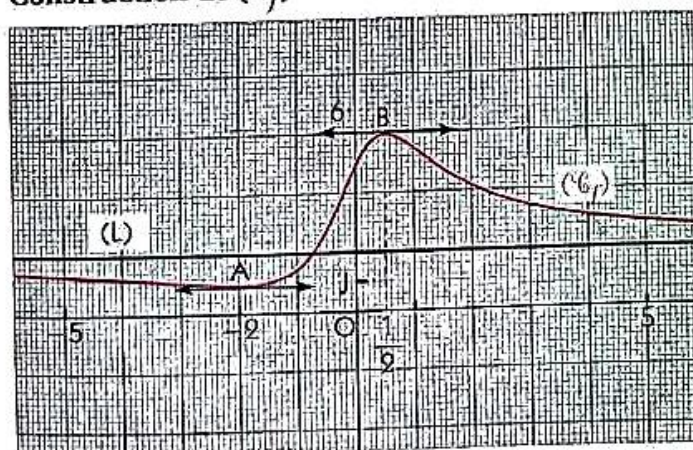
la droite : $y = 2$.

Tangentes horizontales

aux points A et B de ($\mathcal{C}_f$) d'abscisses respectives

-2 et $\frac{1}{2}$.

Construction de ($\mathcal{C}_f$)



Ensemble de définition

$$D_g =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Asymptotes

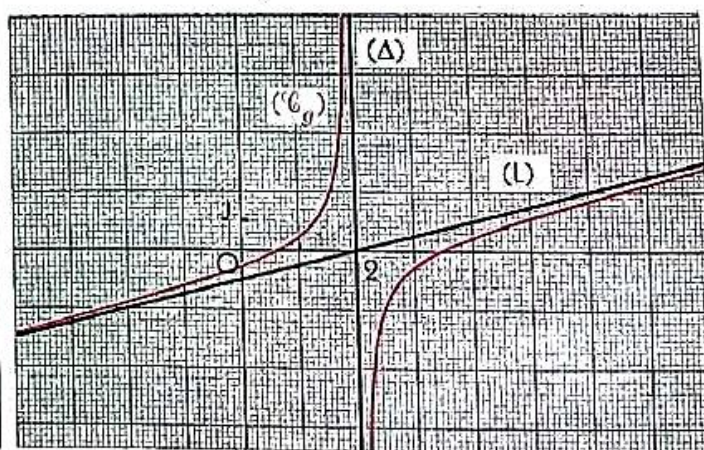
la droite (Δ) : $x = 2$;

la droite (L) : $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Centre de symétrie

O' le point d'intersection des asymptotes.

Construction de ($\mathcal{C}_g$)



2.2. Fonctions comportant des radicaux

Exemple

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$.

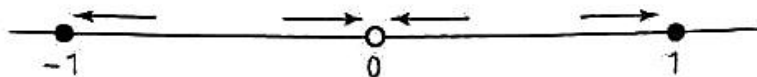
Variations de la fonction f

■ Ensemble de définition

Soit x un nombre réel.

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0$ et $x \neq 0$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	0	$-$



(1)

$$D_f =]-1; 0[\cup]0; 1[$$

■ Ensemble d'étude

D_f est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x de D_f , $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

(2)

La fonction f est impaire. On peut donc étudier f sur $]0; 1[$.

■ Limites

Pour tout x élément de D_f , $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1}{x}(1 + \sqrt{1-x^2})$.

Limite à droite en 0

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sqrt{1-x^2}) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

donc :

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} = +\infty$$

Limite en 1

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0$.

donc :

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

■ Dérivée

Dérivabilité en 1

Pour tout x élément de $]0; 1[$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} - 1}{x - 1} = \frac{-\frac{(x-1) + \sqrt{1-x^2}}{x}}{x - 1} = -\frac{1}{x} - \frac{1+x}{x\sqrt{1-x^2}}$

$$\text{Or : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1-x}{x\sqrt{1-x^2}} = -\infty \end{cases}$$

donc :

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$$

Par conséquent f n'est pas dérivable à gauche en 1.

Détermination de la dérivée

On a :

(6)

$$\text{pour tout } x \text{ élément de }]0; 1[, f'(x) = \frac{-1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

■ **Tableau de variation**
 Pour tout x élément de $]0 ; 1]$,
 $f'(x) \leq 0$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$		1

■ Représentation graphique

Le plan est muni du repère (O, I, J) . Désignons par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f .

■ Tangente et asymptote

L'étude du sens de variation de f sur $]0 ; 1]$ permet de déduire les résultats concernant les tangentes et les asymptotes sur $]0 ; 1]$.

Sur $]0 ; 1]$, $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente verticale au point $A(1 ; 1)$;

$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale, la droite (OJ) [d'après (2)].

■ Construction de $(\mathcal{C}_f)$

La fonction étant impaire, sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport au point O . Par conséquent, pour obtenir $(\mathcal{C}_f)$ on la construit sur $]0 ; 1]$ puis on procède par une symétrie par rapport à O .

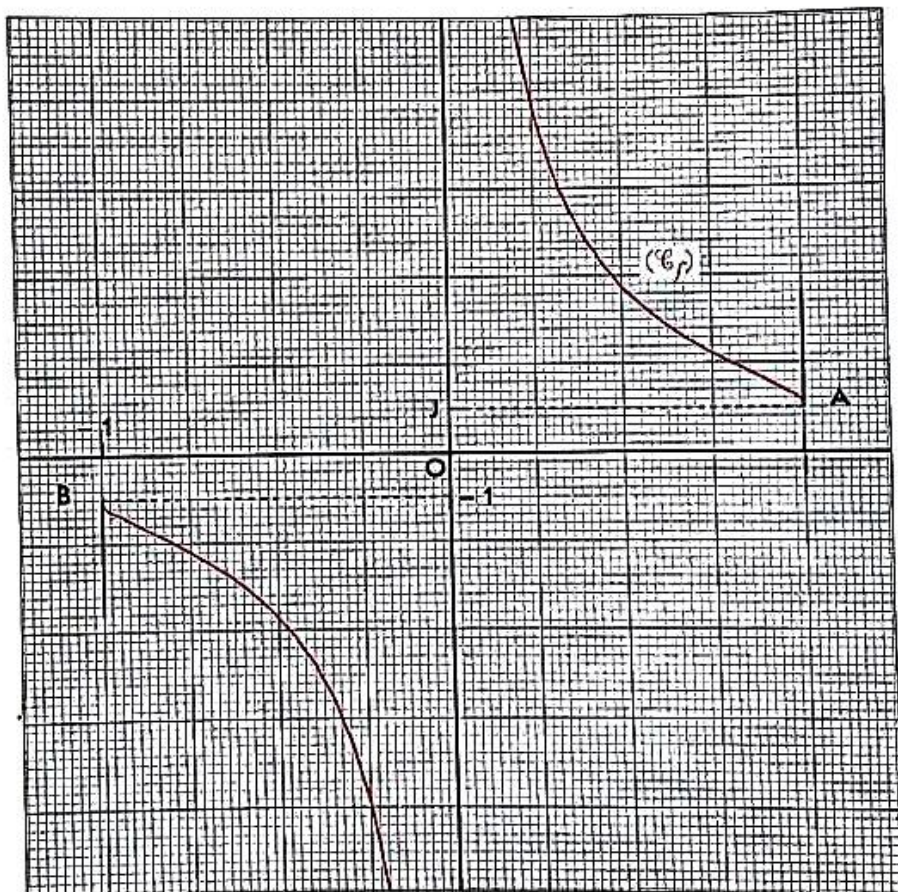
Tableau des valeurs approchées

x	$f(x)$
0,2	9,8
0,4	4,7
0,6	3
0,8	2
1	1

Fenêtre de construction

$x_{\min} = -1$; $y_{\min} = -10$

$x_{\max} = 1$; $y_{\max} = 10$



■ Propriétés graphiques

■ Centre de symétrie

O est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ [d'après (2)].

■ Tangentes verticales

$(\mathcal{C}_f)$ admet deux tangentes verticales en $A(1 ; 1)$ et en $B(-1 ; -1)$ [d'après (5)].

2.3. Fonctions comportant des fonctions trigonométriques

Exemple 1

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2 - \sin x}$.

Variations de la fonction f

■ Ensemble de définition

Soit x un nombre réel,

on a : $x \in D_f \Leftrightarrow 2 - \sin x \neq 0$.

Or : $-1 \leq -\sin x \leq 1$,

d'où : $1 \leq 2 - \sin x \leq 3$,

donc : $2 - \sin x \neq 0$.

par suite :

(1)

$$D_f = \mathbb{R}$$

■ Ensemble d'étude

On sait que la fonction sinus est périodique et de période 2π , vérifions qu'il en est de même pour f .

Pour tout nombre réel x , $f(x + 2\pi) = \frac{1}{2 - \sin(x + 2\pi)} = \frac{1}{2 - \sin x} = f(x)$.

(2)

La fonction f est périodique de période 2π . On peut donc étudier f sur $[0 ; 2\pi]$

■ Dérivée

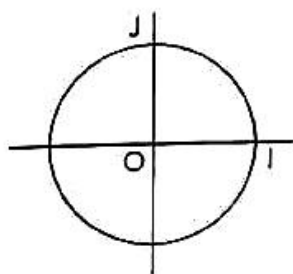
La fonction f est dérivable et, x étant un élément de D_f , $f'(x) = \frac{-(-\cos x)}{(2 - \sin x)^2}$.

d'où :

(3)

pour tout x élément de D_f , $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 - \sin x)^2}$

■ Tableau de variation



x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$	1	0	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Représentation graphique

Le plan est muni du repère (O, I, J) . Désignons par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f et par $(\mathcal{C}_0)$ la représentation graphique de la restriction de f à $[0 ; 2\pi]$.

■ Tangentes

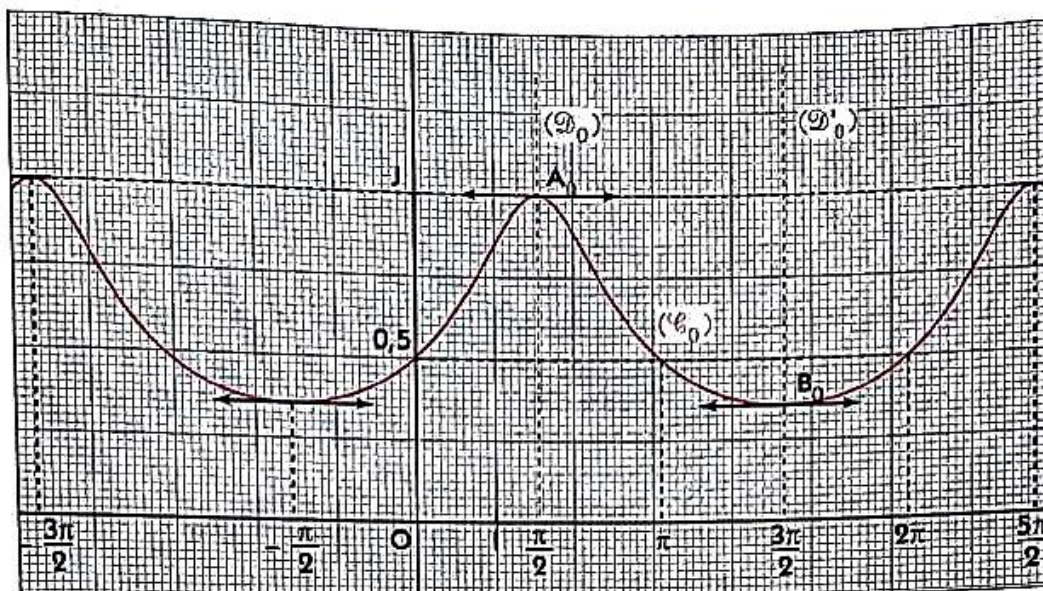
$(\mathcal{C}_0)$ admet deux tangentes horizontales aux points $A_0(\frac{\pi}{2}; 1)$ et $B_0(\frac{3\pi}{2}; \frac{1}{3})$ [d'après (3)].

$(\mathcal{C}_f)$ admet des tangentes horizontales aux points $A_k(\frac{\pi}{2} + k2\pi; 1)$ et $B_k(\frac{3\pi}{2} + k2\pi; \frac{1}{3})$ [$k \in \mathbb{Z}$].

■ Construction de $(\mathcal{C}_0)$ de $(\mathcal{C}_f)$

Tableau des valeurs approchées

x	$f(x)$
0	0,50
$\frac{\pi}{4}$	0,77
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0,50
$\frac{5\pi}{4}$	0,33
$\frac{3\pi}{2}$	0,36
2π	0,50



Fenêtre de construction

$$x_{\min} = -\frac{3\pi}{2} ; y_{\min} = 0$$

$$x_{\max} = \frac{5\pi}{2} ; y_{\max} = 1$$

On obtient la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f en prenant les images de $(\mathcal{C}_0)$ par les translations de vecteurs $k2\pi \vec{OI}$ [$k \in \mathbb{Z}$].

■ Propriétés graphiques

■ Axe de symétrie

D'après le graphique, il semble que les droites $(\mathcal{D}_0)$ et $(\mathcal{D}'_0)$ d'équations respectives $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ sont des axes de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$. Contrôlons cette conjecture par le calcul. En effet :

$$\text{pour tout } x \text{ élément de } D_f, \quad \frac{\pi}{2} + x \in D_f \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \in D_f \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$\text{pour tout } x \text{ élément de } D_f, \quad \frac{3\pi}{2} + x \in D_f \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - x \in D_f \quad \text{et} \quad f\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

– Les droites $(\mathcal{D}_0)$ et $(\mathcal{D}'_0)$ sont des axes de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

– Les droites $(\mathcal{D}_k)$ et $(\mathcal{D}'_k)$ d'équations respectives $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$] et $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$] sont des axes de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ [d'après (2)].

Exemple 2

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$.

■ Variations de la fonction f

■ Ensemble de définition

Soit x un nombre réel,

$$\text{on a : } x \in D_f \Leftrightarrow 1 - \cos 2x \neq 0,$$

$$\text{or : } 1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \quad [k \in \mathbb{Z}].$$

donc :

(1)

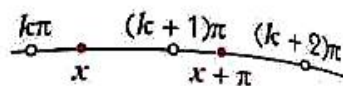
$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq k\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

■ Ensemble d'étude

Périodicité

On sait que la fonction cosinus est périodique et de période 2π .

Vérifions que f est périodique et de période π .



– Démontrons que : $x \in D_f \Leftrightarrow x + \pi \in D_f$

or : $x \in D_f \Leftrightarrow$ il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que, $k\pi < x < (k+1)\pi$

d'où : $x \in D_f \Leftrightarrow (k+1)\pi < x + \pi < (k+2)\pi$

par suite : $x \in D_f \Leftrightarrow x + \pi \in D_f$

– On vérifie que : pour tout x élément de D_f , $f(x + \pi) = f(x)$.

Donc : (2) La fonction f est périodique de période π . On peut donc étudier f sur $[-\frac{\pi}{2}; 0[\cup [0; \frac{\pi}{2}]$

Parité

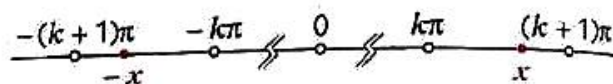
On sait que la fonction cosinus est paire. Vérifions que la fonction f est paire.

– Démontrons que : $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$

or : $x \in D_f \Leftrightarrow$ il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que, $k\pi < x < (k+1)\pi$

d'où : $x \in D_f \Leftrightarrow -(k+1)\pi < -x < -k\pi$

par suite : $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$



– On vérifie que : pour tout x élément de D_f , $f(-x) = f(x)$.

Donc : (3) La fonction f est paire. $[0; \frac{\pi}{2}]$ est un ensemble d'étude

■ Limites

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos 2x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x) = 0 \\ 1 - \cos 2x \geq 0 \end{cases}$$

donc : (4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = +\infty$$

■ Dérivée

Détermination de la dérivée

f est la composée de la fonction $x \mapsto \cos 2x$ et de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$.

Ces deux fonctions sont dérivables en tout élément de leur ensemble de définition.

Par conséquent, f est dérivable sur chacun des intervalles $]k\pi; (k+1)\pi[$ [$k \in \mathbb{Z}$]

et on a :

(5)

$$\text{pour tout } x \text{ élément de } D_f, f'(x) = \frac{-4\sin 2x}{(1 - \cos 2x)^2}$$

Signe de la dérivée

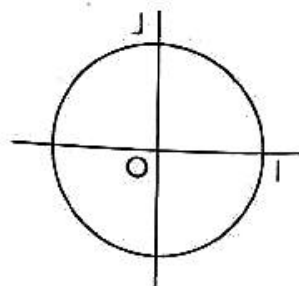
$f'(x)$ est du signe de $-\sin 2x$.

Soit x un élément de D_f tel que : $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

on a : $0 < 2x \leq \pi$

donc : $\sin 2x \geq 0$.

Par suite : pour tout x élément de $]0; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) < 0$.



■ Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		0
$f(x)$	$+\infty$	0

■ Représentation graphique

Le plan est muni du repère (O, I, J) . Désignons par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f et par $(\mathcal{C}_0)$ la représentation graphique de la restriction de f à $]0; \frac{\pi}{2}]$.

■ Asymptote

- La droite (OI) est une asymptote verticale à $(\mathcal{C}_0)$ [d'après (4)]
- Toute droite (Δ_k) d'équation $x = k\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$], est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ [d'après (2)]

■ Construction de $(\mathcal{C}_0)$ de $(\mathcal{C}_f)$

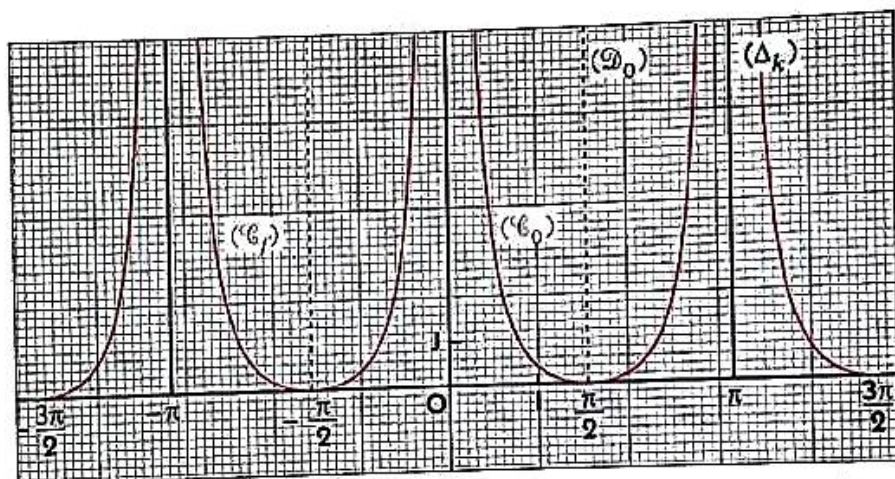
Tableau des valeurs approchées

x	$f(x)$
$\frac{\pi}{6}$	3
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	0,33
$\frac{\pi}{2}$	0

Fenêtre de construction

$$x_{\min} = -\frac{3\pi}{2}; y_{\min} = 0$$

$$x_{\max} = \frac{3\pi}{2}; y_{\max} = 8$$



■ Propriétés géométriques

■ Axe de symétrie

- D'après (3) la droite (OJ) est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.
 - D'après le graphique, il semble que la droite $(\mathcal{D}_0)$ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
- Contrôlons cette conjecture par le calcul. Pour cela, on vérifie que : pour tout x élément de D_f , $\frac{\pi}{2} + x \in D_f \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \in D_f$ et $f(\frac{\pi}{2} + x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$.
- La droite $(\mathcal{D}_0)$ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

donc :

Toute droite (Δ_k) d'équation $x = k\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$], est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ [d'après (2)].
Toute droite $(\mathcal{D}_k)$ d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$], est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ [d'après (2)].

■ Asymptotes

D'après (4) la droite (OJ) est une asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$.

donc :

Toute droite (Δ_k) d'équation $x = k\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$], est une asymptote verticale $(\mathcal{C}_f)$ [d'après (2)].

TP Travaux pratiques

En général, dans les épreuves du bac, déterminer une asymptote oblique à une courbe $(\mathcal{C})$ revient à vérifier qu'une droite donnée est une asymptote à $(\mathcal{C})$.

Cependant, les exercices commentés des TP1 et TP3 qui sont des applications directes de l'organigramme d'étude d'une branche infinie (page 65) ont pour objectif de satisfaire à des compétences exigibles pour certains concours et examens niveau bac.

L'exercice commenté du TP2 donne une extension à une courbe de la notion d'asymptote.

TP1 Recherche d'asymptotes obliques

Exercice commenté

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{4x^2 + 8x + 5}$.

On désigne par la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère.

Déterminer, si elles existent, les asymptotes obliques de $(\mathcal{C})$.

Étude de la limite en $-\infty$ de la fonction f

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 + 8x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2)$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Étude de la limite en $-\infty$ de : $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$

Soit x un nombre réel strictement négatif.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= |x| \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} \\ &= -x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \frac{f(x)}{x} = -\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$$

Étude de la limite en $-\infty$ de : $x \mapsto f(x) - (-2x)$

$$\text{On a : } f(x) + 2x = \sqrt{4x^2 + 8x + 5} + 2x$$

La somme des limites donne une forme indéterminée.

$$f(x) + 2x = \frac{8x + 5}{\sqrt{4x^2 + 8x + 5} - 2x}$$

Le quotient des limites donne une forme indéterminée.

$$\begin{aligned} f(x) + 2x &= \frac{x(8 + \frac{5}{x})}{-x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} - 2x} \\ &= \frac{8 - \frac{5}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} - 2} \end{aligned}$$

$$\text{On obtient : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = -2$$

Conclusion

$(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une asymptote oblique, la droite d'équation : $y = 2x - 2$.

Étude de la limite en $+\infty$ de la fonction f

On obtient de même :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Étude de la limite en $+\infty$ de : $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$

Soit x un nombre réel strictement positif.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= |x| \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} \\ &= x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \frac{f(x)}{x} = \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Étude de la limite en $+\infty$ de : $x \mapsto f(x) - 2x$

$$\text{On a : } f(x) - 2x = \sqrt{4x^2 + 8x + 5} - 2x$$

$$f(x) - 2x = \frac{8x + 5}{\sqrt{4x^2 + 8x + 5} + 2x}$$

On obtient de même :

$$\begin{aligned} f(x) - 2x &= \frac{x(8 + \frac{5}{x})}{x \sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2x} \\ &= \frac{8 - \frac{5}{x}}{\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2} \end{aligned}$$

$$\text{On obtient : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$$

Conclusion

$(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique, la droite d'équation : $y = 2x + 2$.

TP2 Recherche de courbes asymptotes

Exercice commenté

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) ; par g la fonction racine carrée et par $(\mathcal{C}_g)$ sa représentation graphique.

1. Étudier les variations de f .

2. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{C}_g)$. Donner une interprétation graphique.

1. Étude des variations de f

Dérivée

Soit x un nombre réel strictement positif.

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - 2}{2x^2}$$

$$\text{donc : pour tout } x \text{ élément de } \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{\sqrt{x^3} - 2}{2x^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x^3} - 2$.

La fonction racine carrée et la fonction cube étant strictement croissantes sur $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3} \geq 2$$

$$x^3 \geq 2^2$$

$$x \geq 2^{\frac{2}{3}}$$

Limites

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Tableau de variation

x	0	$2^{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	α	$+\infty$

$$\begin{aligned} \alpha &= f\left(2^{\frac{2}{3}}\right) = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \\ &= 2^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

2. Étude de la limite en $+\infty$ de $x \mapsto f(x) - g(x)$

Les fonctions f et g ont toutes deux pour limites $+\infty$ en $+\infty$. Il s'agit de comparer leur comportement en $+\infty$. Pour cela, l'étude du comportement en $+\infty$ de leur écart est un bon indicateur.

Soit x un nombre réel strictement positif.

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x}.$$

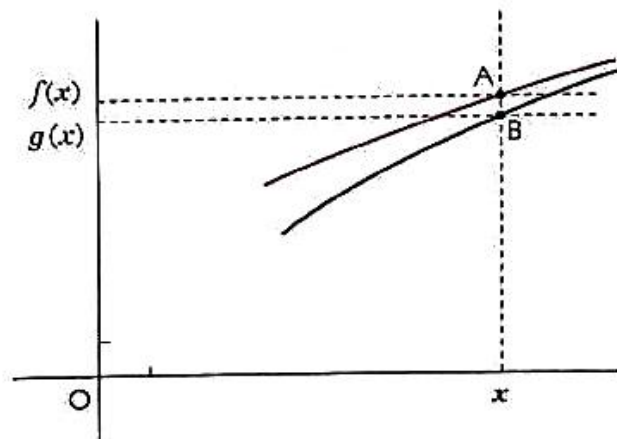
A et B étant respectivement les points de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ d'abscisse x , on a :

$$AB = f(x) - g(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

On en déduit que, lorsque x devient de plus en plus grand, l'écart AB entre les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ devient de plus en plus petit.

On dit que $(\mathcal{C}_g)$ est une **courbe asymptote** en $+\infty$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.



• Tracer $(\mathcal{C}_g)$ et donner une esquisse de $(\mathcal{C}_f)$.

$(\mathcal{C}_g)$ est une courbe connue qui permettra de faire une rapide esquisse de $(\mathcal{C}_f)$ conforme au tableau de variation de f .

TP3 Recherche d'une direction asymptotique

Exercice commenté

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + \sin x$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

1. Démontrer que $(\mathcal{C})$ est située dans une bande limitée par deux droites parallèles (D) et (D') .

Déterminer les points de contact de $(\mathcal{C})$ avec ces droites.

2. Démontrer que $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à O .

3. Étudier les variations de f .

4. Donner une esquisse de $(\mathcal{C})$ sur $[0; 2\pi]$.

1. Situation de $(\mathcal{C})$ dans le plan

Encadrement de la fonction f

Soit x un nombre réel.

On a : $-1 \leq \sin x \leq 1$

d'où : $2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$ (1)

On désigne respectivement par (D) et (D') les droites d'équation : $y = 2x - 1$ et $y = 2x + 1$.

(1) montre que $(\mathcal{C})$ est située dans la bande délimitée par les droites (D) et (D') (de coefficient directeur 2).

Points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec (D)

$$\begin{aligned} x \in (\mathcal{C}) \cap (D) &\Leftrightarrow f(x) = 2x - 1 \\ &\Leftrightarrow \sin x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k \times 2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{aligned}$$

$A(\frac{3\pi}{2}; 3\pi - 1)$ est l'unique point commun de $(\mathcal{C})$ et (D) sur $[0; 2\pi]$.

Points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec (D')

$$\begin{aligned} x \in (\mathcal{C}) \cap (D') &\Leftrightarrow f(x) = 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{aligned}$$

$B(\frac{\pi}{2}; \pi + 1)$ est l'unique point commun de $(\mathcal{C})$ et (D') sur $[0; 2\pi]$.

2. Étude de la parité

On a : pour tout nombre réel x , $f(-x) = -f(x)$.

f est une fonction impaire donc la courbe $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport au point O .

3. Étude des variations de f

Dérivée

Pour tout nombre réel x , $f'(x) = 2 + \cos x$ et $f''(x) > 0$.

car : pour tout nombre réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Limites

On a obtenu,

pour tout nombre réel x , $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

On a obtenu la limite de f en $-\infty$, en utilisant la parité de f (ou en procédant comme précédemment)

Tableau de variation

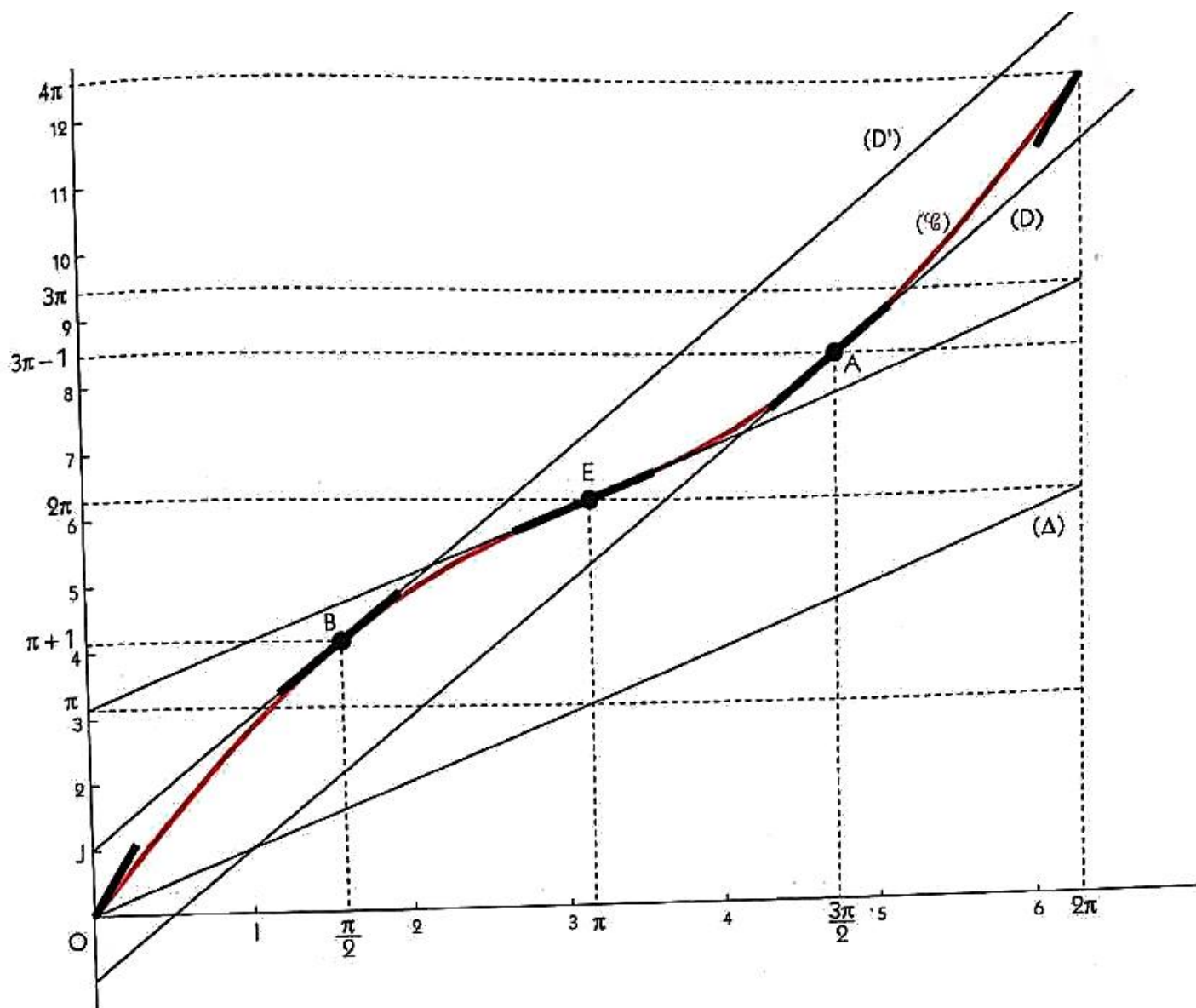
x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$+\infty$
$f'(x)$	+	3	2	1	2	3	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$\pi + 1$	2π	$3\pi - 1$	4π	$+\infty$

4. Construction de $(\mathcal{C})$ sur $[0; 2\pi]$

On vérifie que 1 est le minimum de f' , en effet f'' change de signe en s'annulant pour $x = k\pi$, $[k \in \mathbb{Z}]$.

$(\mathcal{C})$ admet donc un point d'inflexion au point $E(\pi; 2\pi)$

$(\mathcal{C})$ est tangente en A et en B respectivement aux droites (D) et (D') .



TP4. Types et méthodes de démonstration

L'objet de ce TP est de faire une synthèse sur les différents types et méthodes de démonstrations rencontrés de la classe de sixième à la terminale.

C'est une fiche de référence que l'on pourra compléter tout le long de l'année par des exemples, afin d'en faire un outil de travail de plus en plus performant.

Deux types d'énoncés mathématiques

- On distingue deux types d'énoncés mathématiques liés à une propriété p définie sur un ensemble E .
 x_0 étant un élément particulier de E , $p(x_0)$ est une **proposition** ; elle est soit vraie, soit fausse ; on dit qu'elle possède une valeur de vérité.
 x étant un élément quelconque de E , $p(x)$ est appelé **fonction propositionnelle** (de la variable x). En général, elle ne fait pas l'objet d'une démonstration car elle ne possède pas une valeur de vérité.

– Les énoncés universels

Ce sont les propositions quantifiées du type :

pour tout x élément de E , $p(x)$
quantificateur universel

– Les énoncés existentiels

Ce sont les propositions quantifiées du type :

il existe x élément de E , $p(x)$
quantificateur existentiel

• On admet que :

- la négation d'un énoncé universel est un énoncé existentiel ;
- la négation d'un énoncé existentiel est un énoncé universel.

① Démonstration par un exemple ou un contre-exemple

• Démonstration par un exemple

Pour établir un énoncé existentiel,

(1) Il existe x élément de E , $p(x)$

il suffit d'exhiber un exemple d'élément de E ayant la propriété énoncée p .

• Démonstration par contre-exemple

Pour établir un énoncé existentiel, négation d'un énoncé universel :

(2) Il existe x élément de E , non $q(x)$

il suffit d'exhiber un exemple à cet énoncé existentiel (2) ; on dit que l'on a produit un **contre-exemple** à sa négation, l'énoncé universel ci-dessus :

(3) Pour tout x élément de E , $q(x)$.

② Démonstration par implication et par contraposition

$$\boxed{(p) \Rightarrow (q)}$$

implication permettant
une déduction directe

si et seulement si

$$\boxed{\text{non } (q) \Rightarrow \text{non } (p)}$$

contraposé de
 $(p) \Rightarrow (q)$

③ Démonstration par disjonction des cas

- Naturellement, on convient de dire que la proposition suivante est vraie : (p) ou non (p) ; c'est le **principe du tiers exclu**.
- La démonstration par disjonction des cas est basée sur ce principe, elle revient donc à examiner exhaustivement tous les cas.

④ Démonstration par l'absurde

- Naturellement, on convient de dire que l'énoncé mathématique suivant est faux : (p) et non (p) ; c'est le **principe de non-contradiction**.

La démonstration par l'absurde est basée sur ce principe ; elle consiste donc, à rejeter toute hypothèse qui conduit à une contradiction.

- Ainsi pour démontrer que l'énoncé mathématique (p) est vraie :
 - on suppose que non (p) est vraie ;
 - on en déduit un énoncé (q) que l'on sait être fausse ;
 - on conclut que (p) est vraie car il y a contradiction.

⑤ Démonstration par récurrence

P_n est un énoncé mathématique qui dépend d'un nombre entier naturel n .

Pour démontrer *par récurrence* que :

« pour tout n supérieur à n_0 , P_n » est vraie.

On procède comme suit,

1^{re} étape :

on vérifie que P_{n_0} est vraie ;

2^e étape :

on suppose que : « pour un nombre entier naturel k supérieur à n_0 , P_k » est vraie,
on démontre que : P_{k+1} est vraie ;

on conclut.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Dans tous les exercices qui suivent le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) .

Quelques généralités sur les fonctions

Éléments de symétrie

1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos^2 x}.$$

$(\mathcal{C})$ est sa représentation graphique.

Vérifier que la droite (D) d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$.

2 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}).$$

$(\mathcal{C})$ est sa représentation graphique.

Vérifier que le point $A(\frac{5\pi}{12}; 0)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

Fonctions périodiques

3 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est périodique de période T .

(1) $f: x \mapsto \sin(x + \frac{\pi}{6})$; $T = 2\pi$

(2) $f: x \mapsto \sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$; $T = 6\pi$

(3) $f: x \mapsto \sin(2x + \frac{\pi}{6})$; $T = \pi$

(4) $f: x \mapsto \tan(3x - \frac{\pi}{4})$; $T = \frac{\pi}{3}$

Branches infinies d'une représentation graphique

4 Dans chacun des cas suivants, justifier que la courbe $(\mathcal{C})$, représentation graphique de la fonction f , admet pour asymptote oblique la droite (Δ) .

(1) $f: x \mapsto \frac{3x^3 - 2x^2 + 3x - 3}{x^2 + 1}$; $(\Delta): y = 3x - 2$

(2) $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 6x + 1}$; $(\Delta): y = x + 3$

5 Dans chacun des cas suivants, étudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ représentation graphique de la fonction f ; préciser si $(\mathcal{C})$ admet une asymptote ou une branche parabolique.

(1) $f: x \mapsto \frac{2x^2 + 2x - 1}{3x^2 - x + 1}$ (3) $f: x \mapsto -x + \sqrt{x^2 - 9}$

(2) $f: x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$ (4) $f: x \mapsto x + \frac{\sin x}{x}$

(5) $f: x \mapsto \sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}$

Courbes asymptotes

6 Démontrer que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 2x^2 + x$ est une courbe asymptote à la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - x + 1}{x - 1} \quad (\text{voir TP2}).$$

Exemple d'études de fonctions

Fonctions rationnelles

7 1. On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

a) Étudier les variations de P .

b) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution réelle et une seule α , et que α appartient à l'intervalle $]1,6 ; 1,7[$.

2. Soit D l'ensemble des nombres strictement supérieurs à -1 . On considère la fonction f définie sur D par :

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (on prendra comme unité 4 cm). Construire $(\mathcal{C})$.

Étudier les variations de f (utiliser les résultats du 1.)

D'après Bac

8 On considère la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = \frac{x^3 - 7x + 10}{x - 1}.$$

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 1 cm).

1. Démontrer que : pour tout x appartenant à $]1 ; +\infty[$,

$$f(x) = x - 6 + \frac{4}{x - 1}.$$

2. Déterminer la fonction dérivée f' de f .

En déduire le sens de variation de f .

Déterminer les limites de f aux extrémités de l'intervalle $]1 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f .

3. Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x - 6$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. Donner une équation de l'autre asymptote à $(\mathcal{C})$, notée (D_2) .

4. Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

5. Construire sur une feuille de papier millimétré les droites (D_1) , (D_2) , (T) et la courbe $(\mathcal{C})$.

9 On considère les courbes $(\mathcal{C}_m)$, représentations graphiques des fonctions f_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_m(x) = \frac{1 - mx^2}{1 - x}, \quad [m \in \mathbb{R}].$$

– Vérifier qu'il existe un point A qui appartient à toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$. Préciser ses coordonnées.

– Tracer les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

– Étudier le sens de variation de f suivant les valeurs du paramètre réel m .

Fonctions rationnelles par intervalle

10 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x + 3}{|x| + 2}$$

$(\mathcal{C})$ est sa représentation graphique.

Établir les équations de la tangente à gauche et de la tangente à droite au point A d'abscisse 0 de $(\mathcal{C})$.

Tracer ces droites. Construire $(\mathcal{C})$.

11 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3|x - 1| + 1}{2|x - 1| - 1}.$$

1. Donner l'expression de $f(x)$ sans la valeur absolue et étudier le sens de variation de f .
2. Construire la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f .
3. Démontrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un axe de symétrie que l'on déterminera.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$, m étant un paramètre réel quelconque. Indiquer le signe des solutions lorsqu'elles existent.

12 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de f .
2. Construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f (on précisera la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à sa tangente à gauche et sa tangente à droite au point A de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse 3).

Fonctions irrationnelles

13 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

- | | |
|-----------------------------------|---|
| (1) $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ | (4) $f: x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ |
| (2) $f: x \mapsto \sqrt{3x+5}$ | (5) $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| (3) $f: x \mapsto \sqrt{x^2-4}$ | |

14 f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x(x+1)}.$$

1. Étudier le sens de variation de f . (Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 0 .)
2. a) Vérifier que la droite (D) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.
b) Vérifier que la droite (D') d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.
3. Tracer avec soin la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en précisant la tangente à gauche la tangente à droite en -1 et en 0 .

15 g est la fonction définie sur $]0; 1[\cup]1; 2]$ par :

$$g(x) = \frac{x + \sqrt{2x-x^2}}{x-1}.$$

1. Étudier les variations de la fonction g .
a) Démontrer que g est dérivable sur $]0; 1[$ et sur $]1; 2]$. Déterminer $g'(x)$.
b) Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(2)}{h}$. Que peut-on en déduire ?
c) Calculer $\lim_{h \rightarrow 1} g(x)$. Que peut-on en déduire ?
2. Construire $(\mathcal{C}_g)$.
3. Vérifier que $\Omega(1; 1)$ est un centre de symétrie de la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ de g .

16 On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$.

1. Étudier le sens de variation de f .
En déduire que f détermine une bijection de $[1; +\infty[$ dans $]0; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) $f(x) = b$, $[b \in \mathbb{R}_+]$.
En déduire que l'application réciproque g de la bijection déterminée par f est définie par : $g(x) = (1 + \sqrt{x})^2$.
3. Construire la représentation graphique de f ; en déduire celle de g .

Fonctions irrationnelles par intervalle

17 1. f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

- a) Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 1 ; donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- b) Étudier le sens de variation de f .
- c) Démontrer que la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f admet deux asymptotes ; donner des équations de ces asymptotes.
- d) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) .

2. g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

On désigne par $(\mathcal{C}_g)$ sa représentation graphique dans le plan muni du même repère orthogonal (O, I, J) .

- a) x étant un nombre réel, on considère les points $M(x; f(x))$ et $N(-x; g(-x))$. Déterminer le milieu du segment $[MN]$. Donner une interprétation géométrique et une illustration de ce résultat.
- b) En tenant compte de a), donner une méthode de construction de $(\mathcal{C}_g)$. Construire $(\mathcal{C}_g)$.

18 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$

1. Étudier la parité de f ; en déduire l'intervalle d'étude.
2. a) Étudier la dérivabilité de f en 1 , et sur les intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.
b) Quel est le signe de $f'(x)$. (On peut poser si nécessaire $u = \sqrt{x^2 - 1}$.)
3. a) x étant un nombre réel supérieur à 1 , mettre $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \varphi(x)$, où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.
b) En déduire une équation d'une asymptote à la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f .
4. Construire $(\mathcal{C}_f)$.

D'après Bac

Fonctions trigonométriques

19 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

- (1) $f: x \mapsto \sin 2x$ (2) $f: x \mapsto \cos 3x$ (3) $f: x \mapsto \sin^2 x$

20 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sin(2x + 1).$$

1. Justifier que la fonction f est périodique, de période π .
2. Justifier que la fonction f est la composée de la fonction affixe $u: x \mapsto 2x + 1$ et de la fonction sinus.
a) Donner le tableau de variation de la fonction u et celui de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$.
b) Déterminer l'intervalle K , image réciproque par u de $[0; \pi]$.
c) Déterminer l'antécédent par u de $\frac{\pi}{2}$.
d) Reporter les résultats des deux questions précédentes b) et c) dans le tableau de variation de la fonction u .
En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle K .
4. Construire la représentation graphique de f .

21 f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 4\sin x \cos x + 1$$

1. a) Vérifier que :
pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$.
b) Justifier le choix de l'intervalle $[0; \pi]$ comme intervalle d'étude de f .
2. Démontrer que :
pour tout nombre réel x , $f'(x) = 4\cos 2x (1 - 2\sin 2x)$.
Résoudre dans $[0; \pi]$, l'équation $f'(x) = 0$.
Déduire le tableau de variation de f .

Fonction

Logarithme népérien

John Neper ou Napier (1550-1617), mathématicien écossais, construisit en Europe les premières tables de logarithmes dites naturels de base e .

En vue de rendre ces tables plus performantes dans le calcul numérique, elles furent reprises par Briggs dans la base dix et furent très utilisées jusqu'à l'arrivée en force des calculatrices électroniques.

© Éditions de la Découverte, Paris



Le mathématicien français Charles Hermite démontra que le nombre réel e est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation algébrique entière à coefficient entier.

Charles Hermite
mathématicien français – 1822-1901.

SOMMAIRE

1. Définition – Propriétés	82
2. Dérivées – Primitives-limites	89
3. Exemples d'études de fonctions	95

1

Définition – Propriétés

1.1. Définition et ses conséquences immédiates

Exploration par la touche $\ln$ d'une calculatrice



La touche $\ln$ d'une calculatrice détermine une fonction.

Nous allons utiliser la démarche scientifique ci-dessous pour introduire cette nouvelle fonction élémentaire.

Cette manipulation a pour objectif de réaliser les deux premières étapes de cette démarche ; la troisième étape sera abordée pendant l'exposé du cours :

- 1 obtenir des résultats par des essais ;
- 2 émettre des conjectures à partir de ces résultats ;
- 3 contrôler ces conjectures par des démonstrations.

■ Une représentation graphique partielle de la fonction

- Compléter la table de valeurs ci-dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur :
 - l'ensemble de définition de la fonction ;
 - le signe des images.

a	-10	-1	-0,5	0	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a \ln$																	

- Construire une représentation graphique partielle à partir de la table de valeurs obtenues.
- Émettre des conjectures sur le sens de variation de la fonction.

■ Comportement de la fonction pour les petites et les grandes valeurs

- Compléter les tableaux ci-dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction.

a							10^{-30}	10^{-20}	10^{-10}			10^{10}	10^{20}	10^{30}			
$a \ln$																	

■ Recherche des propriétés algébriques de la fonction

- Compléter le tableau ci-dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur la somme des images de deux nombres et l'image du produit de ces deux nombres.

a	2	3	4	5,2	6,3	7	49,8
b	1,8	3,2	4,5	5	6	12,9	104
$a \ln + b \ln$							
$a \times b = \ln$							

■ Définition

■ Position du problème

On sait déterminer les primitives sur $]0 ; +\infty[$ des fonctions numériques f_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n} \quad [n \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}]$$

Qu'en est-il de la fonction inverse $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$?

La fonction inverse est continue sur $]0 ; +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $]0 ; +\infty[$.
Nous nous proposons de définir l'une de ces primitives et de l'étudier.

Définition

On appelle **fonction logarithme népérien**, la primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction inverse qui prend la valeur 0 en 1.

La fonction logarithme népérien est notée : $\ln$.

On écrira souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$.

■ Calcul d'images

On peut déterminer les valeurs approchées des images par $\ln$ de certains nombres réels, dans une table de logarithme népérien. Cependant l'utilisation de la calculatrice a, dans la pratique, remplacé ces tables.

Exemple

$\ln 2 \approx 0,693$; $\ln 3 \approx 1,098$; $\ln 5 \approx 1,609$; $\ln 7 \approx 1,946$; $\ln 11 \approx 2,398$; $\ln 13 \approx 2,565$.



■ Caractérisation de la fonction $\ln$

De la définition de $\ln$, on déduit la propriété caractéristique suivante :

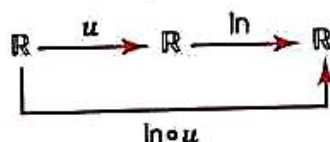
Propriétés

La fonction $\ln$ est caractérisée par les trois propriétés suivantes :

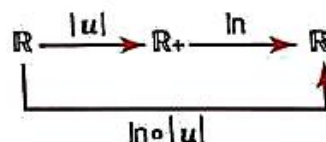
- (1) $D_{\ln} =]0 ; +\infty[$; (2) $\ln 1 = 0$; (3) pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Ensemble de définition de fonctions composées avec $\ln$

■ Fonctions composées $\ln \circ u$ et $\ln \circ |u|$



$$x \in D_{\ln \circ u} \Leftrightarrow x \in D_u \text{ et } u(x) > 0$$



$$x \in D_{\ln \circ |u|} \Leftrightarrow x \in D_u \text{ et } u(x) \neq 0$$

■ Exemple

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par une formule explicite. Déterminer l'ensemble de définition de f .

(1) $f(x) = \ln(-2x + 1)$

(2) $f(x) = \ln(3x^2 + 5x - 2)$

(3) $f(x) = \ln\left(\frac{-x+1}{7x-3}\right)$

(4) $f(x) = \ln\left|\frac{-x+1}{7x-3}\right|$

Illustrations et justifications

Soit x un nombre réel

(1) $x \in D_f \Leftrightarrow -2x + 1 > 0$

d'où : $D_f =]-\infty ; \frac{1}{2}[$.



$$(2) \quad x \in D_f \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 2 > 0$$

$$\text{D'où : } D_f =]-\infty; -2[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[.$$

x	$-\infty$	-2	$1/3$	$+\infty$	
$3x^2 + 5x - 2$	+	0	-	0	+

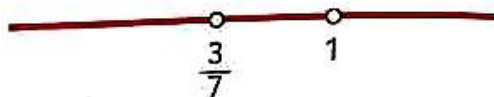
$$(3) \quad x \in D_f \Leftrightarrow \frac{-x+1}{7x-3} > 0$$

$$\text{D'où : } D_f =]\frac{3}{7}; 1[.$$

x	$-\infty$	$3/7$	1	$+\infty$
$\frac{-x+1}{7x-3}$	-	-	+	-

$$(4) \quad x \in D_f \Leftrightarrow \frac{-x+1}{7x-3} \neq 0$$

$$\text{D'où : } D_f =]-\infty; \frac{3}{7}[\cup]\frac{3}{7}; 1[\cup]1; +\infty[.$$



Variations de $\ln$ et ses conséquences

Propriété

La fonction $\ln$ est strictement croissante.

Conséquences

pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}_+^*$,

$$a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$$

$$a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$$

Cas particuliers

pour tout a élément de $\mathbb{R}_+^*$,

$$a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0$$

$$a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$$

Exemple

$$\ln 1,49 < \ln 20,7 < \ln 69 < \ln 1040 < \ln 2651 \quad ; \quad \ln 0,999 < 0 \quad ; \quad \ln 1,001 > 0.$$

Le nombre réel e

La fonction $\ln$ étant une fonction continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, elle détermine sur tout intervalle $[a; b]$ contenu dans $]0; +\infty[$ une bijection de $[a; b]$ dans $[\ln a; \ln b]$.

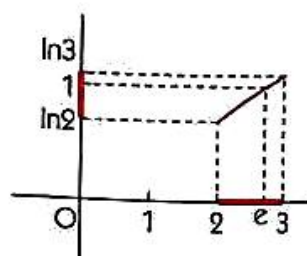
$$\text{Or, } \ln 2 < 1 < \ln 3$$

donc, il existe un unique nombre réel, noté e , tel que : $2 < e < 3$ et $\ln e = 1$

• Vérifier par la méthode de dichotomie ou par balayage que :

$$e \approx 2,718$$

On démontre et nous admettons que : le nombre réel e est un nombre irrationnel.



Exercice

1. a Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie ci-dessous.
Déterminer l'ensemble de définition de f .

$$(1) f(x) = \ln(3x + 4) \quad (2) f(x) = \ln|1 - x|$$

$$(3) f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{5x-1}\right) \quad (4) f(x) = \ln(x^2 - 4)$$

$$(5) f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$$

$$(6) f(x) = \ln(1 - x) + \ln(2x + 1)$$

$$(7) f(x) = \ln(x - 1) + \ln(2x + 1)$$

$$(8) f(x) = \ln\left|\frac{2x-1}{3x+1}\right|$$

1.2. Propriétés algébriques de $\ln$

Propriété fondamentale

Propriété

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , (1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Démonstration

Soit a un nombre réel strictement positif. Il s'agit de démontrer que :

Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $\ln ax = \ln a + \ln x$.

Considérons donc la fonction f_a de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_a(x) = \ln(ax)$.

La fonction f_a est la composée de la fonction linéaire $x \mapsto ax$, suivie de $\ln$.

Soit x un nombre réel strictement positif.

$$f_a'(x) = (ax)' \times \ln'(ax) = a \times \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

donc : pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f_a'(x) = \ln'(ax) = \frac{1}{x}$.

Les fonctions $\ln$ et f_a sont donc des primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Par conséquent, il existe une constante c telle que : $f_a(x) = \ln x + c$

d'où : $c = f_a(1) = \ln a$,

donc : pour tous a et x éléments de $]0; +\infty[$, $\ln ax = \ln x + \ln a$.

Exemples

On a : $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$.

or : $\ln 2 \approx 0,693$; $\ln 3 \approx 1,098$

donc : $\ln 6 \approx 1,791$.

On a : $\ln 35 = \ln(7 \times 5) = \ln 7 + \ln 5$

or : $\ln 7 \approx 1,946$; $\ln 5 \approx 1,609$

donc : $\ln 35 \approx 3,555$.

Conséquences de la propriété fondamentale

Activité

Dans la propriété fondamentale (1), qu'obtient-on, en remplaçant a par $\frac{1}{b}$? en remplaçant b par $\frac{1}{b}$?

Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , (2) $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$; (3) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Exemples

On a : $\ln 0,2 = \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln 5$

or : $\ln 5 \approx 1,609$

donc : $\ln 0,2 \approx -1,609$

On a : $\ln 1,5 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2$

or : $\ln 3 \approx 1,098$; $\ln 2 \approx 0,693$

donc : $\ln 1,5 \approx 0,405$

Extension de la propriété fondamentale

Activité

• Dans la propriété fondamentale, en remplaçant b par : $a, a^2, a^3, \dots$

On obtient : $\ln(a^2) = \ln a + \ln a = 2\ln a$; $\ln(a^3) = \ln a + \ln(a^2) = 3\ln a$.

On peut conjecturer que : pour tout nombre entier naturel n , $\ln(a^n) = n\ln a$.

Contrôler cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Pour cela, il reste à vérifier que :

- p étant un nombre entier naturel quelconque, si $\ln(a^p) = p\ln a$ alors $\ln(a^{p+1}) = (p+1)\ln a$.
- Conclusion.

• On veut étendre cette propriété aux puissances d'exposants rationnels de a .

r étant un nombre rationnel, on sait qu'il existe des nombres entiers relatifs p et q ,

tels que : $r = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$.

Pour exprimer $\ln(a^r)$ en fonction de $\ln a$, on pourra écrire : $\ln\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right] = \ln(a^p) = p \ln a = q \ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right)$.

Propriété

Pour tout nombre réel strictement positif a , pour tout nombre rationnel r , (4) $\ln(a^r) = r \ln a$.

Cas particuliers :

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a.$$

Exemples

On a : $\ln 8 = \ln(2^3) = 3 \times \ln 2$

or : $\ln 2 \approx 0,693$

donc : $\ln 8 \approx 2,079$

On a : $\ln \sqrt{7} = \frac{1}{2} \ln 7$

or : $\ln 7 \approx 1,946$

donc : $\ln \sqrt{7} \approx 0,973$

Tableau récapitulatif des propriétés de $\ln$

① Caractérisation de $\ln$

$D_{\ln} =]0 ; +\infty[$; $\ln 1 = 0$; pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

② Variations de $\ln$ et ses conséquences

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}_+^*$

$$a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$$

$$a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$$

Pour tout a élément de $\mathbb{R}_+^*$

$$a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0$$

$$a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$$

$$\ln e = 1$$

③ Propriété fondamentale de $\ln$ et ses conséquences

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}_+^*$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Pour tout a élément de $\mathbb{R}_+^*$

Pour tout r élément de $\mathbb{Q}$

$$\ln(a^r) = r \ln a$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Exercices

- 1.b Sachant que :
 $0,693 \leq \ln 2 \leq 0,694$
 $1,098 \leq \ln 3 \leq 1,099$
 Donner un encadrement de chacun des nombres suivants :
 $\ln 6$; $\ln 18$; $\ln 24$; $\ln 27$; $\ln 16$; $\ln 1,5$; $\ln 0,75$.

- 1.c On considère les fonctions f, g, h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
 $f(x) = \ln(x-1)(x+2)$
 $g(x) = \ln(x-1) + \ln(x+2)$
 $h(x) = \ln|x-1| + \ln|x+2|$

A-t-on $f = g$? $f = h$?

Trouver le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident.

Trouver le plus grand ensemble sur lequel f et h coïncident.

- 1.d On considère les fonctions f, g, h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
 $f(x) = \ln(1-x)(x+2)$
 $g(x) = \ln(1-x) + \ln(x+2)$
 $h(x) = \ln|1-x| + \ln|x+2|$
 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent.

1.3. Équations – Inéquations

Équations du type : $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$

Exemple 1

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) $\ln(-2x + 1) = \ln(x + 4)$.

Ensemble V de validité de (E)

Soit x un nombre réel.

On a : $x \in V \Leftrightarrow -2x + 1 > 0$ et $x + 4 > 0$

d'où : $V =]-4 ; \frac{1}{2}[$.

Équations équivalentes à (E)

$$(E) \quad \ln(-2x + 1) = \ln(x + 4)$$

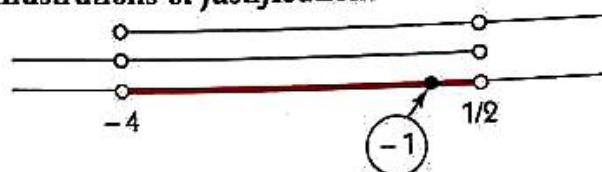
$$-2x + 1 = x + 4$$

$$x = -1$$

Ensemble S de solutions de (E)

$$S = \{-1\}$$

Illustrations et justifications



car $\ln$ est strictement croissante

car $-1 \in V$

Exemple 2

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$.

Ensemble V de validité de (E)

Soit x un nombre réel.

On a : $x \in V \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 0$

d'où : $V =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

Équations équivalentes à (E)

$$(E) \quad \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln e$$

$$\frac{x+1}{x-1} = e$$

$$\frac{(e-1)x - (e+1)}{x-1} = 0$$

$$(e-1)x - (e+1) = 0$$

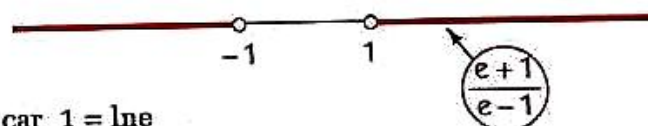
$$x = \frac{e+1}{e-1}$$

Ensemble S de solutions de (E)

$$S = \left\{ \frac{e+1}{e-1} \right\}$$

Illustrations et justifications

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\frac{x+1}{x-1}$	+	0	-	+



car $1 = \ln e$

car $\ln$ est strictement croissante

car $x - 1 \neq 0$

car $\frac{e+1}{e-1} > 1$ ($e+1 > e-1$)

Inéquations du type : $\ln u(x) < \ln v(x)$

Exemple 1

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) $\ln(-x + 2) > \ln(x + 3)$.

Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation (I') $\ln(-x + 2) \leq \ln(x + 3)$?

Ensemble V de validité de (I)Soit x un nombre réel.On a : $x \in V \Leftrightarrow -x+2 > 0$ et $x+3 > 0$ d'où : $V =]-3; 2[$.**Inéquations équivalentes à (I)**

(I) $\ln(-x+2) > \ln(x+3)$

$$-x+2 > x+3$$

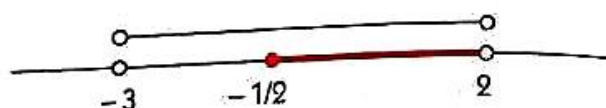
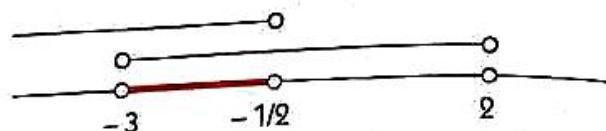
$$x < -\frac{1}{2}$$

Ensemble S de solutions de (I)

$$S =]-3; -\frac{1}{2}[$$

Ensemble S' de solutions de (I')

$$S' = V \setminus S = [-\frac{1}{2}; 2[$$

Illustrations et justificationscar $\ln$ est strictement croissante**Exemple 2****Étudier le signe de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$.**Pour étudier le signe de la fonction f , on pourra résoudre l'inéquation (I) : $f(x) \geq 0$.**Ensemble V de validité de (I)**Soit x un nombre réel.On a : $x \in V \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} > 0$ d'où : $V =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$.**Inéquations équivalentes à (I)**

(I) $\ln(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) \geq 0$

$$\ln(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) \geq \ln 1$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \geq 1$$

$$2x^2 - x - 3 \geq 0$$

Ensemble S de solutions de (I)

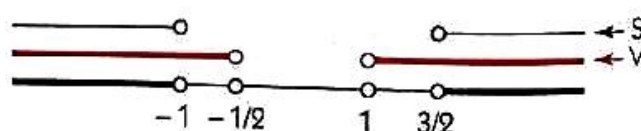
$$S =]-\infty; -1[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$$

Signe de la fonction f Pour $x \in]-\infty; -1[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$ $f(x) > 0$ Pour $x \in]-1; \frac{3}{2}[$ $f(x) = 0$ Pour $x \in]-1; -\frac{1}{2}[\cup]1; \frac{3}{2}[$ $f(x) < 0$.**Illustrations et justifications**

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$	+	0	-	0	+

car $0 = \ln 1$ car $\ln$ est strictement croissante

x	$-\infty$	-1	$3/2$	$+\infty$	
$2x^2-x-3$	+	0	-	0	+

**Exercice**1.e Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(E) $\ln(2x-1) = \ln(3x+1)$

(F) $\ln(-5x+1) = 1$

(G) $\ln\left(\frac{x+2}{-x+1}\right) = 0$

(H) $\ln(-x+3) \leq 1$

(I) $\ln(x-1) < \ln(3-x)$

(J) $\ln(5x^2 + 9x - 1) \geq 0$

(K) $2\ln(x+1) = \ln(5x+1)$

(L) $\ln(1-x) - \ln(2x+3) \geq \ln(-x)$

(M) $\ln(|3x-2|) < 0$

2.1. Variations et représentation graphique de $\ln$ Variations de la fonction $\ln$

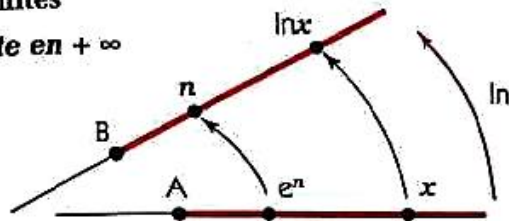
Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . On désignera par $(\mathcal{C}_{\ln})$ la représentation graphique de $\ln$.

■ Ensemble de définition – Dérivée

On sait que l'ensemble de définition de $\ln$ est $]0; +\infty[$ et pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

■ Limites

Limite en $+\infty$



Soit n un nombre entier naturel aussi grand que l'on veut. La fonction $\ln$ étant strictement croissante,

$$\text{on a : } x > e^n \Leftrightarrow \ln x > \ln(e^n)$$

$$\text{d'où : } x > e^n \Leftrightarrow \ln x > n$$

$$x \in]e^n; +\infty[\Leftrightarrow \ln x \in]n; +\infty[.$$

On admet alors que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Limite en 0

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction $\ln$.

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

■ Tableau de variation

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+	+	+
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Représentation graphique de la fonction $\ln$ ■ Tangente à $(\mathcal{C}_{\ln})$ aux points $I(1; 0)$ et $E(e; 1)$

– La tangente (T_1) en I a pour équation : $y = x - 1$

– La tangente (T_e) en E a pour équation : $y = \frac{1}{e}x$.

■ Asymptotes à $(\mathcal{C}_{\ln})$

La courbe $(\mathcal{C}_{\ln})$ admet une asymptote verticale, (OJ) .

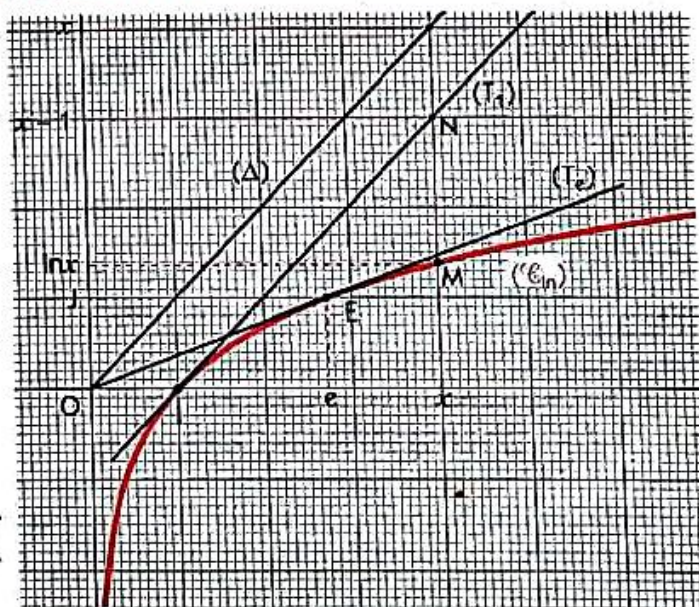
■ Construction de la représentation graphique de $\ln$

$(\mathcal{C}_{\ln})$ est construite dans la fenêtre :

$$x_{\min} = 0 ; x_{\max} = 6$$

$$y_{\min} = -2 ; y_{\max} = 4$$

Dans cette fenêtre, $(\mathcal{C}_{\ln})$ est en dessous de ses tangentes (T_1) , (T_e) et de la droite (Δ) d'équation : $y = x$. En est-il ainsi pour la courbe entière ?



Position relative de $(\mathcal{C}_{\ln})$ par rapport à des droites remarquables

Exemple

Étudions la position relative de $(\mathcal{C}_{\ln})$ par rapport aux droites (T_e) et (Δ) d'équations respectives :

$$y = \frac{x}{e} \quad \text{et} \quad y = x.$$

Il s'agit donc d'étudier, suivant les valeurs strictement positives de x , le signe de la fonction

$$f: x \mapsto \frac{x}{e} - \ln x.$$

Nous ne savons pas résoudre algébriquement l'inéquation : $f(x) \geq 0$.

Étudions donc le sens de variation de la fonction f .

On a : pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-e}{ex}$

0 est le minimum de f (voir le tableau de variation).

d'où : pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

donc : pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $\ln x \leq \frac{x}{e} < x$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$		0	

Activité

Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_{\ln})$ par rapport aux droites (T_1) et (Δ) d'équations respectives :

$$y = x - 1 \quad \text{et} \quad y = x.$$

• Vérifier que l'on obtient le résultat suivant : pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $\ln x \leq x - 1 < x$.

Étude de la branche infinie en $+\infty$ de $(\mathcal{C}_{\ln})$

On sait que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

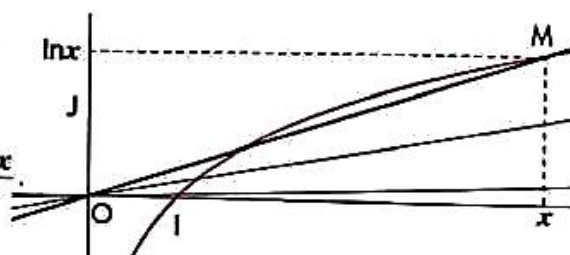
Soit M un point de $(\mathcal{C}_{\ln})$ d'abscisse x suffisamment grand.

Étudions la position limite de (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.

Le coefficient directeur de (OM) est $\frac{\ln x}{x}$.

Il s'agit donc d'étudier la limite en $+\infty$ de la fonction : $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Le quotient des limites donne la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.



La représentation graphique de $\ln$ suggère de comparer, pour les grandes valeurs de x , $\ln$ à la fonction racine carrée.

Soit x un nombre réel suffisamment grand.

On a : $0 < \ln x < x$

car $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$

et $\ln x < x$ (voir résultats précédents)

$$0 < \ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$$

car $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 1$

$$0 < \frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}$$

car $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

$$\text{d'où : } 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{car } \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Par conséquent, lorsque x tend vers $+\infty$, le coefficient directeur de la droite (OM) tend vers 0 ; donc la position limite de la droite (OM) est la droite (OI) . $(\mathcal{C}_{\ln})$ admet donc une branche parabolique de direction (OI) .

2.2. Dérivées

Dérivée de la fonction composée $\ln \circ u$

La dérivabilité des fonctions composées permet d'obtenir la propriété suivante :

Propriété

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K , alors $\ln \circ u$ est dérivable sur K et : $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple

Déterminons la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \ln(-3x^2 + 5x + 2)$$

$$\text{On a : } D_f =]-\frac{1}{3}; 2[$$

f est dérivable et pour tout x élément de D_f ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-3x^2 + 5x + 2)'}{-3x^2 + 5x + 2} \\ &= \frac{-6x + 5}{-3x^2 + 5x + 2} \end{aligned}$$

$$g : x \mapsto \ln\left(\frac{3x-2}{x+3}\right)$$

$$\text{On a : } D_g =]-\infty; -3[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[$$

g est dérivable et pour tout x élément de D_g ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\left(\frac{3x-2}{x+3}\right)'}{\frac{3x-2}{x+3}} = \frac{11}{(x+3)^2} \times \frac{x+3}{3x-2} \\ &= \frac{11}{(x+3)(3x-2)} \end{aligned}$$

Dérivée de la fonction composée $\ln \circ |u|$

Exemple introductif

Déterminons la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \ln|5x-1|$.

$$\text{On a : } D_h =]-\infty; \frac{1}{5}[\cup]\frac{1}{5}; +\infty[.$$

$$\text{Pour tout } x \text{ élément de } D_h, h(x) = \frac{1}{2} \ln(5x-1)^2.$$

Par conséquent, la fonction h est dérivable et pour tout x élément de D_h ,

$$h'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{[(5x-1)^2]'}{(5x-1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 5(5x-1)}{(5x-1)^2} = h'(x) = \frac{5}{5x-1}.$$

Plus généralement, on démontre la propriété suivante :

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas, alors $\ln \circ |u|$ est dérivable sur K , et : $(\ln \circ |u|)' = \frac{u'}{u}$.

$$u \text{ étant une fonction numérique, } \ln \circ |u| = \frac{1}{2} \ln \circ u^2.$$

Exercice

2.a Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
(On pourra préciser les intervalles sur lesquels ces fonctions sont dérivables.)

$$f : x \mapsto \ln(-3x+1)$$

$$h : x \mapsto \ln\left(\frac{2x-7}{3x+4}\right)$$

$$j : x \mapsto \ln(\sqrt{2x-1} + 7x)$$

$$g : x \mapsto \ln|5x^2 - 3x - 2|$$

$$i : x \mapsto \ln(5x^2 + 3x - 1)$$

$$k : x \mapsto \ln\left|\frac{7x}{8-9x}\right|$$

2.3. Primitives

Recherche de primitives comportant $\ln$

Activité

Dans chacun des cas suivants, f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par leurs formules explicites. Déterminer la dérivée de f , en déduire une primitive de g et préciser un intervalle sur lequel cette primitive est définie.

$$(1) f(x) = \ln(-3x+4) \text{ et } g(x) = \frac{1}{3x-4} ; \quad (2) f(x) = \ln|7x^2-2x| \text{ et } g(x) = \frac{7x-1}{7x^2-2x}.$$

Les dérivées des fonctions $\ln \circ |u|$ permettent de déterminer des primitives comportant la fonction $\ln$.

Propriété

u étant une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas,

$\frac{u'}{u}$ admet pour primitive

$\ln \circ u$, sur tout intervalle contenu dans K sur lequel u est strictement positive ;

$\ln \circ (-u)$, sur tout intervalle contenu dans K sur lequel u est strictement négative.

Exemples

Déterminons les primitives sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ de la fonction rationnelle f définie par :

$$f(x) = \frac{5}{2x-1}.$$

— La fonction f est continue sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Elle admet donc des primitives sur chacun de ces intervalles.

— La fonction affine $u : x \mapsto 2x-1$ est dérivable et

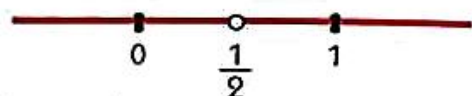
pour tout nombre réel x , $u'(x) = 2$;

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $f(x) = \frac{5}{2} \times \frac{(2x-1)'}{2x-1} = \frac{5}{2} (\ln|2x-1|)'$.

— Par conséquent :

Une primitive de f sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ est une fonction du type : $x \mapsto \frac{5}{2} \ln(-2x+1) + c$ [$c \in \mathbb{R}$] ;

une primitive de f sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ est une fonction du type : $x \mapsto \frac{5}{2} \ln(2x-1) + c$ [$c \in \mathbb{R}$].



x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$
$ 2x-1 $	$-2x+1$	0	$2x-1$

Déterminons la primitive sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente, qui s'annule en 0.

— La fonction tangente est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle.

— On sait que : pour tout x élément de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-(\cos x)'}{\cos x}$ et $\cos x > 0$.

Les primitives sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $\tan$ sont donc les fonctions : $x \mapsto -\ln(\cos x) + c$ [$c \in \mathbb{R}$].

Celle qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto -\ln(\cos x)$ (car elle vérifie : $-\ln(\cos 0) + c = 0$).

Exercice

2.b Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur K , de la fonction f définie ci-dessous :

(1) $f(x) = -\frac{1}{x}$; $K =]0; +\infty[$

(2) $f(x) = \frac{5}{3-x}$; $K =]3; +\infty[$

(3) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$; $K =]0; \pi[$

2.4. Limites

Les limites de référence

Propriétés

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Démonstration

Égalités (1), (2) et (3) (voir paragraphe 2.1)

Égalité (4)

Le produit des limites donne la forme indéterminée $0 \times \infty$. Transformons l'écriture de $x \ln x$:

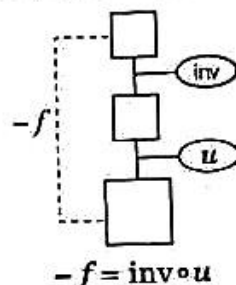
Pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f(x) = x \ln x = - \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

$(-f)$ est la composée de la fonction inverse suivie de la fonction $u : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0; \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Décomposition de f



Égalités (5) et (6)

Le quotient des limites donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On reconnaît le taux de variation en 1 de $\ln$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \ln'(1) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \ln'(1).$$

Calculs de limites

■ Exemple d'utilisation de la composition des fonctions ou des opérations sur les fonctions

g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{2 + \ln x}{1 - \ln x}$.

Étudions les limites de g en $+\infty$, en 0 et en e .

Limites en $+\infty$ et en 0 de la fonction g

$$D_g =]0; e[\cup]e; +\infty[$$

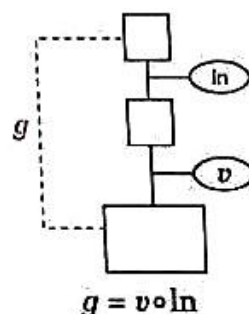
En effet, x étant un nombre réel, $x \in D_g \Leftrightarrow x > 0$ et $1 - \ln x \neq 0$.

La fonction g est la composée de $\ln$ suivie de la fonction $v : x \mapsto \frac{2+x}{1-x}$.

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2+X}{1-X} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{2+X}{1-X} = -1$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\ln x}{1-\ln x} = -1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+\ln x}{1-\ln x} = -1.$$



Limite en e de la fonction g

Pour tout x élément de D_g : $g(x) = (2 + \ln x) \times \frac{1}{1 - \ln x}$

et on a : $\lim_{x \rightarrow e} (2 + \ln x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow e} (1 - \ln x) = 0$.

Le signe de $(1 - \ln x)$ permettra donc de calculer la limite à gauche et la limite à droite en e de $x \mapsto \frac{1}{1 - \ln x}$

On a : $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1$
 $\Leftrightarrow x < e$

donc : $\lim_{x \nearrow e} \frac{1}{1 - \ln x} = +\infty$; $\lim_{x \searrow e} \frac{1}{1 - \ln x} = -\infty$

d'où : $\lim_{x \nearrow e} \frac{2 + \ln x}{1 - \ln x} = +\infty$; $\lim_{x \searrow e} \frac{2 + \ln x}{1 - \ln x} = -\infty$.

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$		0	-

Exemples d'utilisation de transformations d'écritures pour se ramener à des limites de référence

Calculons : (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x$.

• On peut calculer la limite (1) en utilisant la limite de référence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

En effet, pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x-1}$.

• On peut calculer la limite (2) en utilisant la limite de référence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = 0$.

En effet, pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{x} \ln x = 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x}$.

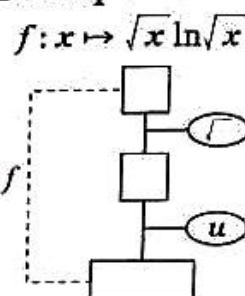
La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} \ln \sqrt{x}$ est la composée de la fonction racine carrée suivie de la fonction $u : x \mapsto x \ln x$

Or : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$,

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln \sqrt{x} = 0$.

d'où : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x = 0$.

Décomposition de f



Exemple d'utilisation d'une transformation d'écriture pour reconnaître un taux de variation

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)$.

Le produit des limites donne la forme indéterminée $[\infty \times 0]$. Transformons l'écriture de ce produit.

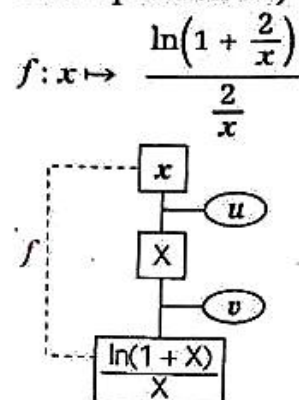
Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2 \times \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$

On considère $u : x \mapsto \frac{2}{x}$; $v : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$; $f : x \mapsto \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} = 1$; d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2$.

Décomposition de f



Exercice

2.c Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 11x + 2) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\ln x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) \ln x ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x}.$$

3

Exemples d'études de fonctions

3.1. Existence d'une asymptote oblique

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x + 3 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Variations de la fonction f

■ Ensemble de définition

Soit x un nombre réel.

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 0$

Donc :



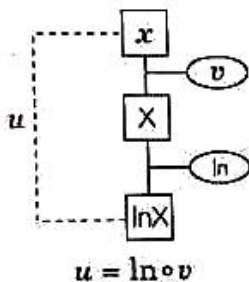
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\frac{x+1}{x-1}$	+	0	-	+

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

■ Limites

La fonction $u : x \mapsto \ln\frac{x+1}{x-1}$ est la composée de la fonction $v : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ suivie de $\ln$.

Limites en $+\infty$ et en 1



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = 0, \quad \text{car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x+1}{x-1} = +\infty, \quad \text{car : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

Limites en $-\infty$ et en -1

On obtient de même :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

■ Dérivée

Détermination de la dérivée

La fonction f est dérivable et, x étant un élément de D_f , $f'(x) = 2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' \times \frac{x-1}{x+1}$

d'où :

$$\text{pour tout } x \text{ élément } D_f, \quad f'(x) = \frac{2(x^2 - 2)}{x^2 - 1}$$

Signe de la dérivée

On a : pour tout x élément de D_f , $x^2 - 1 > 0$

donc : $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\sqrt{2})$			$+\infty$	$f(\sqrt{2})$	$+\infty$

$$f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 3 + \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \quad ; \quad f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 3 + \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

On a : $f(-\sqrt{2}) < 0$ car : $-2\sqrt{2} + 3 < 0$ et $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} < 1$.

On a : $f(\sqrt{2}) > 0$ car : $2\sqrt{2} + 3 > 0$ et $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} > 1$.

La fonction f est donc négative sur $]-\infty; -1[$ et positive sur $]1; +\infty[$.

Représentation graphique de la fonction f

Le plan est muni du repère (O, I, J) . Désignons par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f .

Asymptotes

Asymptotes verticales

On a vu que : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

donc :

$(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes verticales, les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

Asymptote oblique

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

et : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = 0$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc :

$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, la droite (L) d'équation : $y = 2x + 3$.

Position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à son asymptote oblique (L)

Soit x un élément de D_f . On a : $f(x) - (2x + 3) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ et $x+1 > x-1$.

Pour $x > 1$, on a : $x+1 > x-1 > 0$

donc : $\frac{x+1}{x-1} > 1$; $\ln \frac{x+1}{x-1} > 0$

$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (L) .

Pour $x < -1$, on a : $0 > x+1 > x-1$

donc : $\frac{x+1}{x-1} < 1$; $\ln \frac{x+1}{x-1} < 0$

$(\mathcal{C}_f)$ est en-dessous de (L) .

Tangentes

$(\mathcal{C}_f)$ admet deux tangentes horizontales aux points A et B d'abscisses respectives $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

■ Construction de $(\mathcal{C}_f)$

Tableau des valeurs approchées

x	$f(x)$
-5	-7,4
-4	-5,5
-3	-2,3
-2	-2,1
-1,5	-1,6
-1,25	-1,8
1,25	7,7
1,5	7,6
2	8,1
3	9,6
4	11,5
5	13,4

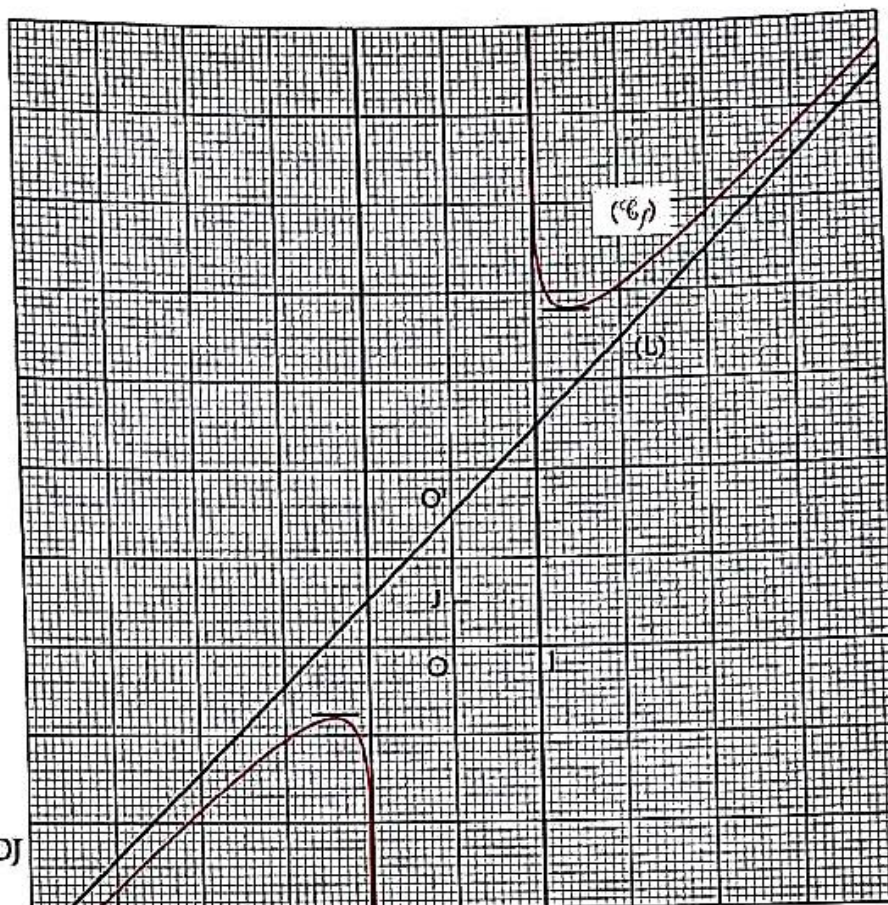
Fenêtre de construction

$$x_{\min} = -5 ; y_{\min} = -6$$

$$x_{\max} = 5 ; y_{\max} = 14$$

Repère orthogonal (O, I, J) ; $OI = 2 OJ$

Unités graphiques : 1 cm sur (OI)



■ Propriétés géométriques

■ Centre de symétrie

– Les droites (L) et (OJ) sont sécantes au point $O'(0 ; 3)$.

Le point O' semble être un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Contrôlons par le calcul cette conjecture.

– Désignons par g la fonction ayant pour représentation graphique, l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{O'O}$.

$$\text{Or : } \vec{O'O} = -3 \vec{OJ}$$

$$\text{donc : pour tout } x \text{ élément de }]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[, g(x) = f(x) + (-3) = 2x + \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

– Étudions la parité de g .

L'ensemble de définition de g est D_g , il est symétrique par rapport à 0.

Soit x un élément de D_g .

$$\text{On a : } g(-x) = -2x + \ln \frac{-x+1}{-x-1} = -2x + \ln \frac{x-1}{x+1} = -2x - \ln \frac{x+1}{x-1} = -g(x).$$

$$\text{d'où : pour tout } x \text{ élément de } D_g, -x \in D_g \text{ et } g(-x) = -g(x).$$

donc :

$O'(0 ; 3)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

3.2. Utilisation de la dérivée seconde

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - \frac{x}{5} - x \ln x$.

Variations de la fonction f

■ Ensemble de définition de f



$$D_f =]0; +\infty[$$

■ Limites

Limite en 0

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \frac{x}{5}) - \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Limite en $+\infty$

La somme des limites donne une forme indéterminée. Transformons l'écriture de $f(x)$ en mettant x^2 en facteur.

On a : Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{5x} - \frac{\ln x}{x}\right)$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{5x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2\right) \times \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{5x} - \frac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

■ Dérivée

Détermination de la dérivée

f est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et

pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2x - \frac{6}{5} - \ln x$

Signe de la dérivée

Nous ne savons pas résoudre algébriquement l'inéquation : $2x - \frac{6}{5} - \ln x \geq 0$.

Étudions donc le sens de variation de la fonction dérivée f' pour déterminer son signe.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \frac{2x-1}{x}$.

x étant strictement positif, $f''(x)$ est du signe de $2x-1$

Du tableau de variation de f' on déduit que :

- la fonction f' admet un minimum en 0,5
- pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) \geq \ln 2 - 0,2 > 0$.

x	0	0,5	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	
$f'(x)$		$\swarrow \searrow$ $\ln 2 - 0,2$	

■ Tableau de variation de f

$$f'(0,5) = 0,5$$

$$f(0,5) = 0,5$$

L'étude précédente suggère les remarques suivantes :

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$;
elle détermine une bijection de $]0; +\infty[$ dans $]0; +\infty[$.

À l'aide d'un prolongement par continuité en 0,

on détermine la fonction g définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*, & g(x) = f(x) \\ g(0) = 0 \end{cases}$

x	0	0,5	$+\infty$
$f'(x)$		+ $\ln 2 - 0,2$ +	
$f(x)$	0		$\nearrow +\infty$

Représentation graphique de la fonction f

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Désignons par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f ; la fonction g a donc pour représentation graphique la courbe $(\mathcal{C}_g) \cup \{O\}$.

Tangente en O à la courbe $(\mathcal{C}_g) \cup \{O\}$

Étudions la dérivabilité à droite en O de g ;

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{1}{5} - \ln x\right) = +\infty$$

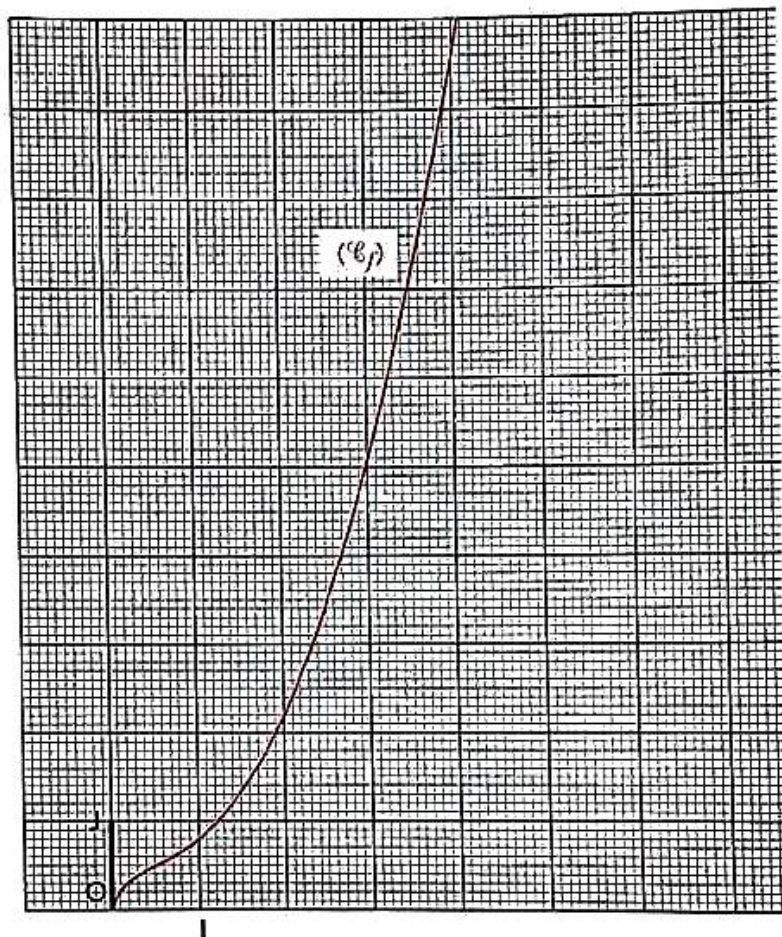
donc :

La courbe $(\mathcal{C}_g) \cup \{O\}$ admet en O une tangente verticale.

Construction de $(\mathcal{C}_f)$

Tableau des valeurs approchées

x	$f(x)$
0,5	0,4
1	0,8
1,5	1,3
2	2,2
2,5	3,4
3	5,1
3,5	7,1
4	9,6



Fenêtre de construction

$$\begin{aligned} x_{\min} &= 0 & y_{\min} &= 0 \\ x_{\max} &= 4 & y_{\max} &= 10 \end{aligned}$$

Repère orthogonal (O, I, J)

Unités graphiques : 1 cm sur (OI) et (OJ)

Propriétés géométriques de $(\mathcal{C}_f)$

Point d'inflexion

On a vu que f' admet un minimum en 0,5. Donc, le point B de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse 0,5 est un point d'inflexion. La tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point B a pour coefficient directeur $\ln 2 - 0,2$ (soit environ 0,5).

Branche parabolique

On a vu que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Soit M un point de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse x suffisamment grand. Étudions la position limite de (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.

Le coefficient directeur de la droite (OM) est $\frac{f(x)}{x}$.

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{5} - \ln x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{5x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$$

Par conséquent,

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ) .

TP1 La fonction logarithme décimal

Ce TP a pour objet d'apporter un complément de cours, tout en montrant l'utilisation d'un outil numérique.

Définition – propriété

On appelle fonction logarithme décimal, la fonction notée $\log$ définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\log x = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$$

Toutes les propriétés de la fonction $\ln$ restent valables pour la fonction $\log$.

- Calculer : $\log 1$; $\log 10$; $\log 10^3$; $\log 10^n$ [$n \in \mathbb{Z}$].
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé, tracer les représentations graphiques des fonctions $\ln$ et $\log$ pour x élément de $]0 ; 10]$.

Nombre de chiffres d'un nombre entier naturel

N étant un nombre entier naturel non nul, démontrer que le nombre de chiffres de N dans son écriture décimale est égal à :

$$1 + E(\log N) ; E(x) \text{ est la partie entière de } x.$$

Soit p un nombre entier naturel.

On admet que : p est le nombre de chiffres de N (dans son écriture décimale) $\Leftrightarrow 10^{p-1} \leq N < 10^p$.

Par conséquent : p est le nombre de chiffres de $N \Leftrightarrow p-1 \leq \log N < p$
 $\Leftrightarrow p-1 = E(\log N).$

- Avec combien de chiffres s'écrit le nombre 5^{3000} ?

Informations scientifiques

En Chimie

L'acidité d'une solution est mesurée par son pH :

$$\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$$

$[\text{H}_3\text{O}^+]$ désignant la concentration de la solution en ions H_3O^+ (en moles par litres).

En Sismologie

La magnitude M d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par :

$$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

I_0 désignant une intensité de référence.

En Acoustique

L'intensité $\mathcal{I}$ (en décibels) d'un son de puissance $\mathcal{P}$ est définie par :

$$\mathcal{I} = 10\log\left(\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}\right)$$

$\mathcal{P}_0$ désignant la puissance d'un son au-dessous duquel aucun son n'est audible par l'oreille humaine.

TP2 Fonction logarithme de base a

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base a , notée $\log_a$, est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \times \ln x$$

On veut étudier et représenter graphiquement la fonction $\log_a$.

1. Étude des propriétés algébriques de $\log_a$

a) Calculer : $\log_a(1)$; $\log_a(a)$; $\log_a(a^n)$ [$n \in \mathbb{Z}$].

b) Démontrer que $\log_a$ vérifie les mêmes propriétés algébriques que $\ln$.

C'est-à-dire : pour tous éléments x et y de $]0; +\infty[$,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_a x$$

$$\log_a(x^n) = n \log_a x$$

c) Démontrer que :

pour tous éléments a, b et x de $]0; +\infty[$,

$$\log_a(x) = \log_a(b) \times \log_b(x).$$

En déduire : $\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}.$

2. Variations de $\log_a$

- Étudier le sens de variation de la fonction $\log$ (distinguer les cas $0 < a < 1$ et $a > 1$).
- Justifier que $\log_a$ est une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3. Représentations graphiques de $\log_a$ et de $\log \frac{1}{a}$

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

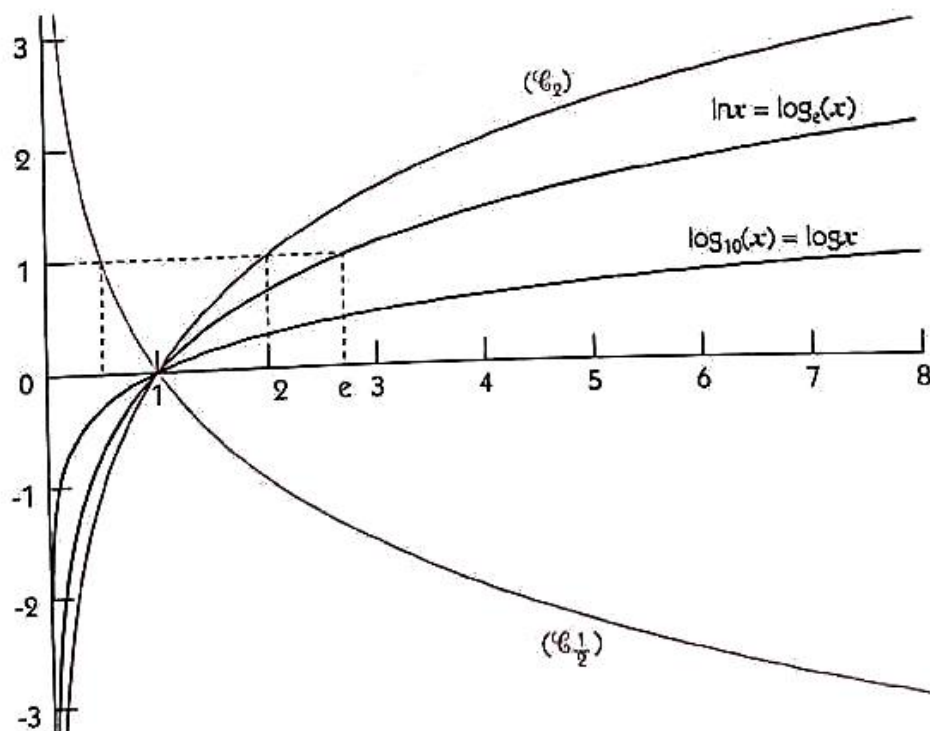
- Démontrer que les représentations graphiques $(\mathcal{C}_a)$ et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{a}})$ respectivement des fonctions $\log_a$ et $\log \frac{1}{a}$ sont symétriques par rapport à l'axe (OI) .

Pour cela, on justifiera que : pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f_{\frac{1}{a}}(x) = -f_a(x)$.

Construire les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$.

4. Représentations graphiques

La fonction logarithme népérien et la fonction logarithme décimal sont des cas particuliers de la fonction logarithme de base a .



Exercices

ENTRAÎNEMENT

Définition et propriété

Ensemble de définition

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

(1) $f(x) = \ln(2 - 3x)$ (2) $f(x) = \ln|2 - 3x|$

(3) $f(x) = \ln[(x + 5)^2]$ (4) $f(x) = \ln\sqrt{x + 5}$

(5) $f(x) = \ln(2x - 3) + \ln(5x - 2)$

(6) $f(x) = \ln\left(\frac{2x - 3}{5x - 2}\right)$ (7) $f(x) = \ln\left|\frac{2x - 3}{5x - 2}\right|$

Calcul d'images

2 À l'aide d'une calculatrice, donner l'arrondi d'ordre 4 de chacun des nombres suivants :

(1) $\ln(0,07)$ (2) $\ln(6,928)$

(3) $3\ln(1,04)$ (4) $\frac{1}{2}\ln(0,432)$

3 Calculer la valeur exacte de chacun des nombres suivants :

(1) $\ln(e^2)$ (2) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ (3) $\ln(\sqrt{e})$

(4) $\ln\left(\frac{e^4}{e}\right)$ (5) $\ln(e^2\sqrt{e})$ (6) $\ln(\sqrt{e})^3$

Transformation d'écriture

4 Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

(1) $\ln 32$ (2) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ (3) $2\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

(4) $\ln\sqrt{2}$ (5) $\ln(3\sqrt{2})$ (6) $2\ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

(7) $\ln 36 - 2\ln 12$ (8) $\ln 27 + 2\ln 8 - 3\ln 108$

5 Écrire sous forme de $\ln A$ chacun des nombres réels suivants :

(1) $3\ln 2 - \ln 7 + \ln 4$ (2) $\ln 5 - 3\ln 3 - \ln 2$

(3) $\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 9 - 2\ln 5$ (4) $\ln(0,1) + \ln 10 - \ln(0,001)$

(5) $\ln(1 + \sqrt{2}) + \ln(1 - \sqrt{2})$ (6) $\ln\left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{5 + \sqrt{3}}\right)$

6 Simplifier :

(1) $\ln(1 - \sqrt{2})^{10} + \ln(1 + \sqrt{2})^{10}$

(2) $\ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$

Propriété de fonctions $\ln$ ou

7 Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie ci-dessous est impaire.

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (2) $f(x) = \ln\left(\frac{a - x}{a + x}\right)$ [$a \in \mathbb{R}$]

Résolution d'équations

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $\ln(5 - 2x) = 0$ (2) $\ln(x - 3) = \ln(2 + x)$

(3) $\ln(x^2 - 4) = \ln(1 - 4x)$ (4) $\ln(x^2 - 2x + 2) = 1$

(5) $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(2 + x)$

(6) $\ln(5x + 2) - \ln(x + 2) = \ln(x - 2)$

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $\ln(2x - 3) + 2\ln(x + 1) = \ln(x - 1)$

(2) $3\ln(x + 1) = 1$ (3) $\ln\sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2}\ln x$

(4) $\ln\left|\frac{1}{2} + x\right| = \ln|x|$ (5) $\ln|x - 1| + \ln|2x + 1| = 0$

Résolution d'inéquations

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(1) $\ln(\ln x) > 0$ (2) $\ln x < 3\ln 2$

(3) $\ln(x^3 - x + 1) \geq \ln(2 - x)$ (4) $(1 - \ln x)(3 + \ln x) \geq 0$

(5) $(\ln x^2) \leq 1$ (6) $\ln(x^2 - 9) \leq 0$

Résolution de systèmes

11 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} x - y = -2 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$

Dérivée - Primitives - Limites

Calcul de limites

12 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonctions f pour les valeurs indiquées :

(1) $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \ln x$, en 0 et en $+\infty$

(2) $f : x \mapsto \frac{1}{\ln x}$, en 1 et en $+\infty$

(3) $f : x \mapsto \frac{1 - \ln x}{x}$, en 0 et en $+\infty$

(4) $f : x \mapsto x(1 - \ln x)$, en 0 et en $+\infty$

13 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonctions f pour les valeurs indiquées :

(1) $f : x \mapsto \ln(2 + x)$, en -2 et en $+\infty$

(2) $f : x \mapsto \ln(1 - x)$, en $-\infty$ et en 1

(3) $f : x \mapsto \ln(x^2 + 3x - 4)$, en 1 et en $+\infty$

(4) $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, en 0 et en $+\infty$

14 Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonctions f pour les valeurs indiquées :

(1) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x - 5}{x + 2}\right)$, en 5 et en $+\infty$

(2) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x - 1}{2 - x}\right)$, en 1 et en 2

(3) $f : x \mapsto (x - 2)\ln(x - 2)$, en 2 et en $+\infty$

15 Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln|x|)$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3x+2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x+3-4\ln x)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 3}{\ln x + 1}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right)$$

16 Calculer les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$$

17 Calculer les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} \quad (4) \lim_{x \rightarrow e} \frac{x \ln x - e}{x - e}$$

18 f est la fonction définie sur $]0; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

Vérifier que :

pour tout x strictement positif, $x(\ln x)^2 = (\sqrt{x} \ln x)^2$.

Déterminer les limites de f en 0 et en 1.

Détermination de dérivée

19 Pour chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous :

- Déterminer l'ensemble de définition D_f .
- Justifier que f est dérivable en tout élément de D_f et calculer $f'(x)$.

$$(1) f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1) \quad (2) f(x) = \ln(|1 - 3x|)$$

$$(3) f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} \quad (4) f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$$

$$(5) f(x) = \sqrt{\ln x} + 3x \quad (6) f(x) = \ln \sqrt{x} - 5x$$

20 1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = (x+1)[2\ln(x+1) + 3]$.

2. Démontrer que :
pour tout x de $]1; +\infty[$, $(x+1)f'(x) - f(x) = 2(x+1)$.

21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

22 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.

Détermination de primitives

23 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur K de la fonction f .

$$(1) f: x \mapsto \frac{3}{2-x}, \quad \text{avec } K =]2; +\infty[$$

$$(2) f: x \mapsto \frac{-4x-2}{x^2+x+1}, \quad \text{avec } K = \mathbb{R}$$

$$(3) f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}, \quad \text{avec } K =]0; +\infty[$$

$$(4) f: x \mapsto \frac{1}{x \ln x},$$

avec $K =]1; +\infty[$

24 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \ln x.$$

Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
En déduire une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $\ln$.

25 On donne une fonction rationnelle f définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)(1-x)}.$$

Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels

$$\text{que : } f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{1-x}.$$

Déterminer une primitive sur $]2; +\infty[$ de la fonction f .

26 On donne une fonction rationnelle f définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{3x^2+2x-2}{3x-1}.$$

Démontrer qu'il existe trois nombres réels a , b et c tels

$$\text{que : } f(x) = ax + b + \frac{c}{3x+1}.$$

Déterminer une primitive sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ et une primitive sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$ de la fonction f .

27 f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}.$$

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que :

pour tout x distinct de $-\frac{1}{2}$,

$$f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}.$$

2. En déduire les primitives de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

3. Déterminer la primitive F de f sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ vérifiant $F(0) = 1$.

Étude de fonctions

Tracé de courbes

28 Dans chacun des cas ci-dessous, écrire f comme composée de fonctions, l'une étant la fonction logarithme népérien.

En déduire (sans calculer sa dérivée) les variations de f .
Tracer sa courbe représentative dans la plan muni d'un repère orthogonal, en expliquant comment elle se déduit de la courbe de la fonction $\ln$.

$$(1) f: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(2) f: x \mapsto 3 - \ln x$$

$$(2) f: x \mapsto |\ln x|$$

$$(3) f: x \mapsto \ln|x|$$

$$(4) f: x \mapsto \ln(x+3)$$

$$(5) f: x \mapsto \ln(x-1) + 2$$

Étude de fonctions

29 Dans chacun des cas ci-dessous étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$(1) f(x) = \ln(2x+1)$$

$$(2) f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$(3) f(x) = \ln(1-x^2)$$

$$(4) f(x) = x \ln x - x$$

$$(5) f(x) = \ln(|x+1|)$$

$$(6) f(x) = x - \ln x$$

30 Étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \ln x$.

($\mathcal{C}$) étant la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé, donner une équation de la tangente à ($\mathcal{C}$) au point A de ($\mathcal{C}$) d'abscisse 1.

31 On considère la fonction f définie sur $] -2 ; 2[$ par : $f(x) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right)$.

1. a) Démontrer que f est impaire.

b) Étudier les variations de f sur $[0 ; 2[$.

c) Construire la représentation graphique ($\mathcal{C}$) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

2. a) Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{3}$ admet une unique solution dans $] -2 ; 2[$.

b) Déterminer la valeur exacte de cette solution.

32 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x + \ln |1-x|}{1-x}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .

2. On désigne par ($\mathcal{C}$) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

Démontrer que ($\mathcal{C}$) admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

Construire ($\mathcal{C}$).

Utilisation d'une fonction auxiliaire.

33 1. Étudier le sens de variation de la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x + 1 - \ln x$.

En déduire le signe de $g(x)$.

2. Étudier la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x.$$

3. Justifier que f détermine une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

4. Étudier le signe de $f(x) - \ln x$ et calculer :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \ln x].$$

5. Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) construire successivement la représentation graphique de $\ln$, celle de f puis celle de f^{-1} , réciproque de la bijection déterminée par f .

34 1. Étude d'une fonction auxiliaire.

La fonction g est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6.$$

En utilisant le sens de variation de g , déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

2. Étude de la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1.$$

a) Utiliser le résultat de la question 1. pour déterminer le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .

b) La courbe ($\mathcal{C}$) représentation graphique de f admet pour asymptote (Δ) ; donner une équation de (Δ). Étudier les positions relatives de ($\mathcal{C}$) et (Δ).

3. Recherche de primitives.

a) Déterminer la dérivée de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = 6\sqrt{x} \ln x$.

b) En déduire la primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$, qui s'annule en 1.

Positions relatives de deux courbes

35 On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x$, et on désigne par ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Étude d'une fonction auxiliaire.

a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$.

b) Vérifier que $g(1) = 0$.

c) En déduire le signe de g sur $]0 ; +\infty[$.

2. Étude de f .

a) Démontrer que :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) Déduire de la question 1. le signe de $f'(x)$ et les variations de f .

c) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

d) Étudier les variations de f .

3. Représentations graphiques.

a) Étudier suivant les valeurs de x la position relative de ($\mathcal{C}$) par rapport à la courbe (Γ) d'équation $y = \ln x$.

b) Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) - \ln x$.

Interpréter graphiquement le résultat.

c) Construire la courbe (Γ), puis la courbe ($\mathcal{C}$).

36 A - On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x$.

1. Étudier les variations de la fonction g .

2. Déduire de l'étude précédente le signe de $g(x)$.

B - On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1 + \ln x}{x}.$$

On désigne par ($\mathcal{C}$) la représentative graphique de f .

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Justifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$).

Déterminer la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à (D) sur $]0 ; +\infty[$.

Démontrer en particulier que (D) coupe ($\mathcal{C}$) en un point unique A que l'on déterminera.

3. Étudier les variations de la fonction f .

4. Déterminer les valeurs exactes et des valeurs approchées à 10^{-2} près de $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes :

$$0,3 \quad ; \quad \frac{1}{e} \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 7.$$

5. Déterminer le point A de ($\mathcal{C}$) où la tangente (T) est parallèle à (D).

Fonction exponentielle népérienne

Dès l'antiquité, les mathématiciens ont utilisé les exposants pour l'écriture des grands nombres.

Cependant, c'est seulement entre le XV^e et le XVI^e siècle qu'intervient la création des noms : millions et milliard.

Comment lire le plus grand nombre écrit avec trois chiffres ?

Ce nombre est 9^{99} qui a 369 693 100 chiffres !

La notation exponentielle n'a été introduite qu'au XVI^e siècle et l'on ne peut oublier l'apport du mathématicien écossais John Neper.

C'est au $XVIII^e$ siècle, après la mise en place du concept de fonction, qu'Euler (1707-1783) définit clairement les fonctions exponentielles et puissances.

Ces fonctions sont depuis très utilisées, car elles décrivent et permettent d'étudier de nombreux phénomènes dans des domaines variés : chimie, biologie, démographie, économie...



Jean Neper
mathématicien écossais - 1550-1617.

SOMMAIRE

1. Définition - Propriétés algébriques	106
2. Dérivées - Primitives - Limites	110
3. Exemples d'études de fonctions	114

1

Définitions – Propriétés algébriques

1.1. Définition et propriétés algébriques



Exploration par les touches $\ln$ et e^x d'une calculatrice

La touche e^x comme la touche $\ln$ d'une calculatrice détermine une fonction. Nous allons utiliser la démarche présentée au début du chapitre précédent pour introduire une autre nouvelle fonction élémentaire à partir de la fonction $\ln$. Ici encore, les conjectures émises à partir des résultats issus des manipulations, seront contrôlées par des démonstrations du cours.

- Compléter les tableaux ci-dessous ; observer les résultats et émettre des conjectures sur la bijectivité des fonctions.

a	0,7	1	3	8,4	15,9	28,3	102	271	465
$(a) (\ln) (e^x)$									

a	-20	-16	-5,3	-1,9	0	5,4	7,2	8,1	9,6
$(a) (e^x) (\ln)$									

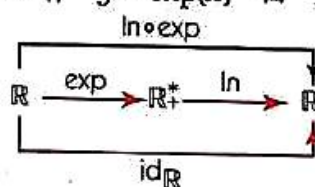
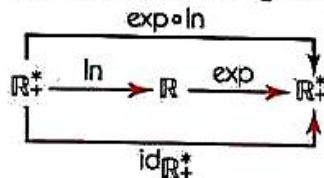
Définition

La fonction $\ln$ étant une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.

Définition

On appelle *fonction exponentielle népérienne*, l'application réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note : $\exp$.

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, pour tout y élément de $\mathbb{R}^+$, $y = \exp(x) \Leftrightarrow \ln y = x$



Conséquences immédiates de la définition – Propriétés algébriques

Activité 1

Les fonctions $\ln$ et $\exp$ étant des bijections réciproques,

- calculer $\exp(0)$ et $\exp(1)$;
- donner le signe de $\exp(x)$, x étant un nombre réel quelconque.

Activité 2

De la définition de la fonction $\exp$, déduire que la fonction $\exp$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.

Traduire cette stricte croissance en complétant l'égalité et l'inégalité suivantes, a et b étant des nombres réels :

$$\begin{aligned} \exp(a) &= \exp(b) && \Leftrightarrow && \dots \\ \exp(a) &< \exp(b) && \Leftrightarrow && \dots \end{aligned}$$

Activité 3

a et b sont des nombres réels, r un nombre rationnel.

On veut démontrer la propriété fondamentale (1) et ses conséquences (2), (3) et (4) ci-dessous.

- | | | |
|--|---|---|
| (1) $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$ | ; | (2) $[\exp(a)]^r = \exp(ar)$ |
| (3) $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$ | ; | (4) $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ |

Pour cela, on pourra comparer le logarithme népérien des deux membres de chaque égalité.

Notation e^x

Soit r un nombre rationnel. On a : $\ln e^r = r \ln e = r$.

$\ln$ et $\exp$ étant des bijections réciproques : pour tout nombre rationnel r , $\ln e^r = r \Leftrightarrow e^r = \exp(r)$.

On convient d'étendre aux nombres réels cette écriture. D'où la notation suivante :

Pour tout nombre réel x , $\exp(x) = e^x$.

Remarques

- Sur la calculatrice, la touche e^x donne accès à la fonction $\exp$; elle donne : $e \approx 2,718\,281\,828$.
- Avec la notation e^x , les propriétés algébriques se traduisent par les règles de calcul sur les puissances.

Exemples

$$e^{2,7} \times \sqrt{e^3} = e^{2,7} \times e^{\frac{3}{2}} = e^{2,7+1,5} = e^{4,2} \quad ; \quad \frac{e^\pi}{e^{\sqrt{3}}} = e^{\pi-\sqrt{3}}.$$

Tableau récapitulatif des propriétés de $\ln$ et de $\exp$

① Les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont des bijections réciproques

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto e^x$$

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, pour tout y élément de $\mathbb{R}_+^*$,
 $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $\ln e^x = x$

Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln x} = x$

$$\ln 1 = 0$$

;

$$\ln e = 1$$

$$e^0 = 1$$

;

$$e^1 = e$$

② Les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont strictement croissantes

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}$,

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Pour tous a élément de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln a < 0 \Leftrightarrow a < 1$$

$$\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$$

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$,
 $e^x > 0$

③ Les fonctions $\ln$ et $\exp$ possèdent les propriétés algébriques suivantes

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{R}$,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

Exercice

1. a Écrire sous la forme la plus simple possible :

(1) $\ln \sqrt{e}$

(2) $\frac{1}{2} \ln e^{8,6}$

(3) $e^{\frac{1}{2} \ln 6}$

(4) $e^{-\ln 5}$

(5) $e^{\ln 3 - \ln 7}$

(7) $\ln \sqrt{e^5}$

(9) $e^{\ln x} - \ln e^x$

(6) $e^{1 - \ln 5}$

(8) $\ln e^{x^2}$

(10) $e^{\ln(x-1)} e^{-\ln x}$

1.2. Équations – Inéquations

Exemples d'équations et d'inéquations des types $e^{u(x)} = a$; $e^{u(x)} < a$

Pour résoudre de telles équations et inéquations, on peut prendre le logarithme népérien de leurs membres.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :

(E) $e^{x-3} = 4$

(I) $e^{x-3} < 4$

Résolution de (E)

(E)
$$\begin{aligned} e^{x-3} &= 4 \\ \ln(e^{x-3}) &= \ln 4 \\ x-3 &= \ln 4 \\ x &= 3 + \ln 4 \\ S_{(E)} &= \{3 + \ln 4\} \end{aligned}$$

Résolution de (I)

(I)
$$\begin{aligned} e^{x-3} &< 4 \\ \ln(e^{x-3}) &< \ln 4 \\ x-3 &< \ln 4 \\ x &< 3 + \ln 4 \\ S_{(I)} &=]-\infty ; 3 + \ln 4[\end{aligned}$$

- Justifier les deux premières étapes de la résolution de l'équation (E) et de l'inéquation (I).

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation et les inéquations suivantes :

(E) $e^{x+6} = -2$

(I) $e^{x+6} < -2$

(J) $e^{x+6} > -2$

On sait que l'exponentielle d'un nombre réel strictement positif est un nombre réel strictement positif, donc,

- l'équation (E) et l'inéquation (I) n'ont pas de solution : $S_{(E)} = \emptyset$ et $S_{(I)} = \emptyset$.
- l'inéquation (J) est vérifiée pour tout nombre réel : $S_{(J)} = \mathbb{R}$.

Exemples d'équations et d'inéquations des types $\ln u(x) = a$; $\ln u(x) < a$

Pour résoudre de telles équations et inéquations, on peut prendre l'exponentielle népérienne de leurs membres.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :

(E) $\ln(x+3) = -2$

(I) $\ln(x+3) < -2$

Résolution de (E)

(E) Ensemble de validité : $] -3 ; +\infty[$

$$\begin{aligned} \ln(x+3) &= -2 \\ \exp[\ln(x+3)] &= \exp(-2) \\ x+3 &= e^{-2} \\ x &= -3 + e^{-2} \\ S_{(E)} &= \{-3 + e^{-2}\} \end{aligned}$$

Résolution de (I)

(I) Ensemble de validité : $] -3 ; +\infty[$

$$\begin{aligned} \ln(x+3) &< -2 \\ \exp[\ln(x+3)] &< \exp(-2) \\ x+3 &< e^{-2} \\ x &< -3 + e^{-2} \\ S_{(I)} &=] -3 ; -3 + e^{-2}[\end{aligned}$$

- Justifier les deux premières étapes de la résolution de l'équation (E) et de l'inéquation (I).

Exemples d'équations et d'inéquations polynomiales

Ce sont des équations et inéquations se ramenant aux types :

$a(\ln x)^2 + b \ln x + c = 0$; $a(\ln x)^2 + b \ln x + c < 0$

$a(e^x)^2 + b e^x + c = 0$; $a(e^x)^2 + b e^x + c > 0$

On peut se ramener à la résolution d'équations du second degré à l'aide d'une inconnue auxiliaire.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :

(E) $3(\ln x)^2 + 5\ln x - 2 = 0$

(I) $3(\ln x)^2 + 5\ln x - 2 < 0$

(E) et (I) ont le même ensemble de validité : $]0; +\infty[$.

Pour (E) et (I), on choisit la même inconnue auxiliaire X définie par : $X = \ln x$.

Considérons donc les équations suivantes :

(E) $3(\ln x)^2 + 5\ln x - 2 = 0$

(E') $3X^2 + 5X - 2 = 0$

Le nombre réel a est une solution de (E)

équivalent à

le nombre réel $\ln a$ est une solution de (E')

or, la résolution de (E') donne : $X = -2$; $X = \frac{1}{3}$.

Les solutions de (E) sont celles des équations (1) et (2).

(1) $\ln x = -2$

$x = e^{-2}$

(2) $\ln x = \frac{1}{3}$

$x = e^{1/3}$

donc, l'ensemble des solutions de (E) est :

$\{e^{-2}; e^{1/3}\}$

Considérons donc les inéquations suivantes :

(I) $3(\ln x)^2 + 5\ln x - 2 < 0$

(I') $3X^2 + 5X - 2 < 0$

Le nombre réel a est une solution de (I)

équivalent à

le nombre réel $\ln a$ est une solution de (I')

or, la résolution de (I') donne : $-2 < X < \frac{1}{3}$.

Les solutions de (I) sont celles du système (Σ).

(Σ) $-2 < \ln x < \frac{1}{3}$

$e^{-2} < x < e^{1/3}$

donc, l'ensemble des solutions de (I) est :

$]e^{-2}; e^{1/3}[$

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation suivantes :

(E) $3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} = 0$

(I) $3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} > 0$

(E) et (I) ont le même ensemble de validité : $\mathbb{R}$.

On transforme l'écriture de (E) et (I) en multipliant leurs membres par e^x (en effet $e^x > 0$).

Pour les équations obtenues, on choisit alors la même inconnue auxiliaire X définie par : $X = e^x$.

Considérons donc les équations suivantes :

(E) $3(e^x)^2 + 5e^x - 2 = 0$

(E') $3X^2 + 5X - 2 = 0$

Le nombre réel a est une solution de (E)

équivalent à

le nombre réel e^a est une solution de (E')

or, la résolution de (E') donne : $X = -2$; $X = \frac{1}{3}$.

Les solutions de (E) sont celles des équations (1) et (2).

(1) $e^x = -2$

(1) n'a pas de solution

(2) $e^x = \frac{1}{3}$

$x = -\ln 3$

donc, l'ensemble des solutions de (E) est :

$\{-\ln 3\}$

Considérons donc les inéquations suivantes :

(I) $3(e^x)^2 + 5e^x - 2 > 0$

(I') $3X^2 + 5X - 2 > 0$

Le nombre réel a est une solution de (I)

équivalent à

le nombre réel e^a est une solution de (I')

or, la résolution de (I') donne : $-2 < X < \frac{1}{3}$.

Les solutions de (I) sont celles des inéquations (1) et (2).

(1) $e^x < -2$

(1) n'a pas de solution

(2) $e^x > \frac{1}{3}$

$x > -\ln 3$

donc, l'ensemble des solutions de (I) est :

$] -\ln 3 ; +\infty[$

Exercices

1. b Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

(1) $e^{3x-2} = 5$

(2) $e^{2x+1} = -3$

(3) $2e^{2x+2} - 7e^{x+1} + 3 = 0$

(4) $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0$

1. c Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

(1) $e^{7x+8} > 2$

(2) $e^{4x-1} < -8$

(3) $e^{5x+2} > -2$

(4) $(\ln x)^3 - \ln x \leq 0$

2

Dérivées – Primitives – Limites

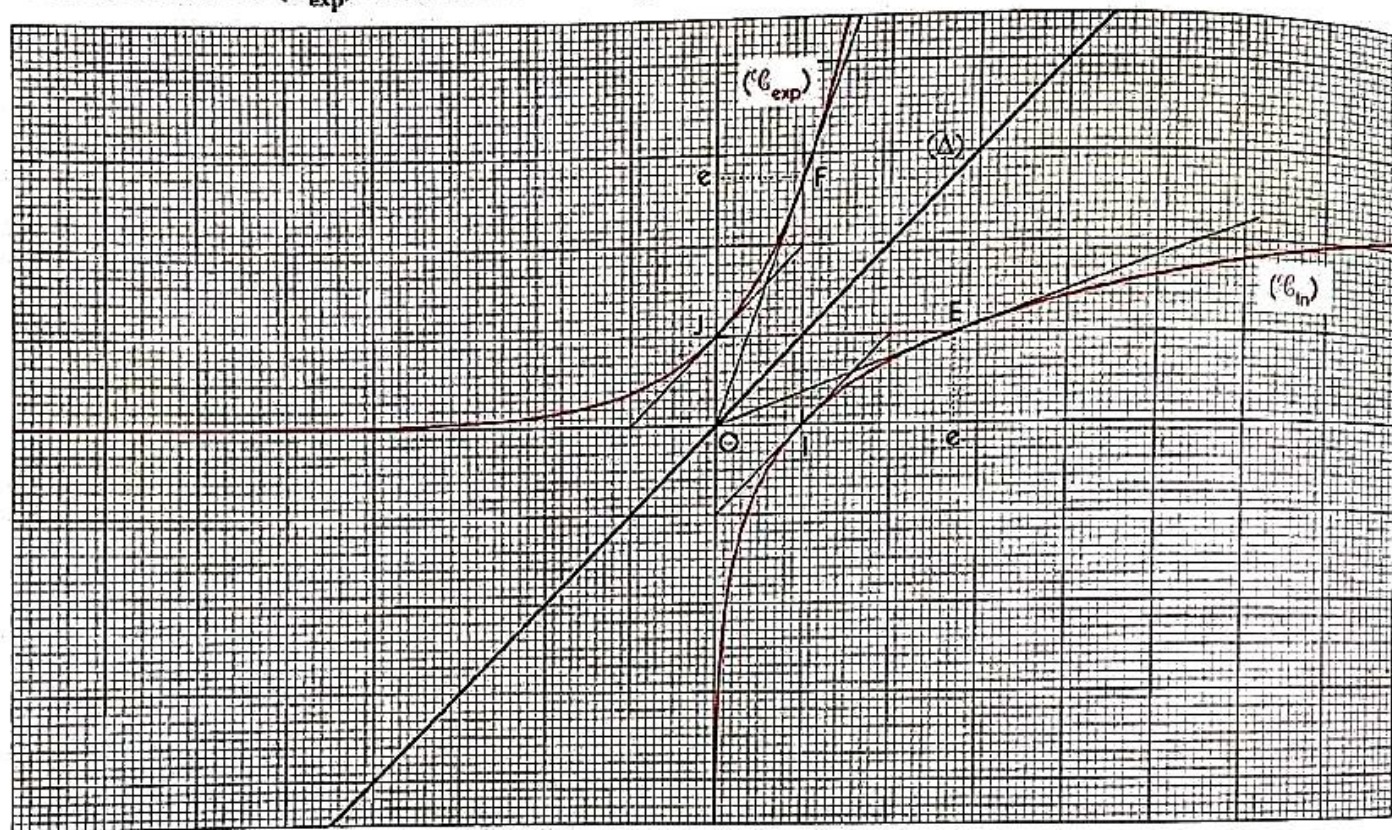
2.1. Représentation graphique et variations de la fonction exp

Représentation graphique de exp

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

Les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont des bijections réciproques, leurs représentations graphiques $(\mathcal{C}_{\ln})$ et $(\mathcal{C}_{\exp})$ sont donc symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

Construction de $(\mathcal{C}_{\exp})$ et ses droites remarquables



Les droites remarquables de $(\mathcal{C}_{\exp})$

On a vu que la courbe $(\mathcal{C}_{\ln})$ admet :

- une tangente au point $I(1; 0)$ de coefficient directeur 1 ;
- une tangente au point $E(e; 1)$ passant par le point O ;
- une asymptote verticale, la droite (OJ) .

On en déduit respectivement que $(\mathcal{C}_{\exp})$ admet :

- une tangente au point $J(0; 1)$ de coefficient directeur 1 ;
- une tangente au point $F(1; e)$ passant par le point O ;
- une asymptote horizontale, la droite (OI) .

- Vérifier graphiquement que : pour tout nombre réel x , $e^x > x + 1$ et $e^x > ex$.

Branche infinie en $+\infty$ de $(\mathcal{C}_{\exp})$

On a vu que la courbe $(\mathcal{C}_{\ln})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OI) .

On en déduit que la courbe $(\mathcal{C}_{\exp})$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ) .

Tableau de variation de exp

Les fonctions $\ln$ et $\exp$ étant des bijections réciproques, leurs tableaux de variations se déduisent l'une de l'autre.

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp(x)$	0	1	e	$+\infty$

2.2. Dérivées – Primitives – Limites

Dérivée de la fonction exp

■ Activité

On veut utiliser la représentation graphique ($\%_{\text{exp}}$) et le calcul pour trouver le nombre dérivé en a de la fonction exp.

Pour cela,

- vérifier que le taux de variation en a de la fonction exp est la fonction : $h \mapsto e^a \times \frac{e^h - 1}{h}$
- donner une traduction géométrique de la fonction : $h \mapsto \frac{e^h - 1}{h}$ et en déduire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$;
- calculer $(\exp)'(a)$.

Propriété

La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa dérivée.

Pour tout nombre réel x , $(\exp)'(x) = e^x$.

Démonstration

La fonction $\ln$ est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus, sa dérivée ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$. Sa bijection réciproque, la fonction exp, est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons la dérivée de exp.

Soit x un nombre réel.

- En appliquant la formule $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, on obtient : $(\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'[\exp(x)]} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$.
- En appliquant la formule $(f \circ f^{-1})'(x) = x'$, on obtient ; $\ln'(e^x) \times \exp'(x) = 1$.

Dérivée de la fonction composée $\exp \circ u$

Notation

e^u désignera la fonction composée $\exp \circ u$.

La dérivabilité des fonctions composées permet d'obtenir la propriété suivante :

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K , alors e^u est dérivable sur K et $(e^u)' = u'e^u$.

Exemple

Considérons les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = e^{5x+3}$; $g(x) = e^{\cos x}$.

f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées f' , g' sont définies par : $f'(x) = 5e^{5x+3}$; $g'(x) = -\sin x e^{\cos x}$.

Recherche de primitives comportant exp

Activité

Dans chacun des cas suivants, f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous.

Déterminer la dérivée de f , en déduire une primitive de g .

- | | | |
|---------------------------|---|----------------------------|
| (1) $f(x) = e^{-3x+7}$ | ; | $g(x) = e^{-3x+7}$ |
| (2) $f(x) = e^{\sin x}$ | ; | $g(x) = \cos x e^{\sin x}$ |
| (3) $f(x) = e^{x^2+2x-1}$ | ; | $g(x) = (x+1)e^{x^2+2x-1}$ |

La dérivée de la fonction e^u permet de déterminer de nouvelles primitives.

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K ,
alors la fonction e^u est une primitive sur K de la fonction $u'e^u$.

Les limites de référence

Propriétés

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration

– Égalités (1) et (2) : (voir paragraphe 2.1).

– Utilisons la limite de la composée de fonction pour les égalités (3) et (4).

Égalité (3) :

On a : pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $\frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{\ln e^x}$

or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln e^x} = +\infty$.

Égalité (4)

On a : pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $x e^x = e^x \times \ln e^x$,

or : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln e^x = 0$.

– Égalité (5) : $\frac{e^x - 1}{x}$ est le taux de variation en 0 de $\exp$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \exp'(0)$.

Calculs de limites

■ Utilisation de la composition des fonctions ou des opérations sur les fonctions

f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = e^{|2x-3|}$; $g(x) = \frac{2e^x + 3}{e^x - 1}$.
Étudier la limite de f en $-\infty$. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en 0.

Limite de f en $-\infty$

Considérons la fonction $u : x \mapsto |2x-3|$.

Décomposons la fonction f (voir schéma) ; $f = \exp \circ u$.

Or : $\lim_{x \rightarrow -\infty} |2x-3| = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{|2x-3|} = +\infty$.

Limite de g en $+\infty$

g a pour ensemble de définition $\mathbb{R}^*$ car : $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Considérons la fonction $v : x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$.

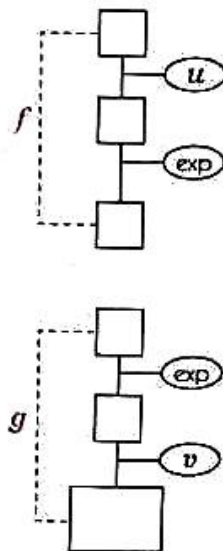
Décomposons la fonction g (voir schéma) ; $g = v \circ \exp$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2X+3}{X-1} = 2$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 3}{e^x - 1} = 2$.

Limite de g en 0

Pour tout élément de $\mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{2e^x + 3}{e^x - 1} = (2e^x + 3) \times \frac{1}{e^x - 1}$
et on a : $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x + 3) = 5$; $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$.



Le signe de $(e^x - 1)$ permettra donc de calculer la limite à gauche et la limite à droite en 0 de $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$.

On a : $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$

$$\Leftrightarrow x > 0,$$

on obtient le tableau de signes ci-contre ;

donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

d'où : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + 3}{e^x - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + 3}{e^x - 1} = +\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+

■ Exemples d'utilisation de transformation d'écriture pour se ramener à une limite de référence

Calculons les limites suivantes :

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 3x)e^x$ (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1}$

Les opérations sur les limites conduisent à des formes indéterminées. Ramenons-nous à des limites de référence.

• Une transformation d'écriture permet de calculer les limites (1) et (2) en utilisant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

En effet,

– pour tout nombre réel x , $x - e^x = x(1 - \frac{e^x}{x})$

– pour tout x élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{e^x}{x-1} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x-1}$.

• Une transformation d'écriture permet de calculer la limite (3) en utilisant : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

En effet,

– pour tout nombre réel x , $(5 - 3x)e^x = 5e^x - 3xe^x$.

• On remarque que la fonction $x \mapsto \frac{e^x - e}{x-1}$ est le taux de variation en 1 de la fonction exp,

donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1} = (\exp)'(1) = e$.

Exercices

2. a Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par une formule explicite. Déterminer l'ensemble de définition de f et sa dérivée f' .
- (1) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; (2) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 3}$

2. b Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par :
- (1) $f(x) = e^{5x}$
 (2) $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x-1}$
 (3) $f(x) = e^{3x+4}$

2. c Calculer les limites suivantes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$
 (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{7x-3}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - x}$
 (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (9x-3)e^x$
 (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{5x-2}$
 (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x}-1}{5e^x+4}$
 (7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x+3}$

3

Exemples d'études de fonctions

3.1. Fonction impaire

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Variations de la fonction f

■ Ensemble de définition

On a : pour tout nombre réel x , $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$.

d'où : $e^x + e^{-x} \neq 0$

donc :

$$D_f = \mathbb{R}$$

■ Ensemble d'étude

On vérifie que f est une fonction impaire.

On peut donc prendre pour ensemble d'étude l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

■ Dérivée

– La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

– Soit x un nombre réel,

$$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

donc :

$$\text{pour tout nombre réel } x, f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

– La dérivée f' est donc positive sur $\mathbb{R}$.

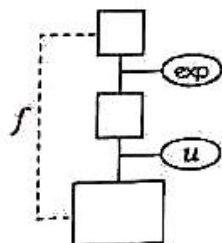
■ Limite en $+\infty$

Le quotient de la limite en $+\infty$ donne une forme indéterminée.

Transformons l'écriture de $f(x)$ en mettant e^{-x} en facteur au numérateur et au dénominateur.

$$\text{On a : pour tout nombre réel } x, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

La fonction f est donc la composée de $\exp$ suivie de la fonction rationnelle $u : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;



$$f = u \circ \exp$$

$$\text{or : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} = 1 \end{cases}$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

■ Tableau de variation sur $[0 ; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	1	+
$f(x)$	0	1

Représentation graphique de la fonction f

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . Désignons par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f .

■ Asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$

On a vu que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale, la droite d'équation : $y = 1$.

■ Tangente au point O

La tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point O a pour coefficient directeur 1.

■ Construction de $(\mathcal{C}_f)$

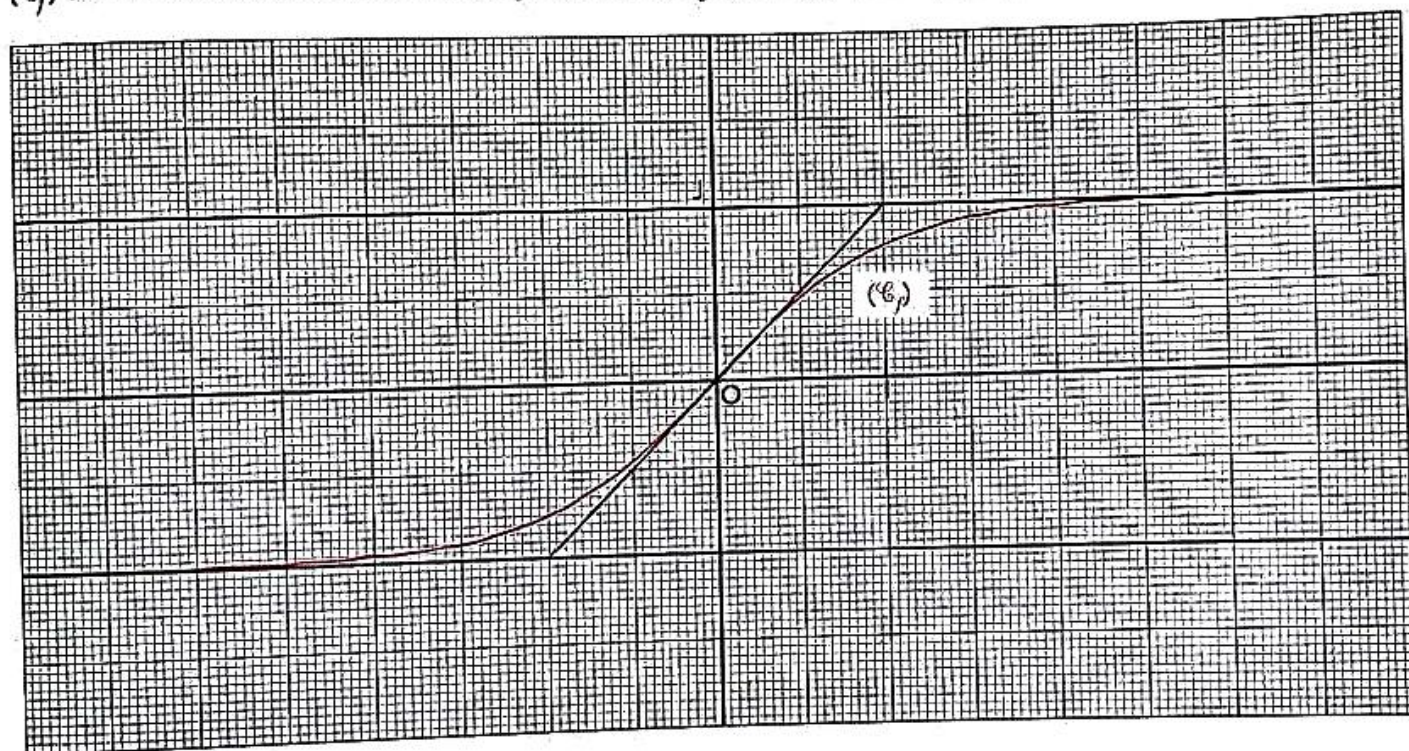
Tableau de valeurs approchées

x	0	0,5	1	1,5	1,9	2,2
$f(x)$	0	0,46	0,76	0,9	0,95	0,97

Fenêtre de construction

$$\begin{array}{ll} x_{\min} = -3 & ; y_{\min} = -1 \\ x_{\max} = 3 & ; y_{\max} = 1 \end{array}$$

L'étude précédente permet d'obtenir la représentation graphique $(\mathcal{C}_0)$ de la restriction de f à $[0 ; +\infty[$.
 $(\mathcal{C}_f)$ est alors obtenue à l'aide d'une symétrie de $(\mathcal{C}_0)$ par rapport à l'origine O du repère.



Propriétés géométriques de $(\mathcal{C}_f)$

■ Centre de symétrie

On a vu que f est une fonction impaire, par conséquent le point O est bien un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

■ Point d'inflexion

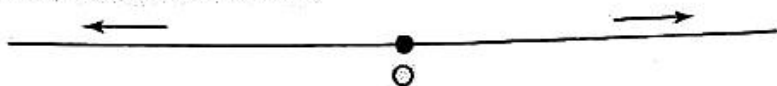
Puisque le centre de symétrie O appartient à $(\mathcal{C}_f)$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ traverse sa tangente en ce point. (On dit que le point O est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$).

3.2. Fonctions définies par intervalles

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty ; 0], & f(x) = x e^x \\ \text{pour } x \in]0 ; +\infty[, & f(x) = x \ln x. \end{cases}$

Variations de la fonction f

■ Ensemble de définition



$$D_f = \mathbb{R}$$

■ Limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

■ Dérivée

• Sur $]-\infty ; 0]$, f coïncide avec la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x e^x$.
 g étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, f est donc dérivable sur $]-\infty ; 0]$, dérivable à gauche en 0 et on a :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } x \text{ élément de }]-\infty ; 0[, & f'(x) = g'(x) = (1+x)e^x \\ f'(0) = g'(0) &= 1 \end{aligned}$$

d'où : pour tout x élément de $]-\infty ; 0]$, $f'(x)$ est du signe de $(1+x)$.

• Sur $]0 ; +\infty[$, f coïncide avec la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = x \ln x$.
 h étant une fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$, f est donc dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on a :

$$\text{pour tout } x \text{ élément de }]0 ; +\infty[, f'(x) = h'(x) = 1 + \ln x$$

d'où : pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $1 + \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$.

• Étude de la dérivabilité à droite en 0 de f

La fonction h n'est pas définie en 0. Utilisons donc la définition de la dérivabilité à droite en 0.

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{h(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 0

$$\text{et } \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$$

■ Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	e^{-1}	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	1	$-\infty$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$-e^{-1}$	0	$-e^{-1}$	$+\infty$			

Représentation graphique de la fonction f

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . Désignons par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f .

■ Tangentes

- La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet des tangentes horizontales aux points $E(-1 ; -e^{-1})$ et $F(e^{-1} ; -e^{-1})$.
- La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point O une tangente à gauche de coefficient directeur 1 et une tangente à droite verticale.

■ Asymptotes

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet en $-\infty$ une asymptote horizontale, la droite (OI).

■ Construction de $(\mathcal{C}_f)$

Tableau des valeurs approchées

x	-4	-1	-0,6	-0,4	0	0,2	0,6	1	1,2	1,4	2
$f(x)$	0,07	0,36	-0,32	-0,26	0	-0,32	-0,30	0	0,21	0,47	1,38

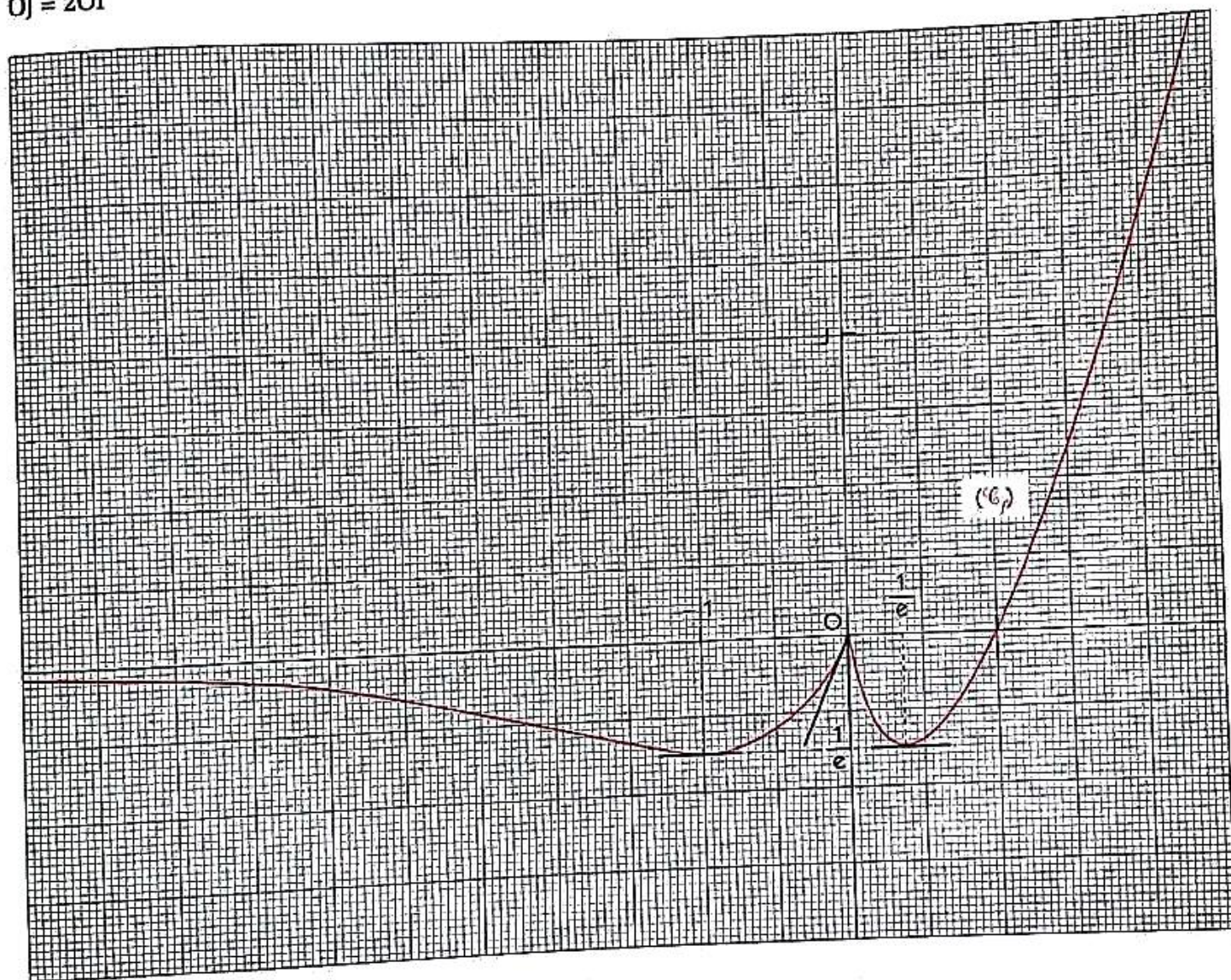
Fenêtre de construction

$$x_{\min} = -4 \quad ; \quad y_{\min} = -1$$

$$x_{\max} = 2,5 \quad ; \quad y_{\max} = 2$$

Repère orthogonal

OJ = 2OI



■ Propriétés géométriques de $(\mathcal{C}_f)$

■ Branches paraboliques

On a vu que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Soit M un point de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse x suffisamment grand. Étudions la position limite de (OM) lorsque x tend vers $+\infty$.

Le coefficient de (OM) est $\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).