

TP1 Étude de la continuité et de la dérivabilité en x_0

Ce TP a pour objet de fournir un exemple de fonction nécessitant une étude spécifique à une extrémité de l'intervalle sur lequel elle est définie.

Exercice commenté

f est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]0 ; 1], & f(x) = (1 - e^{-x}) \ln x \\ & f(0) = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité en 0.

■ Étude de la continuité en 0

Il s'agit de calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et de comparer cette limite à $f(0)$.

En utilisant le produit des limites on obtient la forme indéterminée $[0 \times \infty]$.

— Transformons l'écriture de $f(x)$ afin d'utiliser des limites de référence.

$$f(x) = (x \ln x) \frac{e^{-x} - 1}{-x}.$$

— On sait que : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

— On constate que : $x \mapsto \frac{e^{-x} - 1}{-x}$ est la composée de $x \mapsto -x$ suivie de $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$;

$$\text{or : } \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = \exp'(0) = 1$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1.$$

$$\text{— Par conséquent : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \right) = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

f est continue en 0

■ Étude de la dérivabilité en 0

Il s'agit de calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-x}) \ln x}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{-x}) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{-x}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

$$f'(0) = 0$$

TP2 Un exemple d'étude de fonction

Ce TP a pour objet de présenter un exemple d'étude de fonction comportant des méthodes classiques et astucieuses d'étude de signe, de changement d'écriture, d'étude de limites, etc.

Exercice commenté

Étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$.

■ Variations de la fonction f

Ensemble de définition D_f de f

Soit x un nombre réel.

$$x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 + e^{-x} > 0$$

Or nous ne savons pas résoudre algébriquement l'inéquation (I) $x + 1 + e^{-x} > 0$.
 Pour cela, étudions le sens de variation de la fonction u de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $u(x) = x + 1 + e^{-x}$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

pour tout nombre réel x , $u'(x) = 1 - e^{-x}$.

Le signe de $1 - e^{-x}$ est donné par la résolution de l'inéquation : $1 - e^{-x} \geq 0$

On obtient : $e^{-x} \leq 1$

$$-x \leq 0 \quad (\text{car exp est croissante})$$

$$x \geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$			

Le tableau de variation de u montre que :

pour tout nombre réel x , $u(x) > 0$

Par conséquent, $D_f = \mathbb{R}$.

Décomposition de f

La fonction f est la composée de u suivie de $\ln$: $f = \ln \circ u$.

Cette décomposition de f permettra alors de déterminer la dérivée et de calculer les limites de f .

Limites de f

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$; d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour le calcul de la limite en $-\infty$ de u , la somme des limites donne la forme indéterminée : $\infty - \infty$.
 Ramenons-nous à une limite de référence par une transformation d'écriture.

On a : $u(x) = x + 1 + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x + e^x + 1}{e^x}$ (1) ; d'où : $\ln(u(x)) = \ln(xe^x + e^x + 1) - \ln(e^x)$

Pour tout nombre réel x , $f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1)$ (2)

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + e^x + 1) = 1$; d'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Dérivée

u étant une fonction strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f égale à $\ln \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\text{pour tout nombre réel } x, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

f' est donc du signe de u' .

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

■ Représentation graphique ($\mathcal{C}_f$) de f

Étude de la branche infinie en $-\infty$

L'écriture (2) montre que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 0$.

La courbe ($\mathcal{C}_f$) admet en $-\infty$ une asymptote oblique, la droite (D) d'équation $y = -x$.

Étude de la branche infinie en $+\infty$

L'écriture (1) de $u(x)$ ne permet pas d'étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$

On a : $u(x) = x + 1 + \frac{1}{e^x} = x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}\right)$ (3) ; d'où : $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \times \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}\right)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}\right) = 1$; d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

La courbe ($\mathcal{C}_f$) admet en $+\infty$ une direction parabolique de direction (OI).

Position relative de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (D)

$$\text{Soit } x \text{ un nombre réel. } (f(x) - (-x)) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(xe^x + e^x + 1) \geq 0$$

$$(x+1)e^x + 1 \geq 1$$

$$x+1 \geq 0$$

Par conséquent, ($\mathcal{C}_f$) et (D) sont sécantes au point A $(-1 ; 1)$

pour $x > -1$, ($\mathcal{C}_f$) est au-dessus de (D) ; pour $x < -1$, ($\mathcal{C}_f$) est en dessous de (D).

- Construire ($\mathcal{C}_f$).

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Définition et propriétés algébriques

Simplifications d'écritures

1 x étant un nombre réel, simplifier les expressions suivantes :

(1) $e^{3\ln 5}$ (2) $e^{\ln 2 + \ln 5}$ (3) $\ln(e^{3x})$ (4) $\ln(3e^{6x})$

(6) $\frac{e^x - 1}{e^x} \times \ln e^3 \times e^{\ln 3} + 2 \ln(\ln e)$ (7) $e^{-\ln 2}$

2 x désigne un nombre réel strictement positif. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

(1) $e^x + \ln x$ (2) $e^{\ln(x-1)} e^{-\ln x}$ (3) $\frac{e^{\ln x}}{\ln(e^x)}$ (4) $\frac{e^{\ln x}}{\ln(e^{x^2})}$

Résolution d'équations

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $e^{3x+1} = 7$ (2) $e^{x-3} = 1$ (3) $e^{2x-1} = 6$
 (4) $e^{-x-4} - 6 = 0$ (5) $e^{x+3} + 2 = 1$ (6) $e^{x+3} + \frac{3}{2} = 2$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $3e^{4x} + 5e^{2x} - 2 = 0$
 (2) $e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0$
 (3) $(\ln x)^3 + 4(\ln x)^2 - \ln x - 4 = 0$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $\ln x = -2$ (2) $\ln x = \frac{1}{4}$
 (3) $\ln(x^2) = 16$ (4) $(\ln x)^2 = 16$

6 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 - 3X + 2 = 0$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$.

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\ln x)^2 - \ln x = 2$.

Résolution d'inéquations

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(1) $e^{-3x-2} > 3$ (2) $e^{x-6} > 1$ (3) $e^{-2x+3} \geq 6$
 (4) $e^{-x+4} - 8 \geq 0$ (5) $e^{x+2} < 8$ (6) $e^{x-3} + \frac{3}{2} \leq 2$

9 1. Factoriser : $x^2 + x - 6$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $(\ln x)^2 + \ln x - 6 \leq 0$.

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(1) $2e^{2x} + 5e^x - 3 \leq 0$ (2) $e^{2x} - 5e^x - 6 \geq 0$
 (3) $e^{2x} + 8e^x + 15 \leq 0$ (4) $e^x - 4e^x + 3 > 0$

11 On considère le polynôme suivant :

$$p(x) = -x^3 + 7x - 6.$$

1. Écrire $p(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{3x} - 7e^x + 6 < 0$.

12 Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2.$$

1. a) Vérifier que $P(-1) = 0$.

b) Écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

c) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $P(x) \leq 0$.

2. En utilisant les résultats de la question 1., résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(1) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 \leq 0$

(2) $2\ln x + \ln(2x-1) \leq \ln(5x+2)$

Système

13 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} e^x + e^y = 2 \\ 3e^x - 2e^y = 11 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^x + y = 10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^x + y = 30 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} \ln(y+6) - \ln x = 3\ln x \\ e^{6x}e^y = e^{-6} \end{cases}$

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivants :

(1) $\begin{cases} e^x + y = 3 \\ e^x - y = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2e^x + 3e^y = 13 \\ e^x + e^y = 5 \end{cases}$

Dérivées

15 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K donné.

(1) $f(x) = e^{2x} \ln x$ avec $K =]0; +\infty[$

(2) $f(x) = (x^3 + 4)e^{-x}$ avec $K = \mathbb{R}$

(3) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ avec $K = \mathbb{R}$

(4) $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$ avec $K = \mathbb{R}$

(5) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ avec $K = \mathbb{R}$

(6) $f(x) = e^{x^3}$ avec $K = \mathbb{R}$

(7) $f(x) = \frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x}}$ avec $K =]0; +\infty[$

16 Pour chacun des cas suivants, on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie ci-dessous.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f .

2. Démontrer que f est dérivable en tout élément de D_f et calculer $f'(x)$.

(1) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ (2) $f(x) = e^{\frac{1}{2x+1}}$

(3) $f(x) = e^{\ln x}$ (4) $f(x) = (3x+2)e^x$

(5) $f(x) = \frac{x}{1-e^x}$ (6) $f(x) = (2x^2 - 6x + 7)e^x$

17 P est une fonction polynôme et a un nombre réel. Démontrer que la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = P(x) e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = Q(x) e^{ax}$, Q étant une fonction polynôme de même degré que P .

Application

(1) $f(x) = (2x+3)e^x$

(2) $f(x) = (x^2 - 3)e^{-5x}$

18 Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, de chacune des fonctions suivantes :

- (1) $f: x \mapsto e^{-x+3}$ (2) $f: x \mapsto e^{2x}$
 (3) $f: x \mapsto (-2x+3)e^{-x^2+3x-1}$
 (4) $f: x \mapsto 3xe^{x^2-1}$ (5) $f: x \mapsto \frac{e^x}{3e^x+2}$

19 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f . (On pourra écrire $f(x) = 1 - g(x)$, où g est une fonction à déterminer.)

20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(e^x + 2)^2}$$

1. (1) Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout x différent de -2 :

$$\frac{1}{(x+2)^2} = a + \frac{bx}{x+2} + \frac{cx}{(x+2)^2}$$

b) En déduire une autre écriture de $f(x)$.

2. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f .

21 Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction :

$$F: x \mapsto (ax+b)e^{-x}$$

soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$f: x \mapsto (2x+1)e^{-x}.$$

22 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}.$$

1. Déterminer les nombres réels α , β , et γ pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$$

soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .

2. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0.

Calcul de limites

23 Déterminer les limites suivantes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x \ln x$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x e^{2x}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$
 (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1}$ (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x)$
 (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$ (8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$

24 Calculer les limites de chacune des fonctions suivantes, aux extrémités de l'intervalle K donné :

- (1) $f: x \mapsto e^{-x}$ avec $K = \mathbb{R}$
 (2) $f: x \mapsto \frac{\ln x}{e^x}$ avec $K =]0; +\infty[$
 (3) $f: x \mapsto xe^{-x}$ avec $K = \mathbb{R}$
 (4) $f: x \mapsto x + 1 - e^x$ avec $K = \mathbb{R}$
 (5) $f: x \mapsto e^{-x^2}$ avec $K = \mathbb{R}$

25 Calculer chacune des limites suivantes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2 + e^x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x - 1}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)e^{\frac{1}{x-1}}$

26 Calculer les limites de chacune des fonctions suivantes, aux extrémités de l'intervalle K donné :

- (1) $f: x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$ avec $K =]-1; +\infty[$
 (2) $f: x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ avec $K = \mathbb{R}$

27 Calculer les limites suivantes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-3x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{5x+2}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{5x}}{x}$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1}}{x^2}$
 (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{3x}}{e^{x+2}}$ (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x-5}}{x}$
 (7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+3)e^x$ (8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x} e^x$

28 Calculer les limites suivantes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{x-1}}{x^3}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$
 (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$ (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

29 On considère les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x+1} ; g(x) = 2 + e^x.$$

On désigne par (Γ) , (Γ_1) et (Γ_2) les représentations graphiques des fonctions $\exp$, f et g dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

Montrer qu'il existe deux transformations t_1 et t_2 du plan telles que :

$$(\Gamma_1) = t_1(\Gamma) \text{ et } (\Gamma_2) = t_2(\Gamma).$$

Construire (Γ) puis (Γ_1) et (Γ_2) .

D'après bac

Étude de fonctions

30 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . Étudier et représenter graphiquement les fonctions f , g , h et k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

- (1) $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ (2) $g(x) = e^{3x}$
 (3) $h(x) = \frac{2}{e^x - 1}$ (4) $k(x) = e^{2x+1}$

31 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

1. Étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \exp(1 - e^x)$.

2. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) -e^{2x} + e^x + 2 = 0.$$

Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation (E). Comparer ces deux résultats.

3. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$$(E') -e^{2x} + e^x + m = 0.$$

32 Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . Étudier et représenter graphiquement les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + e^{x-2} ; g(x) = e^{-x+2}.$$

On désigne respectivement par $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les représentations graphiques de f et g .

1. Étudier les fonctions f et g .
2. Démontrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ possèdent en commun un unique point A.
3. Déterminer les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ au point A.
4. Démontrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont symétriques par rapport à la droite (D) d'équation $x = 2$.
5. Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (D') d'équation $y = x$.
6. Construire $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

33 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - x - 4$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Étudier le comportement de f en $+\infty$ (mettre e^x en facteur dans l'expression de $f(x)$).
3. a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
b) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 4$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.
Construire $(\mathcal{C})$ et la droite (D).

34 On considère la fonction f de $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^{2x} - 2)}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Démontrer que la droite d'équation $y = \ln 2$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C})$.
2. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Justifier que la droite (D_1) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.
3. a) Démontrer que : pour tout x distinct de $\ln 2$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2x} - 2}$$

- b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et justifier que la droite (D_2) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
- c) Démontrer que : pour tout x distinct de $\ln 2$

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^{2x} - 2)^2}$$

4. En déduire les variations de f .
5. a) Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$.
b) Étudier graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , l'intersection de $(\mathcal{C})$ avec la droite d'équation $y = x + m$.
c) Retrouver algébriquement ces résultats.

D'après bac

Utilisation d'une fonction auxiliaire

35 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.

1. Étudier le sens de variation de f .
2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse $x_0 = -\ln 2$.
3. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$$

Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ et déduire de $g''(x)$ et puis de $g'(x)$ le signe de $g(x)$.

4. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (T) dans le même repère et déterminer leurs positions respectives.

36 1. On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

- a) Étudier le sens de variation de g .
 - b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
2. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 1)e^{-2x} + x + 1$$

- a) Étudier la fonction f .
(On mettra $f'(x)$ sous la forme $e^{-2x}g(x)$.)
- b) On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .
- c) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$, en donner une équation.
- d) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (D).

3. a) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f et par $(\mathcal{C}')$ la représentation graphique de f^{-1} .

- b) Sur quelle partie de son ensemble de définition, f^{-1} est-elle dérivable ?

- c) Construire $(\mathcal{C}')$.

4. α est un nombre réel supérieur ou égal à -1 . On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq \alpha \\ x + 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

- a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties.
- b) Démontrer que $\mathcal{A}(\alpha)$ admet une limite ℓ lorsque α tend vers $+\infty$.
- c) Donner une valeur approchée de $(\ell - \mathcal{A}(3))$ à 10^{-2} près.

D'après bac

Courbes asymptotes

37 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. On considère la courbe (Γ) représentation graphique de la fonction g définie par :

$$g(x) = e^x - 1$$

- a) Démontrer que (Γ) est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
 - b) Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (Γ) .
3. Construire (Γ) à partir de la représentation graphique de la fonction exponentielle.
Sur le même graphique, construire $(\mathcal{C})$.

6

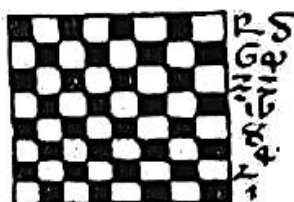
Fonctions exponentielles Fonctions puissances

Inde ou Perse ?

La légende dit que l'inventeur du jeu d'échec demanda en récompense du blé, de sorte que chaque case contienne un nombre double de grains que la précédente : $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$
soit : 18 446 744 073 709 551 615 grains de blé !

15446744073709551615 (4)

Coranto monta lo scacchi d'acchi arado
piando clascenna clusa



© Palais de la Découverte, Paris

15446744073709551615 (6)

42967326
644316
= 6

Échiquier / histoire du nombre

SOMMAIRE

1. Les nombres réels a^x 124
2. Les fonctions exponentielles de base a 125
3. Les fonctions puissances d'exposant α 128
4. Exemples d'études de fonctions 131

1

Les nombres réels a^α

Définition

Soit a un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel.

On sait que : $a = e^{\ln a}$

donc : $a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}$

or : $e^{r \ln a}$ a un sens lorsque r est un nombre réel ;

d'où la définition suivante :

Définition

a étant un nombre réel strictement positif et α un nombre réel quelconque, on appelle *puissance de a d'exposant α* le nombre réel, noté a^α , défini par : $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, pour tout nombre réel α , $a^\alpha > 0$.
 a^α se lit : a exposant α .

Exemples

On a : $2^{0,3} = e^{0,3 \ln 2} \approx 1,23$; $7^{-12,9} = e^{-12,9 \ln 7} \approx 1,25$.

Propriétés

• Rappeler les propriétés de la puissance d'un nombre réel strictement positif d'exposant rationnel vues au chapitre 1. Nous allons démontrer que ces propriétés restent valables lorsque l'exposant est réel.

Propriétés

Pour tout nombre réel strictement positif a , pour tout nombre réel α , (1) $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln a$.
Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , pour tous nombres réels α et β ,

$$(2) \quad a^\alpha \times b^\alpha = (ab)^\alpha$$

$$(3) \quad a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$(4) \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$$

$$(5) \quad \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$$

$$(6) \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

Démonstration guidée

Pour établir les égalités, on pourra $\left\{ \begin{array}{l} \text{utiliser l'écriture : } a^\alpha = e^{\alpha \ln a}, \\ \text{ou bien} \\ \text{comparer le logarithme népérien des deux membres de l'égalité.} \end{array} \right.$

Le nombre réel a^α , image de deux applications

a étant un nombre réel strictement positif et α un nombre réel quelconque, a^α peut être considéré comme :

– L'image de α par l'application : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
 $\alpha \mapsto a^\alpha$

telle que : $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$

Cette application est constante pour : $a = 1$.

– L'image de a par l'application : $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^\alpha$

telle que : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Cette application est constante pour : $\alpha = 0$.

2

Fonctions exponentielles de base a

Définition

On a vu que les nombres réels a^x nous conduisent à la définition de deux applications dont la première est obtenue en fixant a et en faisant varier x .

Définition

a étant un nombre réel strictement positif, différent de 1, on appelle *fonction exponentielle de base a* , l'application

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

Pour tout nombre réel x , $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$ [$a > 0$; $a \neq 1$].

Remarque

La fonction exponentielle népérienne $\exp$ est définie par : $\exp(x) = e^x$; c'est la fonction exponentielle de base e .

Propriété

a étant un nombre réel strictement positif et différent de 1, la fonction $\exp_a$ est une bijection strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$;

- si $0 < a < 1$ alors $\exp_a$ est strictement décroissante,
- si $a > 1$ alors $\exp_a$ est strictement croissante.

Démonstration guidée

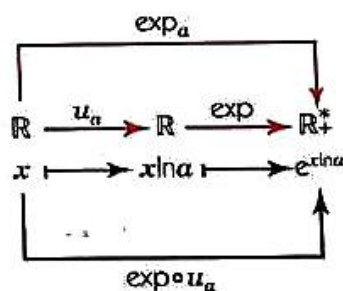
On sait que : $a^x = e^{x \ln a}$.

Supposons : $a > 0$ et $a \neq 1$,

on peut donc utiliser la décomposition ci-contre pour prouver que $\exp_a$ est bijective.

Par ailleurs, u_a est la fonction linéaire de coefficient $\ln a$; son sens de variation est donc donné par le signe de $\ln a$.

(On peut utiliser la propriété donnant le sens de variation de la composée de deux fonctions strictement monotones pour étudier le sens de variation de $\exp_a$.)



De la propriété précédente, on déduit la propriété suivante :

Propriété

a étant un nombre réel strictement positif et différent de 1, α et β des nombres réels,

- pour tous nombres réels α et β , $a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$
- si $0 < a < 1$ alors pour tous nombres réels α et β , $a^\alpha < a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
- si $a > 1$ alors pour tous nombres réels α et β , $a^\alpha < a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Équations – Inéquations

Ces équations et inéquations ont l'inconnue en exposant.

■ Exemple d'équations et d'inéquations de types $a^{u(x)} = b^{v(x)}$; $a^{u(x)} < b^{v(x)}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes :

(E) $2^{3x+8} = 5$

(I) $3^{2x+9} \leq 7^{-x+1}$

On peut procéder par une transformation d'écriture en prenant le logarithme népérien des deux membres.

Résolution de l'équation (E)

$$\begin{aligned}\ln[2^{3x+8}] &= \ln 5 \\ (3x+8)\ln 2 &= \ln 5 \\ x &= \frac{\ln 5 - 8\ln 2}{3\ln 2} \\ S_{(E)} &= \left\{ \frac{\ln 5 - 8\ln 2}{3\ln 2} \right\}\end{aligned}$$

Résolution de l'inéquation (I)

$$\begin{aligned}\ln[3^{2x+9}] &\leq \ln[7^{-x+1}] \\ (2x+9)\ln 3 &\leq (-x+1)\ln 7 \\ x &\leq \frac{\ln 7 - 9\ln 3}{\ln 7 + 2\ln 3} ; \text{ car } \ln 7 + 2\ln 3 > 0 \\ S_{(I)} &= \left] -\infty ; \frac{\ln 7 - 9\ln 3}{\ln 7 + 2\ln 3} \right]\end{aligned}$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes :

(E) $5^{4x-1} = -3$

(I) $5^{4x-1} > -3$

Puisque la puissance d'un nombre réel strictement positif est un nombre réel strictement positif, on en déduit que :

- l'équation (E) n'a pas de solution ; $S_{(E)} = \emptyset$;
- tout nombre réel est solution de l'inéquation (I) ; $S_{(I)} = \mathbb{R}$.

■ Exemple d'équations et d'inéquations polynomiales

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) $3 \times 49^x + 5 \times 7^x - 2 = 0$.

On peut se ramener à la résolution d'une équation du second degré à l'aide d'une inconnue auxiliaire.

L'ensemble de validité de (E) est : $\mathbb{R}$

L'équation (E) peut s'écrire : (E) $3 \times (7^x)^2 + 5 \times 7^x - 2 = 0$

Choix de l'inconnue auxiliaire : $X = 7^x$

Résolvante de (E) : (E') $3X^2 + 5X - 2 = 0$

Le nombre réel a est une solution de (E) $\Leftrightarrow$ le nombre réel 7^a est une solution de (E')

or, la résolution de (E') donne : $X = -2$ et $X = \frac{1}{3}$

Les solutions de (E) sont donc les solutions des équations suivantes (1) et (2).

(1) $7^x = -2$

(1) n'a pas de solution.

(2) $7^x = \frac{1}{3}$

$$x \ln 7 = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x = -\frac{\ln 3}{\ln 7}$$

l'ensemble des solutions de (E) est : $\left\{ -\frac{\ln 3}{\ln 7} \right\}$.

• Résoudre de la même manière l'inéquation : (I) $3 \times 49^x + 5 \times 7^x - 2 > 0$.

Exercice

2.a Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(1) $2^{3x} = 5$

(2) $3^x = 3^1 - 8x$

(3) $5^x \leq 25^{3x}$

(4) $7^x < 2$

(5) $\left(\frac{2}{5}\right)^s \geq 2^{x-1}$

(6) $2^{x+1} > 5^x$

(7) $3^{2x} + 3x - 6 = 0$

(8) $3^{2x} + 3^x - 6 < 0$

(9) $3^x + 1 - 6 \times 3^{-x} = 0$

2.2 Variations et représentations graphiques de la fonction $\exp_a$

Variations de $\exp_a$

Nous avons déjà étudié le sens de variation de la fonction $\exp_a$ à l'aide de sa décomposition.

- Compléter cette étude en utilisant l'écriture : $a^x = e^{x \ln a}$.

On obtient les résultats suivants :

Dérivée

La fonction $\exp_a$ est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$ et :

pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $(a^x)' = \ln a \times a^x$.

Limites

- Si	$0 < a < 1$	alors	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$	et	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$
- Si	$a > 1$	alors	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	et	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

Tableaux de variation

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$a^x \ln a$	-	-	$\ln a$	-	-
a^x	$+\infty$	$1/a$	1	a	0

$a > 1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$a^x \ln a$	+	+	$\ln a$	+	+
a^x	0	$1/a$	1	a	$+\infty$

Représentations graphiques de $\exp_a$

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . On désigne par $(\mathcal{C}_a)$ la représentation graphique de $\exp_a$.

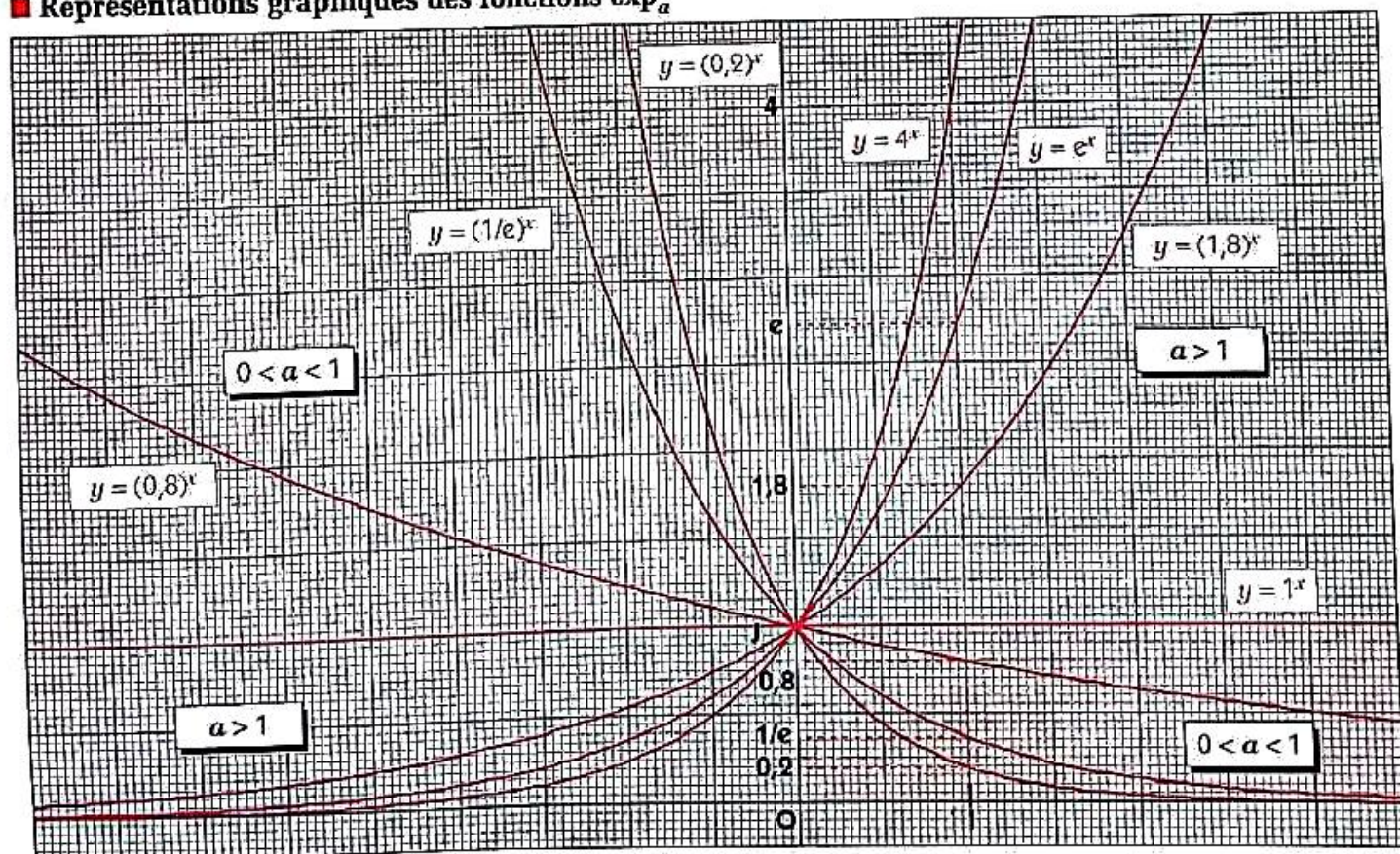
Tangentes

Les courbes $(\mathcal{C}_a)$ passent toutes par le point J , où elles admettent chacune une tangente de coefficient directeur $\ln a$.

Asymptote

La droite (OI) est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_a)$, $\left\{ \begin{array}{l} \text{en } +\infty \text{ lorsque } 0 < a < 1, \\ \text{en } -\infty \text{ lorsque } a > 1. \end{array} \right.$

Représentations graphiques des fonctions $\exp_a$



3

Les fonctions puissances d'exposant α

3.1. Définition – Propriétés

On a vu que les nombres réels a^α permettent de définir deux applications dont la seconde est obtenue en fixant α et en faisant varier a .

Définition

α étant un nombre réel, différent de 0, on appelle *puissance d'exposant réel α* , l'application

$$f_\alpha: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha$$

Pour tout nombre réel strictement positif x , $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ [$\alpha \neq 0$].

Cas particuliers

n étant un nombre entier naturel non nul et m un nombre entier relatif non nul,

- si $\alpha = n$, f_n coïncide sur $]0; +\infty[$ avec la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = x^n$
- si $\alpha = -n$, f_n coïncide sur $]0; +\infty[$ avec la fonction de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$
- si $\alpha = \frac{1}{n}$, f_n coïncide sur $]0; +\infty[$ avec la fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$
- si $\alpha = \frac{m}{n}$, $f_{m/n}$ coïncide sur $]0; +\infty[$ avec la fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_{m/n}(x) = \sqrt[n]{x^m}$

Propriété

α étant un nombre réel différent de 0, la fonction puissance d'exposant α , est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Si $\alpha < 0$, alors f_α est strictement décroissante.

Si $\alpha > 0$, alors f_α est strictement croissante.

Démonstration guidée

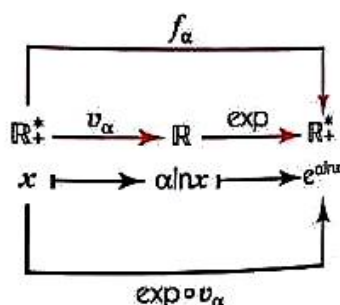
On sait que : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Supposons : $\alpha \neq 0$.

On peut utiliser la décomposition ci-contre pour prouver que f_α est bijective.

Par ailleurs, v_α est la fonction $\alpha \ln$; son sens de variation est donc donné par le signe de α car $\ln$ est strictement croissante.

(On pourra utiliser la propriété donnant le sens de variation du produit d'une fonction par un nombre réel et de la composée de deux fonctions strictement monotones pour étudier le sens de variation de f_α .)



De la propriété précédente, on déduit la propriété suivante :

Propriété

α est un nombre réel différent de 0, a et b des nombres réels strictement positifs.

$$\begin{array}{ll} \text{si } \alpha < 0 & \text{alors } a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow a > b \\ \text{si } \alpha > 0 & \text{alors } a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow a < b \end{array}$$

3.2. Variations et représentations graphiques

Variations de f_α

Nous avons déjà étudié le sens de variation de la fonction f_α à l'aide de sa décomposition.

• Compléter cette étude en utilisant l'écriture : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

On obtient les tableaux de variation suivants :

Tableaux de variation

$\alpha > 0$

x	0	1	$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		+	+
x^α	0	1	$+\infty$

$\alpha < 0$

x	0	1	$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		-	-
x^α	$+\infty$	1	0

Représentation graphique de f_α

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . On désigne par $(\mathcal{C}_\alpha)$ la représentation graphique de f_α .

• Lorsque $\alpha < 0$

La droite (OJ) est une asymptote verticale et la droite (OI) est une asymptote horizontale en $+\infty$ à $(\mathcal{C}_\alpha)$.

• Lorsque $\alpha > 0$

Recherche d'un prolongement par continuité en 0 de f_α

La fonction f_α est continue sur $]0; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = 0$.

f_α admet un prolongement par continuité en 0, la fonction g_α définie par :

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

La représentation graphique de la fonction g_α est donc la courbe $(\mathcal{C}_\alpha) \cup \{0\}$.

Recherche d'une tangente au point 0 à la courbe $(\mathcal{C}_\alpha) \cup \{0\}$, représentation graphique de g_α

Pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x} = x^{\alpha-1}$.

Par conséquent :

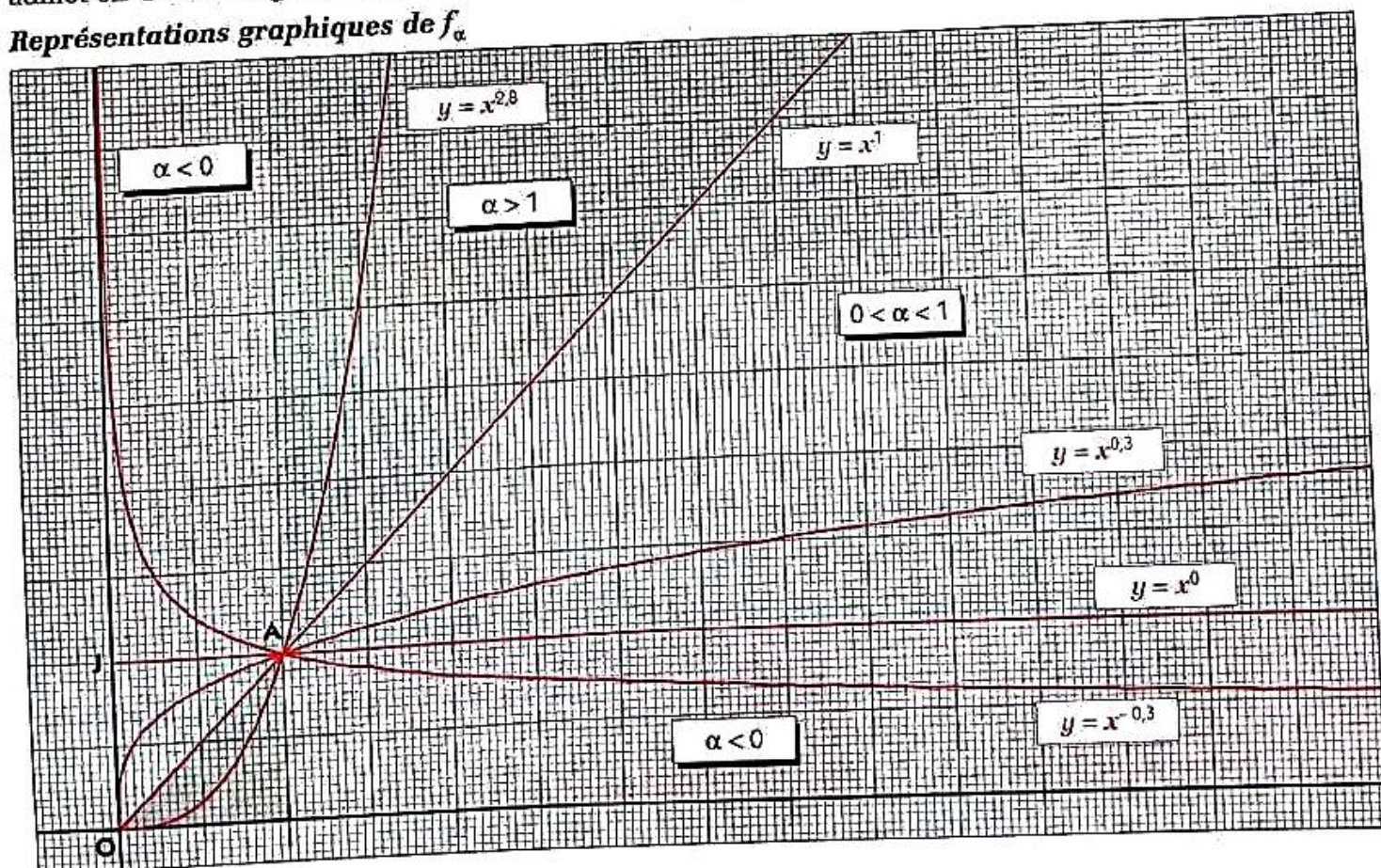
- lorsque $0 < \alpha < 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x} = +\infty$

g_α n'est pas dérivable à droite en 0, et $(\mathcal{C}_\alpha) \cup \{0\}$ admet en 0 une tangente verticale.

- lorsque $\alpha > 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x} = 0$

g_α a une dérivée à droite en 0 égale à 0, donc $(\mathcal{C}_\alpha) \cup \{0\}$ admet en 0 une tangente horizontale.

Représentations graphiques de f_α



3.3. Dérivée – Primitives – Limites

On sait que, α étant un nombre réel différent de 0, pour tout nombre réel x strictement positif, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Cette écriture nous a permis d'étudier les variations de la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$. Récapitulons les résultats et complétons-les.

■ ■ ■ Dérivée de f_α de la fonction composée u^α

Propriété

α étant un nombre réel différent de 0,

– la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\text{pour tout élément de } \mathbb{R}_+^*, (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

– si u est une fonction strictement positive sur un intervalle K , alors la fonction u^α est dérivable sur K et :

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$$

Exemple

Considérons la fonction f définie sur $]0,6 ; +\infty[$ par : $f(x) = (5x^3 - 3)^{4/7}$.

La fonction $x \mapsto 5x^3 - 3$ est dérivable et strictement positive sur $]0,6 ; +\infty[$.

La fonction f est donc dérivable sur $]0,6 ; +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{4}{7} \times 15x^2 \times (5x^3 - 3)^{4/7-1} = \frac{60}{7} \times x^2 (5x^3 - 3)^{-3/7}.$$

■ ■ ■ Recherche de primitives

De l'expression de la dérivée de la fonction f_α et de la fonction composée u^α , il résulte la propriété suivante donnant de nouvelles primitives.

Propriété

α étant un nombre réel différent de 0 et de -1,

– une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,

– si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K ,

alors une primitive sur K de la fonction $u' u^\alpha$ est la fonction $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exemples

– Une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^{\sqrt{3}}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{3}} x^{1+\sqrt{3}}$.

– La fonction $x \mapsto (2x-5)$ est dérivable et strictement positive sur $]2,5 ; +\infty[$.

Une primitive sur $]2,5 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto 2(2x-5)^{\sqrt{3}}$ est donc la fonction $x \mapsto \frac{(2x-5)^{1+\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}$.

■ ■ ■ Limites

– Si	$\alpha > 0$	alors	$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$	et	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$
– Si	$\alpha < 0$	alors	$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$	et	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$

Exercices

- 3.a On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (1-x)^2$.
 Quel est l'ensemble de définition D de f ?
 Déterminer la dérivée de $x \mapsto (1-x)^2$.
 Déterminer une primitive sur D de la fonction $x \mapsto (1-x)^2$.

- 3.b Déterminer les dérivées de chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
- (1) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ (3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$
 (2) $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$ (4) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$

4

Exemples d'études de fonctions

4.1. Comparaison des fonctions $\ln$, $\exp$ et f_α [$\alpha > 0$]

Introduction

■ Position du problème

On sait que $\ln$, $\exp$ et f_α [$\alpha > 0$] sont des fonctions strictement croissantes qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$. Pour les grandes valeurs de la variable, quel est le comportement de ces fonctions les unes par rapport aux autres ?

Nous allons, par des approches graphique et numérique, aborder la notion de « croissance comparée » des fonctions.

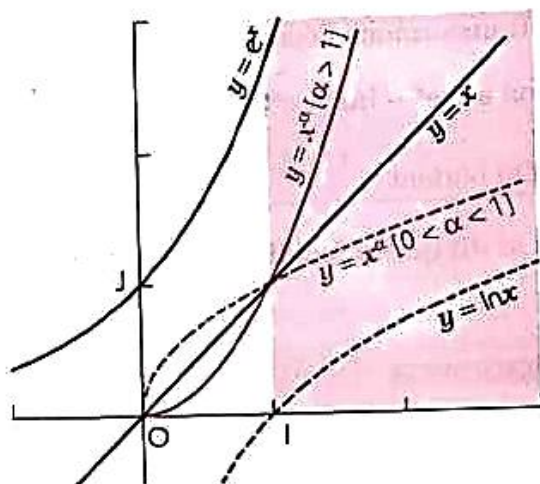
■ Approche graphique

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

Ci-contre, on a construit les représentations graphiques des fonctions $\ln$, $\exp$ et f_α [$\alpha > 0$].

Dans la fenêtre de construction de ces graphiques, il semble que : pour $x > 1$, $\ln x < x^\alpha < e^x$.

Contrôlons cette conjecture par une approche numérique.



■ Activité sur une approche numérique

On considère la fonction $\ln$ et la fonction racine carrée. Elles sont strictement croissantes et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

On veut comparer le comportement de ces deux fonctions pour de grandes valeurs de la variable.

Pour cela,

– Déterminer les valeurs de x à partir desquels on a : $\ln x \geq 10^4$; $\sqrt{x} \geq 10^4$.

– Comparer $\ln x$ et $\sqrt{x}$ pour quelques valeurs de x supérieures à 1.

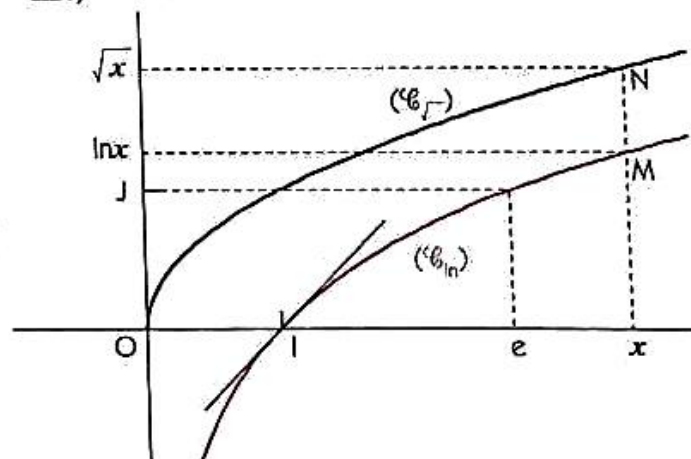
– Étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$.

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$, on écrit : $\sqrt{x} - \ln x = \sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$,

on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x) = +\infty$.

– Observer le tableau de variation de f et la représentation graphique de $\ln$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$2 - \ln 4$	$+\infty$



- Donner une interprétation graphique du tableau de variation de f .
- Aurait-il été possible de conjecturer sur le graphique, la limite en $+\infty$ de la fonction f ?

Remarque

Étudier la croissance comparée de deux fonctions f et g strictement croissantes qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, revient à étudier la limite en $+\infty$ de leur différence. Or, la différence de leur limite en $+\infty$ donne la forme indéterminée $\infty - \infty$.

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - f(x)]$, on pourra transformer l'écriture de $g(x) - f(x)$ en mettant en facteur $g(x)$ ou $f(x)$, x étant un nombre réel suffisamment grand ; on obtient :

$$g(x) - f(x) = g(x) \left[1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = f(x) \left[\frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right].$$

■ Croissance comparées des fonctions $\ln$ et $\exp$

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x)$.

Transformons l'écriture de la somme $(e^x - \ln x)$, en mettant l'un des termes en facteur, par exemple e^x :

$$\text{on a : } e^x - \ln x = e^x \left(1 - \frac{\ln x}{e^x} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\ln x}{e^x} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x}.$$

On obtient :

On dit que la fonction $\exp$ croît plus vite que la fonction $\ln$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x) = +\infty$$

■■■ Croissance comparées des fonctions f_α et $\ln$; f_α et $\exp$

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha - \ln x)$ [$\alpha > 0$].

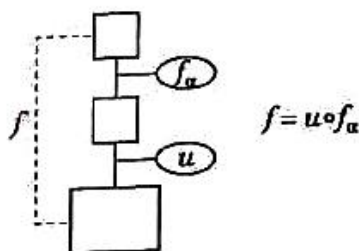
- Transformons l'écriture : $x^\alpha - \ln x$

$$x^\alpha - \ln x = x^\alpha \left(1 - \frac{\ln x}{x^\alpha} \right)$$

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$$

- Décomposons la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$.

Considérons les fonctions $u : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.



- On obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad [\alpha > 0]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha - \ln x) = +\infty$$

On dit que : f_α [$\alpha > 0$] croît plus vite que $\ln$.

Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^\alpha)$ [$\alpha > 0$].

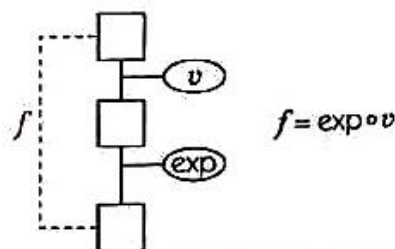
- Transformons l'écriture : $e^x - x^\alpha$

$$e^x - x^\alpha = e^x \left(1 - \frac{x^\alpha}{e^x} \right)$$

$$\frac{x^\alpha}{e^x} = e^{\alpha \ln x - x}$$

- Décomposons la fonction $f : x \mapsto e^{\alpha \ln x - x}$.

Considérons les fonctions $v : x \mapsto \alpha \ln x - x$ et $\exp$.



- On obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad [\alpha > 0]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^\alpha) = +\infty$$

On dit que : $\exp$ croît plus vite que f_α [$\alpha > 0$].

$\exp$ croît plus vite que f_α [$\alpha > 0$] qui croît plus vite que $\ln$.

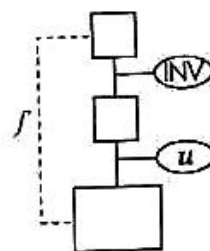
Conséquences des croissances comparées

Calculons : $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x$ [$\alpha > 0$].

- Transformons l'écriture : $f(x) = x^\alpha \ln x = \frac{-\ln \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$.

- Décomposons la fonction f .

Considérons la fonction $u : x \mapsto \frac{\ln x}{x^\alpha}$.



On a : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \end{cases}$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$

On démontre et nous admettons que :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$ [$\alpha > 0$]

Limites de référence

Propriété

Pour tout nombre réel strictement positif α ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$.

Conséquence

On sait que, a étant un nombre réel supérieur à 1, la fonction $\exp_a$ est strictement croissante et :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

On peut donc comparer la croissance de la fonction $\exp_a$ avec celle de chacune des fonctions : $\exp$, $\ln$ et f_α [$\alpha > 0$].

Exercice

4.a Calculer les limites suivantes.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{3^x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-4} \ln x$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7^x - x^{99})$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^{99})$

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{3^x}$

(6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x}{3^x}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2$

(8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2$

4.2. Fonctions comportant une fonction $\exp_a$

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{3^x}$.

■ Ensemble de définition

Pour tout nombre réel x , $3^x > 0$,

$$D_f = \mathbb{R}$$

■ Dérivée

– La fonction f est dérivable (car les fonctions identité et $\exp_3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$).

– Soit x un nombre réel

$$\text{on a : } f(x) = \frac{x}{3^x} = x3^{-x} = xe^{-x \ln 3},$$

$$\text{d'où : } f'(x) = (1 - x \ln 3)e^{-x \ln 3}.$$

$$\text{Pour tout nombre réel } x, f'(x) = \frac{1 - x \ln 3}{3^x}$$

– On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $(1 - x \ln 3)$.

■ Limites

– **Limite de f en $-\infty$**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x \ln 3} = -\infty$$

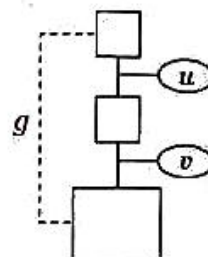
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

– **Limite de f en $+\infty$**

$$\text{Transformons l'écriture de } f(x) : \text{ pour tout nombre réel } x, f(x) = \frac{1}{\ln 3} \times \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}}.$$

Considérons les fonctions u et v définies par : $u(x) = x \ln 3$ et $v(x) = \frac{x}{e^x}$

Décomposons $g : x \mapsto \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}}$



$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln 3 = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \end{cases}$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

■ Tableau de variation

$$\frac{1}{\ln 3} \approx 0,91 \quad ; \quad \frac{1}{e \ln 3} \approx 0,33$$

x	$-\infty$	0	$1/\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	1	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$1/e \ln 3$	0

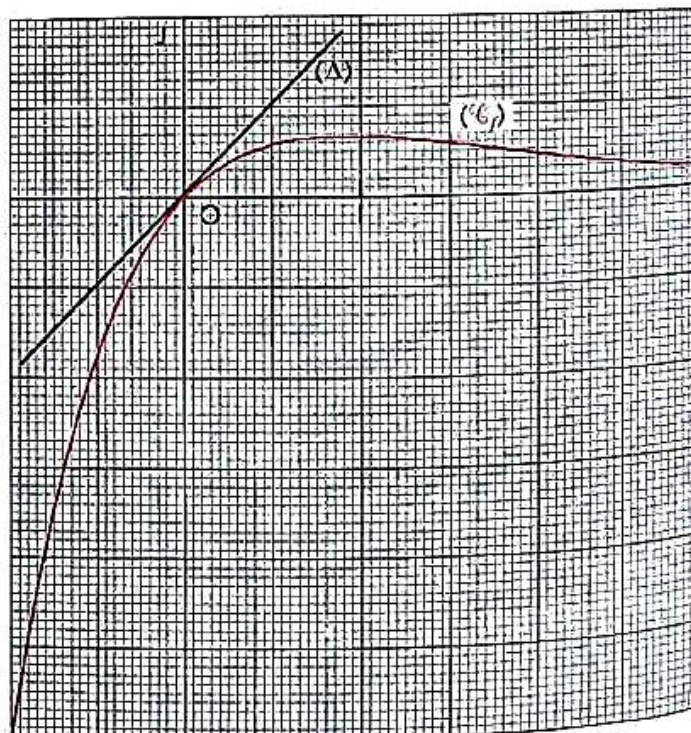
■ Construction de $(\mathcal{C}_f)$

Tableau des valeurs approchées de $f(x)$

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .
Désignons par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f .

x	-1	-0,5	0,5	1	2	3
$f(x)$	-3	-0,87	0,29	0,33	0,22	0,11

$(\mathcal{C}_f)$ admet au point O une tangente de coefficient directeur 1, c'est la droite (Δ) d'équation $y = x$.
 $(\mathcal{C}_f)$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale, la droite (OI) .



4.3. Exemple d'étude d'une fonction du type : $x \mapsto [u(x)]^{v(x)}$

Étudions la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^x$.

Variations de la fonction f

■ Ensemble de définition D_f

On a : $x^x = e^{x \ln x}$.

f est la composée de $u : x \mapsto x \ln x$, suivie de $\exp$, d'où : $f = \exp \circ u$.

$$D_f =]0 ; +\infty[$$

■ Limites

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$;

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$;

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

■ Dérivée

f est dérivable en tout élément x de $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = u'(x) \exp[u(x)]$.

■ Tableau de variation

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	1	$e^{-\frac{1}{e}}$	$+\infty$

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = (1 + \ln x)e^{x \ln x}$

On a : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x \geq 0$.

Représentation graphique de f

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f .

■ Tangente en des points particuliers

La fonction f est continue sur $]0 ; +\infty[$ et admet une limite en 0. Elle admet donc un prolongement par continuité en 0, la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in]0 ; +\infty[, & g(x) = f(x) \\ & g(0) = 1 \end{cases}$$

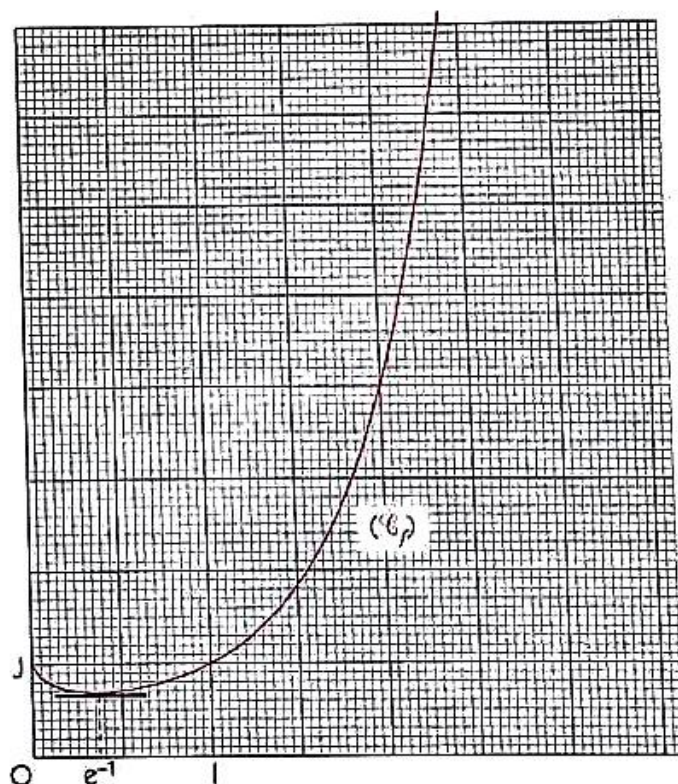
$(\mathcal{C}_f) \cup \{J\}$ est donc la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ de g .

Contrairement à f , la fonction g est définie en 0 ; on peut donc étudier la dérivabilité de g en 0 et déduire l'existence éventuelle d'une tangente à $(\mathcal{C}_g)$ au point J .

■ Construction de $(\mathcal{C}_f)$

Établir une table de valeurs approchées de $f(x)$.

On obtient la courbe ci-dessous.



$$\text{On a : } \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \ln x \times \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x}$$

$$\text{Or : } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente verticale.

Plus généralement, pour étudier la fonction $x \mapsto [u(x)]^{v(x)}$, il est conseillé d'utiliser la définition : $[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x) \ln[u(x)]}$.

TP1 Recherche de primitives

Il est souvent difficile de reconnaître une expression du type : $(u(x))'(u(x))^\alpha$ [$\alpha \in \mathbb{R}^*$] lorsque celle-ci contient des radicaux.

Il est donc conseillé, dans la recherche de primitives, de mettre une expression contenant des radicaux sous forme de puissances rationnelles

Ce TP a pour objet de donner des exemples pour illustrer cette méthode.

Exemple

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur l'intervalle K de la fonction f définie ci-dessous :

- | | |
|--|---|
| (1) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^5}$; $K =]0 ; +\infty[$ | (3) $f(x) = x\sqrt{(x^2-1)^5}$; $K =]1 ; +\infty[$ |
| (2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$; $K =]-\infty ; 1[$ | (4) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$; $K =]1 ; +\infty[$ |

On désigne par F une primitive sur K de la fonction f .

- (1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \times x^{-5} = x^{-\frac{9}{2}}$; $F(x) = \frac{x^{-\frac{9}{2}+1}}{-\frac{9}{2}+1} = \frac{x^{-\frac{7}{2}}}{-\frac{7}{2}} = -\frac{2}{7} \frac{1}{\sqrt{x^7}}$
- (2) $f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$; $F(x) = \frac{-(1-x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{-(1-x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{(1-x)^2}$
- (3) $f(x) = x(x^2-1)^{\frac{5}{2}}$; $F(x) = \frac{1}{2} \frac{(x^2-1)^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} = \frac{(x^2-1)^{\frac{7}{2}}}{7} = \frac{1}{7} \sqrt{(x^2-1)^7}$
- (4) $f(x) = x^2(x^3-1)^{-\frac{3}{2}}$; $F(x) = \frac{1}{3} \frac{(x^3-1)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{3} \frac{(x^3-1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$

TP2 Étude d'équations comportant des puissances d'exposants réels

Ce TP a pour objet de trouver le nombre de solutions de certaines équations que nous ne savons pas résoudre.

La méthode exposée dans l'exercice commenté 1 consiste à mettre cette équation sous la forme $f(x) = c$ [$c \in \mathbb{R}$] ; puis à procéder par une étude graphique

L'exercice commenté 2 traite d'un cas plus complexe que l'on ramène au cas simple de l'exercice commenté 1. L'unicité de la solution de l'équation $f(x) = c$ [$c \in \mathbb{R}$] est justifiée graphiquement.

Exercice commenté 1

Déterminer le nombre de solutions de l'équation : (E) $2^x = x^3$.

■ Transformation de l'équation (E)

– On sait que : pour tout nombre réel x , $2^x > 0$.

Par conséquent, toute solution de (E) est nécessairement strictement positive.

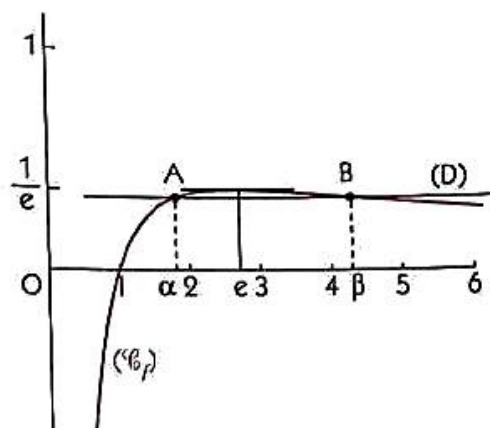
- On sait que : la fonction $\ln$ est bijective donc, (E) est équivalente à l'équation : $x \ln 2 = 3 \ln x$, donc à l'équation : $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{3}$.

■ Étude graphique de (E)

Étude de la fonction $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

On a : $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0



Résolution graphique

On sait que : $1 < 2 < e$
donc : $0 < \ln 2 < 1$
 $0 < \frac{\ln 2}{3} < \frac{1}{3}$

On sait que : $e < 3$
donc : $\frac{1}{3} < \frac{1}{e}$

On en déduit que : $0 < \frac{\ln 2}{3} < \frac{1}{e}$.

La représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f et la droite (D) d'équation $y = \frac{\ln 2}{3}$ se coupent en deux points A et B d'abscisses respectives α et β telles que : $1 < \alpha < e$ et $\beta > e$.

Conclusion

L'équation (E) admet donc deux solutions, l'une comprise entre 1 et e , l'autre plus grande que e .

Exercice commenté 2

Déterminer le nombre de solutions strictement positives de l'équation : (E) $2^x + 3^x = 7^x$.

■ Transformation de l'équation (E)

(E) est équivalente à l'équation : $\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$.

■ Variations de f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{3}{7}\right)^x$.

On a : $\frac{2}{7} < 1$ et $\frac{3}{7} < 1$.

- Les fonctions $x \mapsto \left(\frac{2}{7}\right)^x$ et $x \mapsto \left(\frac{3}{7}\right)^x$ sont strictement décroissantes sur $[0; +\infty[$, par suite leur somme f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

- Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^x = 0$; donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

- Tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	2	1	0

■ Nombre de solutions de l'équation (E)

f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) =]0; 2]$; elle détermine donc une bijection de $[0; +\infty[$ dans $]0; 2]$.

Puisque 1 est élément de $]0; 2]$, il existe un unique nombre réel α tel que :

$$\alpha \in [0; +\infty[\text{ et } f(\alpha) = 1.$$

TP3 Étude d'une fonction du type u^v

Dans le cours, l'étude de la fonction $x \mapsto x^x$ apporte un premier exemple de ce type de fonction. Ce TP a pour objet l'étude d'un exemple plus riche.

Exercice commenté

Étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |4x^2 - 1|^{3/4}$.

■ Ensemble de définition D_f

Considérons la fonction $u : x \mapsto |4x^2 - 1|$.

Pour tout nombre réel x , $x \in D_f \Leftrightarrow 4x^2 - 1 \neq 0$; donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

■ Ensemble d'étude

On vérifie aisément que f est une fonction paire.

On peut donc prendre pour ensemble d'étude l'ensemble E défini par :

$$E = \left[0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

■ Dérivée

f est une fonction définie par intervalle. Sur $[0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} - \text{pour } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[, f(x) &= (-4x^2 + 1)^{3/4} & \text{et} & \quad f'(x) = -6x(-4x^2 + 1)^{-1/4} \\ - \text{pour } x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f(x) &= (4x^2 - 1)^{3/4} & \text{et} & \quad f'(x) = 6x(4x^2 - 1)^{-1/4} \end{aligned}$$

■ Limites

- Limites en $+\infty$

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} |4x^2 - 1| = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} X^{3/4} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- Limites en $\frac{1}{2}$

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} (4x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0} X^{3/4} = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = 0$$

de même : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = 0$.

■ Tableau de variation

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$	1	0	$+\infty$

Le plan est muni du repère (O, I, J) . On désigne par $(\mathcal{C}_0)$ la représentation graphique de la restriction de f à $\left[0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et par $(\mathcal{C}_r)$ la représentation graphique de f .

■ Recherche de tangente à gauche et de tangente à droite au point $A(-\frac{1}{2}; 0)$

- La fonction f est dérivable, donc continue, sur $\left[0; -\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$; mais non définie en $\frac{1}{2}$.

La courbe $(\mathcal{C}_0)$ admet un prolongement par continuité en $\frac{1}{2}$, la fonction g définie par :

$$\text{Pour } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, g(x) = f(x) \quad \text{et} \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Étudions l'existence de tangentes à la représentation graphique $(\mathcal{C}) \cup \{A\}$ en $A(-\frac{1}{2}; 0)$.

- Dérivabilité de g en $\frac{1}{2}$

• Soit x un élément de $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$,

$$\text{On a : } \frac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{(4x^2 - 1)^{3/4}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{2(2x - 1)^{3/4} \times (2x + 1)^{3/4}}{2x - 1}$$

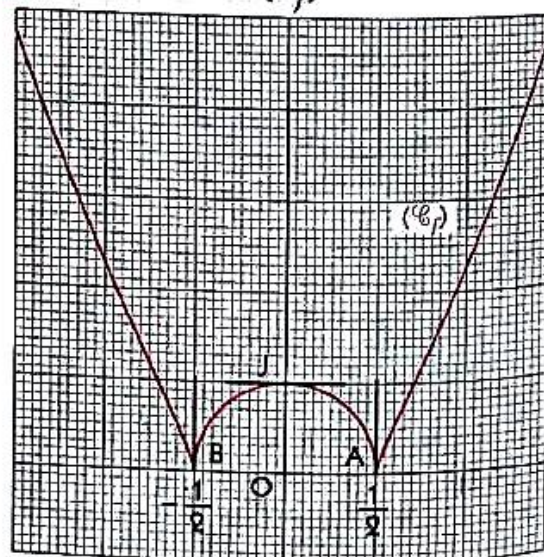
$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = +\infty.$$

• Soit x un élément de $\left[0; \frac{1}{2}\right[$,

$$\text{on démontre de même que : } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{g(x) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = -\infty.$$

Par conséquent, la courbe $(\mathcal{C}) \cup \{A\}$, admet une tangente verticale au point A.

■ Construction de $(\mathcal{C}_r)$



Exercices

ENTRAÎNEMENT

Les nombres réels a^α

1 Simplifier l'écriture de chacun des nombres réels suivants, a étant un nombre réel strictement positif :

- (1) $a^3 \times a^{-2}$ (2) $a^{\frac{1}{2}} \times a^5$ (3) $a^{0,7} \times a^{4,9}$
 (4) $a^{-22} \times \sqrt{a}$ (5) $(a^{-9})^{0,5}$ (6) $(a^{2,3})^{\frac{1}{4}}$
 (7) $\frac{a^{2,01}}{a^{6,1}}$ (8) $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^2}$

2 Simplifier :

- (1) $8^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}}$ (2) $3^{0,7} \times 3^{-4,6} \times 3^{1,2}$
 (3) $\frac{2^{\frac{3}{2}}}{16^4}$ (4) $\frac{9^{-1,7}}{3^{4,8}}$

3 Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de :

- (1) $2^{3,8}$ (2) $5^{\frac{1}{3}}$ (3) $7^{-0,9}$
 (4) $(1,03)^{\frac{3}{4}}$ (5) $2\,709^{1,3}$ (6) $6\,992^{-\frac{2}{3}}$

Fonctions exponentielles de base a

Équations – Inéquations – Systèmes

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- (1) $3^x = 1$ (2) $2^{x+1} = 8$ (3) $2^x = 3^{x+1}$
 (4) $3^{2x} = 2^{3x}$ (5) $3 + \frac{2}{3-x} = 9^x$ (6) $3^{2x} = 2^{3x}$
 (7) $3x + 1 + 9^{x-2} = 90$ (8) $(x+3)^x = 1$
 (9) $3 + \frac{2}{3-x} = 9x$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- (1) $2 \times 10^{2x} + 3 \times 10^x - 5 = 0$
 (2) $3 \times 10^{2x} + 7 \times 10^x - 6 = 0$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- (1) $4^{3+x} \geq 3^{5x}$ (2) $10^{6x} - 10^{3x} < 2$
 (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (4) $7^x \leq 7^{-x+1}$

7 Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

- (1) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2^x 2^{2y} = 64 \\ \ln x + 2 \ln y = \ln 4 \end{cases}$
 (3) $\begin{cases} 4^x = 4^y \\ 4^x + 1 = y^{x+4} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 8^x + (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 3^x + 27^y = 9^{y+1} \end{cases}$

Dérivées

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f définie ci-dessous :

- (1) $f(x) = 2^x$ (2) $f(x) = 3^x \ln x$

(3) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$

Primitives

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie ci-dessous :

- (1) $f : x \mapsto 5^x + 2x$ (2) $f : x \mapsto (\sqrt{5})^x$
 (3) $f : x \mapsto \frac{1}{3^x}$ (4) $f : x \mapsto -\frac{3x}{2^{x+1}}$

Limites

10 Calculer les limites suivantes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{5^x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x}{5^x}$
 (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x 3^x$ (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x 3^x$
 (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 5 \right]$
 (6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 5 \right]$
 (7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x 4^{-x}$ (8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x 4^{-x}$

Fonctions puissances

Dérivées

11 Calculer les dérivées des fonctions numériques f définies par :

- (1) $f(x) = x\sqrt{x}$ (2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
 (4) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sin x}$ (5) $f(x) = \sqrt[4]{1 + x^2}$

12 Dans chacun des cas suivants, écrire $f(x)$ sous la forme x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) et déterminer la dérivée de f .

- (1) $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ (2) $f : x \mapsto x^e \sqrt{x}$
 (3) $f : x \mapsto \frac{x^{0,5}}{\sqrt[3]{x^3}}$ (4) $f : x \mapsto \frac{x^{-\ln 3}}{x^{1-e}}$

Primitives

13 Trouver les primitives des fonctions numériques f définies par :

- (1) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ (2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
 (3) $f(x) = x\sqrt{x}$ (4) $f(x) = (1 + x^2)^{1/2}$
 (5) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

Limites

14 Calculer les limites suivantes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\pi \sqrt[3]{x})$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^\pi \sqrt[3]{x})$
 (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^3)^{-\frac{1}{4}}$ (4) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (1 - x)^{1/2}$

Étude de fonctions

Comparaison de $\ln$, $\exp$ et f_α [$\alpha > 0$]

15 Calculer les limites suivantes :

- | | |
|---|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$ | (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$ | (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x}$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{\ln x}$ | (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 1]^2 e^x$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^3$ | (8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^x$ |
| (9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x)$ | (10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 + 1}$ |

Fonctions comportant $\exp_\alpha$

16 Dans chacun des cas suivants, étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

- | | |
|-------------------------------------|----------------------|
| (1) $f(x) = 2^{x-3}$ | (2) $f(x) = 2^{1/x}$ |
| (3) $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ | (4) $f(x) = 4^x$ |

17 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{5^x}{5^{2x} - 1}$.

- Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- Démontrer que f est impaire.
- Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$.
En déduire les variations de f sur $]-\infty; 0[$.
- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = \frac{2}{3}$.
b) En déduire les solutions de l'équation : $f(x) = -\frac{2}{3}$.

Fonctions comportant f_α [$\alpha > 0$]

18 Dans chacun des cas suivants, étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| (1) $f : x \mapsto x^{0,3}$ | (2) $f : x \mapsto x^{-1,7}$ |
| (3) $f : x \mapsto x^{5,2}$ | (4) $f : x \mapsto x^{-3,9}$ |

APPROFONDISSEMENT

19 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^{3-\ln x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

- a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie par :

$$x \mapsto \frac{x \ln 3}{e^{x \ln 3}}.$$

- En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f .
- Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

20 Étudier et représenter graphiquement chacune des fonctions numériques f , g et h définies par :

- a) $f(x) = |x|^x$ b) $g(x) = (1+x)^x$ c) $f(x) = x^{\ln x}$

21 a et b sont des nombres réels strictement positifs. On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = ax$; $g(x) = b\sqrt{x}$.

On désigne respectivement $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les représentations graphiques de f et de g dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) .

- Trouver une relation entre a et b pour que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ aient une tangente commune.

On désigne par $A_{a,b}$ le point de contact de ces deux courbes et par E l'ensemble des couples (a, b) vérifiant la relation obtenue entre a et b .

- Trouver l'ensemble décrit par le point $A_{a,b}$ lorsque le couple (a, b) décrit E .
- Démontrer que la tangente commune en $A_{a,b}$ aux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ passe par le même point A de (OJ) .

22 L'objet de ce problème est la résolution de l'équation :

$$(E_1) \quad x^{10} = (1,1)^x \quad x \in]0; +\infty[.$$

1^{re} partie

- Étudier le sens de variation des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f(x) = x^{10} \quad ; \quad g(x) = (1,1)^x.$$

- Représenter graphiquement, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les restrictions à $[0; 1,1]$ des fonctions f et g .

- On considère la fonction d de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$d(x) = (1,1)^x - x^{10}.$$

- Calculer $d(1)$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $d(1,1)$.

- Montrer que l'équation (E_1) admet au moins une solution α qui appartient à l'intervalle $[1; 1,1]$.

2^e partie

On considère l'équation :

$$(E_2) \quad x \ln(1,1) - 10 \ln x = 0.$$

- Montrer que (E_2) est une équation équivalente à (E_1) .
- On considère la fonction numérique ϕ définie par :

$$\phi(x) = x \ln(1,1) - 10 \ln x.$$

Étudier et représenter graphiquement ϕ . (On désigne par (Γ) la courbe obtenue.)

- Montrer que l'équation (E_2) admet une solution unique β et que : $\beta \in [685; 686]$.

- Trouver un meilleur encadrement de β , en déduire une valeur approchée de β .

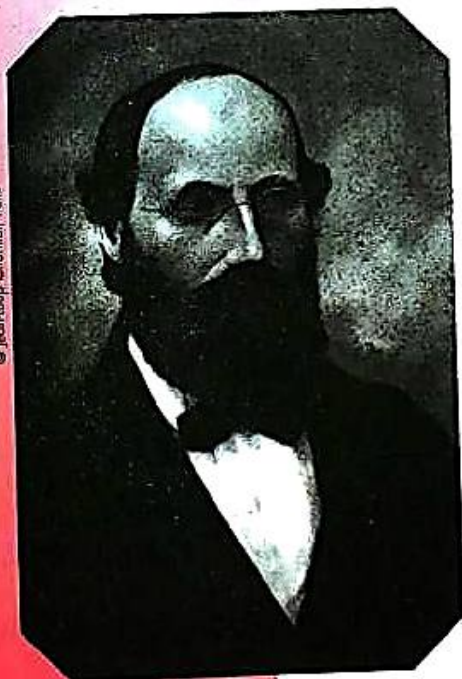
D'après bac

Du calcul d'aires à la notion d'intégrale

Les premiers calculs d'aires sont dus à Eudoxe (406-359 av. J.-C.) et à Archimède (287-212 av. J.-C.). Leur méthode, qui consistait à encadrer la surface par deux polygones, fut développée par les Arabes au IX^e siècle.

Fermat (1601-1665) introduisit la méthode des rectangles et, par passage à la limite, donna les approches intuitives essentielles à la notion d'intégrales, née à la même époque que le calcul différentiel.

C'est Cauchy et Riemann qui firent de l'intégrale une théorie précise (définition, notation). Cette théorie fut achevée par deux Français : Lebesgue (1875-1941) et Denjoy (1884-1974).



© Jean-Loup Charnel, Paris

De nos jours, le calcul intégral intervient dans plusieurs sciences telles que la physique, la statistique...

Riemann est considéré comme le plus grand mathématicien de son siècle.

« Sa grandeur réside dans le caractère puissant de généralité et la partie illimitée de ses méthodes ».

Bernhard Riemann
mathématicien allemand – 1826-1866.

SOMMAIRE

1. Intégrale d'une fonction continue	142
2. Techniques du calcul d'intégrales	149
3. Calcul de grandeurs	154

1

Intégrale d'une fonction continue

1.1. Notion d'intégrale d'une fonction continue

■ Définition

■ Position du problème et définition

Nous avons défini les primitives d'une fonction continue. Pour certaines fonctions continues, il ne nous a pas été possible d'exprimer algébriquement une primitive, bien que celle-ci existe ! C'est le cas de la fonction inverse.

On peut se poser les questions suivantes.

- Quelle est la primitive qui prend la valeur $\frac{\pi}{3}$ en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$?
- Quelle est la distance parcourue en t heures par un mobile dont la vitesse v est définie par : $v(t) = e^t$?

Pour résoudre de tels problèmes, nous utilisons une nouvelle notion : l'intégrale d'une fonction continue.

La définition d'une primitive permet de démontrer la propriété suivante :

Propriété – Définition

f est une fonction continue sur un intervalle K , F une primitive sur K de f , a et b des éléments de K . Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F ; il est appelé *intégrale de a à b de f* .

On note : $F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b = \int_a^b f(x) dx$
 on lit : $F(x)$ pris entre a et b somme de a à b de $f(x) dx$

■ Variable muette dans une intégrale

La lettre x n'intervient pas dans le résultat de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$; on peut donc la remplacer par n'importe quelle autre lettre différente de a et b ; on dit que x est une **variable muette**.

On a : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt = \dots = F(b) - F(a)$.

■ Conséquences immédiates de la définition d'une intégrale

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle K , a et b des nombres réels quelconques de K , F une primitive de f sur K . On a :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad ; \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

■ Intégrale et primitive

f est une fonction continue sur K contenant a , F est une primitive sur K de f qui s'annule en a .

Soit x un nombre réel élément de K ; on a : $F(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$;

donc F est la fonction définie sur K par : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Propriété

f étant une fonction continue sur un intervalle K contenant a , la primitive sur K de f qui s'annule en a est la fonction F définie sur K par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Exemples

• La primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 est la fonction $\ln$;

donc pour tout x élément de $\mathbb{R}^+$,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

• Un mobile part d'un point A à l'instant 0 et a une vitesse v en km/h définie par : $v(t) = e^t$.

La distance parcourue x (en km) après t heures est donnée par : $x(t) = \int_0^t v(u) du = \int_0^t e^u du = [e^u]_0^t = e^t - 1$.

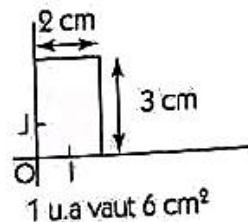
Intégrale et aire

Unité d'aire, unité graphique d'aire

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

– L'unité d'aire, noté u.a., est l'aire du rectangle construit sur OI.

– Lorsque l'unité graphique sur chaque axe du repère, est exprimé en cm, en m, ..., l'unité graphique d'aire s'exprime en cm^2 , en m^2 ...



Exemple introductif

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

f est une fonction continue, croissante et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

On désigne par :

$(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f ;

$(\mathcal{D}_x)$, $(\mathcal{D}_a)$ et $(\mathcal{D}_b)$ les droites parallèles à (OJ) et passant respectivement par les points de coordonnées $(x ; 0)$, $(a ; 0)$ et $(b ; 0)$;

Δ_x la partie du plan limitée par : $(\mathcal{C}_f)$, (OI) , $(\mathcal{D}_a)$ et $(\mathcal{D}_x)$;

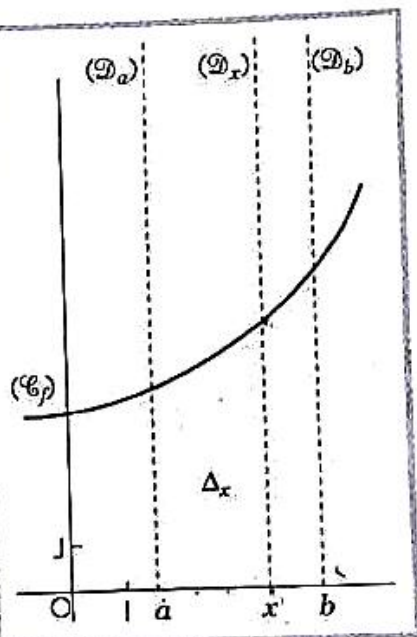
Δ la partie du plan limitée par : $(\mathcal{C}_f)$, (OI) , $(\mathcal{D}_a)$ et $(\mathcal{D}_b)$.

On considère la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[a ; b]$ par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \text{ élément de } [a ; b], \mathcal{A}(x) = \text{Aire de } \Delta_x \\ \mathcal{A}(a) = 0 \end{cases}$$

Démontrons que la fonction $\mathcal{A}$ est une primitive sur $[a ; b]$ de f .

On en déduira alors une interprétation graphique de $\int_a^b f(t) dt$.



Démontrons que la fonction $\mathcal{A}$ est une primitive sur $[a ; b]$ de f .

x_0 est un élément de $[a ; b]$.

– Soit h un nombre réel strictement positif tel que : $x_0 + h \in [a ; b]$.
Désignons par E la partie du plan tramée sur le graphique ci-contre.

$$\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) = \text{aire de } E$$

Cette aire est comprise entre les aires de deux rectangles :

$$\text{on a : } h \times f(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

$$\text{d'où : } f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

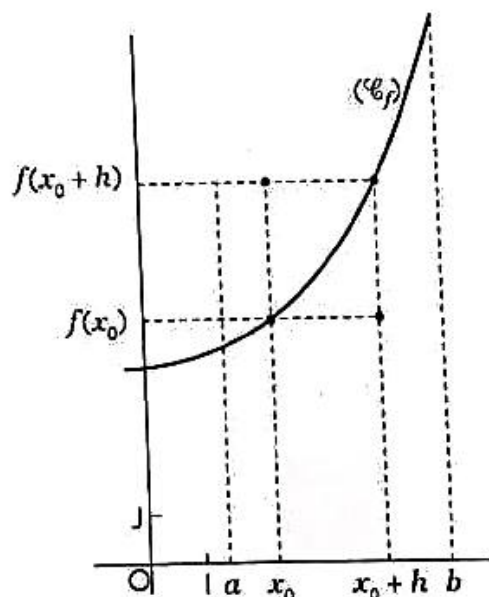
$$\text{or : } \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \text{ (} f \text{ étant continue en } x_0 \text{)}$$

$$\text{donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = \mathcal{A}'_d(x_0) = f(x_0).$$

– Lorsque h est strictement négatif, on démontre de même que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = \mathcal{A}'_g(x_0) = f(x_0).$$

– Par conséquent, la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable en x_0 et $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$.



Donnons une interprétation graphique de f .

La fonction $\mathcal{A}$ étant une primitive sur $[a; b]$ de f , $\int_a^b f(t)dt = \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(b) = \text{aire de } \Delta$.

■ Propriété

– En utilisant la même situation que l'exemple introductif précédent, avec une fonction continue, décroissante et positive, on obtient le même résultat.

– Lorsque la fonction f est continue, positive et quelconque, on examine la fonction sur chaque intervalle où la fonction est monotone. On obtient encore le même résultat.

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

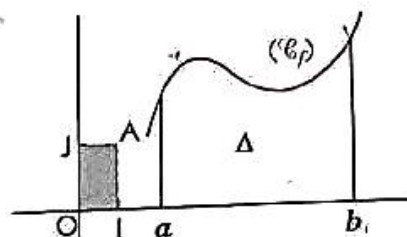
f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ tel que $a < b$,

$(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f ,

$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la partie Δ du plan limitée par : $(\mathcal{C}_f)$, (OI) , les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

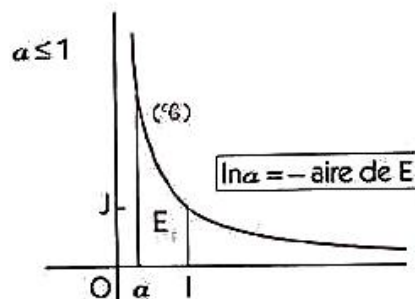
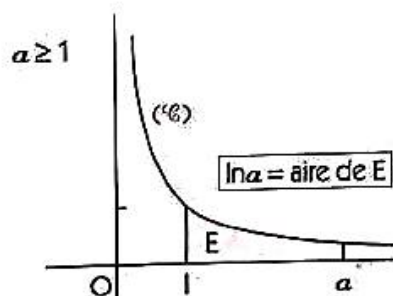
$$M(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire de } \Delta.$$



■ Exemple

Interprétation graphique du nombre réel $\ln a$, $(\mathcal{C})$ étant la représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$.



Exercices

1.a Calculer les intégrales suivantes.

(1) $\int_1^2 \frac{t}{2} dt$

(2) $\int_{-1}^2 \frac{t^3}{4} dt$

(3) $\int_1^2 \frac{du}{u^2}$

(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin x dx$

(5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos x dx$

(6) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) dx$

(7) $\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

(8) $\int_0^1 e^x dx$

1.b Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(1) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x + 2]_1^2$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos 3x dx = [\sin 4x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

1.c On considère les fonctions f, g, h définies par :

$f(x) = \frac{3}{1+x^2}$; $g(x) = \tan x$; $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Peut-on calculer l'intégrale de f sur $[-2; 2]$?

Peut-on calculer l'intégrale de g sur $[-\pi; \pi]$?

Peut-on calculer l'intégrale de h sur $[-2; 0]$?

1.2. Propriétés de l'intégrale

Égalité de Chasles

Propriété

f étant une fonction continue sur un intervalle K et a, b, c des éléments de K ,

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Cette égalité est une conséquence directe de la définition de l'intégrale.

Exemple

Considérons la fonction définie par : $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; 1], f(x) = 2x + 1 \\ \text{pour } x \in [1; +\infty[, f(x) = -x + 4 \end{cases}$

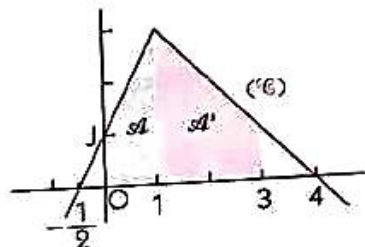
f est continue sur $\mathbb{R}$. Calculons $\int_0^3 f(x) dx$.

Calcul de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 (2x + 1) dx + \int_1^3 (-x + 4) dx \\ &= \left[x^2 + x \right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 4x \right]_1^3 = 6. \end{aligned}$$

Interprétation graphique

La fonction f étant positive sur $[0; 3]$, le calcul précédent peut être interprété comme somme des aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ ci-contre.



Linéarité

Propriété

f et g étant des fonctions continues sur un intervalle K , a et b des éléments de K , α un nombre réel quelconque,

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad ; \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur K et G une primitive de g sur K . On a :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = (F + G)(b) - (F + G)(a) = [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = (\alpha F)(b) - (\alpha F)(a) = \alpha [F(b) - F(a)] = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Exemple

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 6x + \frac{7}{2\sqrt{x}}.$$

f est continue sur $[3; 4]$. Calculons $\int_3^4 f(x) dx$.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos^2 x \quad ; \quad (\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}).$$

f est continue sur $[0; \frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.

On désigne par u et v les fonctions définies par :

$$u(x) = 2x \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

on a : pour tout x élément de $[3; 4]$,

$$f(x) = 3u(x) + 7v(x)$$

$$\text{donc : } \int_3^4 \left(6x + \frac{7}{2\sqrt{x}}\right) dx = 3 \int_3^4 u(x) dx + 7 \int_3^4 v(x) dx$$

$$= 3 \left[x^2 \right]_3^4 + 7 \left[\sqrt{x} \right]_3^4 = 3 \times 5 + 7(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

On désigne par u et v les fonctions définies par :

$$u(x) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{\cos 2x}{2}.$$

on a : pour tout x élément de $[0; \frac{\pi}{3}]$,

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\text{donc : } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} u(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} v(x) dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{4} \left[\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Inégalités et intégration

Propriété

f et g étant des fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$,

$$\text{si } f \geq 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\text{si } f \geq g \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$,

F une primitive de f sur $[a; b]$.

On a : pour tout x élément de $[a; b]$, $F'(x) = f(x)$

d'où : F est croissante sur $[a; b]$

$$\text{donc : } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \geq 0$$

Soient f et g des fonctions continues sur $[a; b]$,
telles que :

pour tout x élément de $[a; b]$, $f(x) \geq g(x)$
or : $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$.

$$\text{d'où : } \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$$

$$\text{donc : } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Exemple

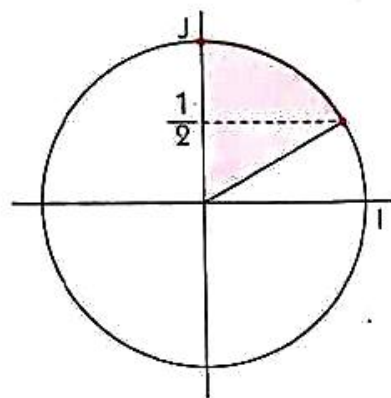
Déterminer un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$.

Soit x un élément de $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$; on a : $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$

$$\text{donc : } \frac{x^2}{2} \leq x^2 \sin x \leq x^2$$

$$\text{d'où : } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{2} dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx$$

$$\frac{13\pi^3}{648} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx \leq \frac{13\pi^3}{324}.$$



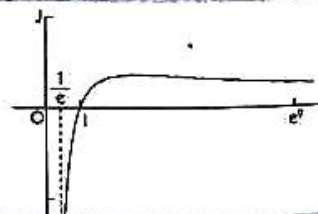
Remarque

On peut avoir $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ sans que la fonction f soit positive sur $[a; b]$;

pour s'en convaincre, faire l'activité suivante :

f est la fonction définie sur $[\frac{1}{e}; e^2]$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

La représentation graphique ci-contre de f montre que f ne garde pas un signe constant sur $[\frac{1}{e}; e^2]$. Calculons $\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$.



Pour cela vérifier que $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{2} (\ln x)^2$.

Inégalité de la moyenne

Cette propriété est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction F définie sur l'intervalle $[a; b]$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
On peut aussi obtenir cette propriété à partir de la précédente.

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ tel que $a < b$, m et M sont des nombres réels.

- Si pour tout x élément de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
- Si pour tout x élément de $[a; b]$, $|f(x)| \leq M$ alors $\int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a)$.

Démonstration

Les fonctions constantes $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont continues sur $[a; b]$,

donc : pour tout x élément de $[a; b]$,

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$\text{d'où : } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

or : pour tout x élément de $[a; b]$,

$$|f(x)| \leq M \Leftrightarrow -M \leq f(x) \leq M$$

$$\text{d'où : } \int_a^b |f(x)| dx \leq M(b-a).$$

Valeur moyenne d'une fonction

Présentation

De la propriété précédente, on peut faire la remarque suivante :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Si f est continue sur un intervalle $[a; b]$, f atteint son minimum m et son maximum M sur $[a; b]$ et il existe un élément c de $[a; b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ tel que $a < b$.

On appelle *valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$* , le nombre réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

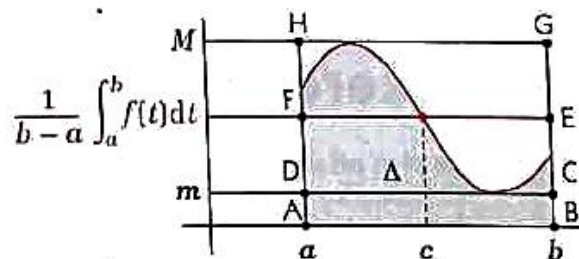
Interprétations graphique et cinématique

- Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

On désigne par Δ la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$, (OI) , les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Sur le graphique ci-contre on constate que :

- (1) aire de ABCD $\leq$ aire de $\Delta \leq$ aire de ABGH
- (2) aire de Δ = aire de ABEF



- La vitesse moyenne d'un mobile est la valeur moyenne de sa vitesse v . En effet :

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \text{valeur moyenne de } v.$$

■ Exemple 1

Calculons la valeur moyenne sur $[0 ; \pi]$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x - \sin x$.

La fonction f est continue sur $[0 ; \pi]$, car elle est la somme de deux fonctions continues sur $[0 ; \pi]$.

Par conséquent, la valeur moyenne sur $[0 ; \pi]$ de la fonction f est $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \sin x) dx$,

$$\text{or : } \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \sin x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 + \cos x \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - 2 \right) = \frac{\pi^2 - 4}{2\pi}.$$

■ Exemple 2

Donnons un encadrement du nombre réel $\int_1^3 \ln(4 + t^2) dt$.

Considérons la fonction $f : t \mapsto \ln(4 + t^2)$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1 ; 3]$ car elle est la composée de la fonction $t \mapsto 4 + t^2$ qui est croissante sur $[1 ; 3]$, suivie de la fonction croissante $\ln$. Par conséquent,

$$\text{on a : } f(1) \leq f(t) \leq f(3)$$

$$\text{c'est-à-dire : } \ln 5 \leq \ln(4 + t^2) \leq \ln 13$$

$$\text{d'où : } 2 \times \ln 5 \leq \int_1^3 \ln(4 + t^2) dt \leq 2 \times \ln 13$$

$$\text{donc : } 3,21 \leq \int_1^3 \ln(4 + t^2) dt \leq 5,13.$$

■ Exemple 3

f est la fonction numérique définie sur $[a ; b]$ par : $f(x) = x^3$.

Déterminer en fonction de a et b le nombre réel c tel que $f(c)$ soit la valeur moyenne de f sur $[a ; b]$.

Quelle est la valeur de c si $a = 1$ et $b = 3$?

$$f(c) \text{ étant la valeur moyenne de } f \text{ sur } [a ; b] \text{ on a : } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = c^3$$

$$\text{or : } \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4} (b^4 - a^4) = \frac{1}{4} (b^2 + a^2)(b^2 - a^2) = \frac{1}{4} (b^2 + a^2)(b-a)(b+a)$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{4} (b^2 + a^2)(b+a) = c^3.$$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[a ; b]$, elle détermine donc une bijection de $[a ; b]$ dans $[f(a) ; f(b)]$.

Par conséquent il existe une et une seule valeur de c telle que : $f(c) = \frac{1}{4} (b^2 + a^2)(b+a)$.

$$c^3 = \frac{1}{4} (b^2 + a^2)(b+a) \Leftrightarrow c = \sqrt[3]{\frac{1}{4} (b^2 + a^2)(b+a)}.$$

Pour $a = 1$ et $b = 3$, on a : $c = \sqrt[3]{10}$.

Exercices

- 1.d Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .
Calculer la valeur moyenne sur $[1 ; 3]$ de la fonction exponentielle.
Donner une interprétation graphique.

- 1.e Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .
Calculer la valeur moyenne sur $[0 ; \pi]$ de la fonction cosinus.
Donner une interprétation graphique.

- 1.f On pose : $A(x) = -8x^3 + 24x^2 + 3x - 9$.
a) Vérifier que : $A(3) = 0$.
Déterminer le signe de $A(x)$ sur $[1 ; 3]$.
b) f et g sont des fonctions numériques définies par : $f(x) = 26x^2 - 3x$ et $g(x) = 8x^3 + 9$.
On pose : $I = \int_1^3 f(x) dx$ et $J = \int_1^3 g(x) dx$.
Sans calculer les valeurs de I et J , prouver que $I \geq J$.

2

Techniques du calcul d'intégrales

2.1. Exemples d'utilisation de primitives

Intégrale des fonctions du type : $u'(x) \times u^\alpha(x)$ [$\alpha \in \mathbb{R}^*$]

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt[4]{(x^3 - 2x^2 + x - 5)^3}}$$

f est continue sur $[3; 4]$. Calculons $\int_3^4 f(x) dx$.

On désigne par u la fonction polynôme définie par :

$$u(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5.$$

On a : pour tout x élément de $[3; 4]$,

$$f(x) = u'(x) [u(x)]^{-\frac{3}{4}}$$

$u' \times u^\alpha$ [$\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$] a pour primitive $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_3^4 f(x) dx &= \int_3^4 u'(x) u^{-\frac{3}{4}}(x) dx = 4 \times \left[u^{\frac{1}{4}}(x) \right]_3^4 \\ &= 4 \times \left[(x^3 - 2x^2 + x - 5)^{\frac{1}{4}} \right]_3^4 \\ &= 4(\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{31}). \end{aligned}$$

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sin x \cos^3 x.$$

f est continue sur $[0; \frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.

On désigne par u la fonction cosinus.

On a : pour tout x élément de $[0; \frac{\pi}{3}]$,

$$f(x) = -u'(x) u^3(x).$$

$u' \times u^\alpha$ [$\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$] a pour primitive $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{3}} u'(x) u^3(x) dx \\ &= \left[\frac{u^4(x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = - \frac{1}{4} \left[\cos^4 x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{15}{64}. \end{aligned}$$

Intégrale des fonctions du type : $u'(x)e^{u(x)}$

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x-3)e^{x^2-6x+5}$$

f est continue sur $[1; 4]$. Calculons $\int_1^4 f(x) dx$.

On désigne par u la fonction définie par :

$$u(x) = x^2 - 6x + 5.$$

On a : pour tout x élément de $[1; 4]$,

$$f(x) = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$$

or : la fonction $u'e^u$ a pour primitive e^u

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_1^4 f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_1^4 u'(x) e^{u(x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{u(x)} \right]_1^4 \\ &= \frac{e^3 - 1}{2}. \end{aligned}$$

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \left(2x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) e^{\tan x - x^2}$$

f est continue sur $[0; \frac{\pi}{4}]$. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$.

On désigne par u la fonction définie par :

$$u(x) = \tan x - x^2.$$

On a : pour tout x élément de $[0; \frac{\pi}{4}]$,

$$f(x) = -u'(x) e^{u(x)}$$

or : la fonction $u'e^u$ a pour primitive e^u

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(x) e^{u(x)} dx \\ &= - \left[e^{u(x)} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1 - e^{\frac{16-\pi^2}{16}}. \end{aligned}$$

Intégrale des fonctions du type : $\frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+5}$$

f est continue sur $[-1; 0]$. Calculons $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

On désigne par u la fonction polynôme définie par :

$$u(x) = x^2 + 3x + 5.$$

On a : pour tout x élément de $[-1; 0]$,

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ et } u(x) > 0$$

or : la fonction $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln u$ ou $\ln(-u)$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \frac{u'(x)}{u(x)} dx \\ &= \left[\ln(x^2 + 3x + 5) \right]_{-1}^0 \\ &= \ln \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cotan x ; \left(\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

f est continue sur $[0; \frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.

On désigne par u la fonction sinus.

On a : pour tout x élément de $[0; \frac{\pi}{3}]$,

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ et } u(x) > 0$$

or : la fonction $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln u$ ou $\ln(-u)$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx \\ &= \left[\ln(\sin x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \ln \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Intégrale d'une fonction rationnelle

Exemple

On donne la fonction rationnelle f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 5}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

f est continue sur $[2; 4]$. Calculons $\int_2^4 f(x) dx$.

On donne la fonction rationnelle f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{(x-1)(x+3)^2}$$

f est continue sur $[2; 3]$. Calculons $\int_2^3 f(x) dx$.

$$\text{On établit que : } f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3}.$$

On désigne par u et v les fonctions polynômes définies par : $u(x) = (x-1)$; $v(x) = (x+1)$.

On a : pour tout x élément de $[2; 4]$,

$$f(x) = \frac{2u'(x)}{[u(x)]^2} + \frac{3v'(x)}{[v(x)]^3}$$

or : la fonction $\frac{u'}{u^n}$ a pour primitive $\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_2^4 f(x) dx &= \int_2^4 \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int_2^4 \frac{3}{(x+1)^3} dx \\ &= 2 \times \left[\frac{-1}{(x-1)} \right]_2^4 + 3 \times \left[\frac{-1}{2(x+1)^2} \right]_2^4 \\ &= \frac{108}{75} = 1,44. \end{aligned}$$

$$\text{On établit que : } f(x) = \frac{1}{8(x-1)} + \frac{15}{8(x+3)} - \frac{7}{2(x+3)^2}.$$

On désigne par u et v les fonctions polynômes définies par : $u(x) = (x-1)$; $v(x) = (x+3)$.

On a : pour tout x élément de $[2; 3]$,

$$f(x) = \frac{1}{8} \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{15}{8} \frac{v'(x)}{v(x)} - \frac{7}{2} \frac{v'(x)}{v(x)^2}$$

$$u(x) > 0 \text{ et } v(x) > 0$$

or : la fonction $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln u$ ou $\ln(-u)$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_2^3 f(x) dx &= \frac{1}{8} \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx + \frac{15}{8} \int_2^3 \frac{1}{x+3} dx - \frac{7}{2} \int_2^3 \frac{1}{(x+3)^2} dx \\ &= \frac{1}{8} \left[\ln(x-1) \right]_2^3 + \frac{15}{8} \left[\ln(x+3) \right]_2^3 - \frac{7}{2} \left[\frac{1}{x+3} \right]_2^3 \\ &= \frac{1}{8} \ln 2 + \frac{15}{8} \ln 5 - \frac{15}{8} \ln 5 - \frac{7}{60}. \end{aligned}$$

Intégrale d'une fonction trigonométrique

Exemple 1

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
 $f(x) = \cos^6 x$.
 f est continue sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$. Calculons $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

En linéarisant $\cos^6 x$,

$$\text{on a : } \cos^6 x = \frac{\cos 6x}{32} + \frac{6 \cos 4x}{32} + \frac{15 \cos 2x}{32} + \frac{20}{32}.$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \frac{1}{32} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 6x dx + \frac{3}{16} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx \\ &\quad + \frac{15}{32} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{5}{8} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \left[\frac{1}{192} \sin 6x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{15}{64} \sin 2x + \frac{5x}{8} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{5\pi}{64} - \frac{15}{64}. \end{aligned}$$

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
 $f(x) = \cos^3 x$.
 f est continue sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$. Calculons $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

$$\text{On a : } f(x) = \cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx \\ &= \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \left[\sin^3 x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$

Exemple 2

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
 $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$.
 f est continue sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= \cos^2 x \sin^3 x = \cos^2 x \sin x (1 - \cos^2 x) \\ &= \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^4 x dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{5} \left[\cos^5 x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
 $f(x) = \sin^3 x \cos^3 x$.
 f est continue sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= \sin^3 x \cos^3 x = \sin^3 x \cos x (1 - \sin^2 x) \\ &= \sin^3 x \cos x - \cos x \sin^5 x \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^5 x dx \\ &= \left[\frac{1}{4} \sin^4 x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{1}{6} \sin^6 x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Remarque

Dans la recherche d'une primitive de la fonction f définie par $x \mapsto \sin^p x \cos^q x$, on peut éviter de linéariser lorsque p ou q est impaire.

Exercices

2.a On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 - 1}.$$

Vérifier que f est de la forme :

$$ax + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$$

et que g est de la forme : $a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

Calculer les intégrales : $\int_{-1}^1 f(x) dx$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx$.

2.b Calculer les intégrales.

$$(1) \int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x} dx \quad (2) \int_1^2 (1-2x)(x^2-x)^{\frac{7}{2}} dx$$

$$(3) \int_1^3 \frac{-2x+5}{(-x^2+5x+3)^5} dx \quad (4) \int_{e^5}^{e^8} \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{x} dx$$

$$(5) \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad (6) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^6 x dx \quad (8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^7 x dx.$$

2.2. Intégrale d'une fonction paire, impaire, périodique

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

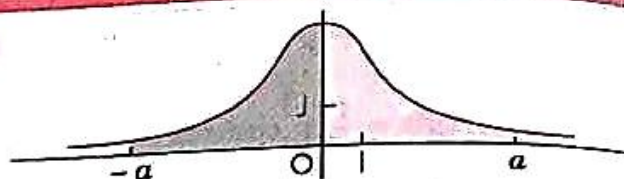
On pourra expliquer les résultats suivants en considérant l'aire de deux parties du plan qui se correspondent par la symétrie d'axe (OI) , la symétrie de centre O ou la translation de vecteur $T \vec{OI}$.

On démontre et nous admettons les propriétés suivantes :

Propriété

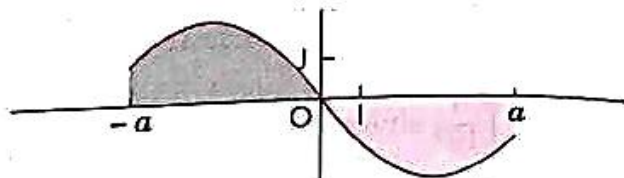
Si f est paire

alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$ et $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$



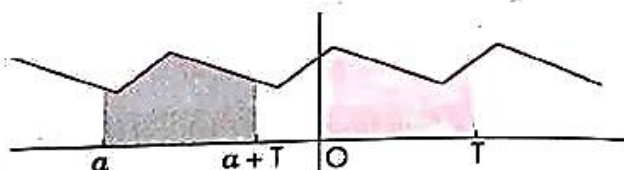
Si f est impaire

alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$ et $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



Si f est périodique de période T

alors $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$



Exemple 1

Calculons l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$.

Calculons l'intégrale $\int_{-3}^3 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$.

$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 3x}$ est continue et paire sur $[-\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}]$.

$x \mapsto \frac{1-e^x}{1+e^x}$ est continue et impaire sur $[-3; 3]$.

donc : $\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\cos^2 3x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{2}{3} [\tan 3x]_0^{\frac{\pi}{9}}$

donc : $\int_{-3}^3 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx = 0$.

Exemple 2

Calculons l'intégrale $\int_a^{a+\frac{\pi}{3}} \sin^2 3x dx$ [$a \in \mathbb{R}$] ; $(\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2})$

$x \mapsto \sin^2 3x$ est continue et périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

donc : $\int_a^{a+\frac{2\pi}{3}} \sin^2 3x dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 3x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos 6x) dx = \left[\frac{1}{2} x - \frac{\sin 6x}{12} \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$.

Exercices

2.c On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = x^4 \sin x$; $g(x) = (1+x^2) \tan x$.

Calculer : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$; $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(x) dx$.

2.d On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln(\cos x)$.

Démontrer que :

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 - \sin^2 x) dx$.

2.3. Intégration par parties

Propriété

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$.

Si les fonctions dérivées f' et g' sont continues sur $[a ; b]$

alors
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)dx$$

Démonstration

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$.

Pour tout x élément de $[a ; b]$, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.

Si les fonctions f' et g' sont continues sur $[a ; b]$ alors les fonctions $f'g, f'g', f'g + f'g'$ sont continues sur $[a ; b]$,

donc :
$$\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b g'(x)f(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

Exemple 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (2x + 3)e^x$$

f est continue sur $[0 ; 1]$. Calculons $\int_0^1 f(x)dx$.

Posons : $\begin{cases} u(x) = 2x + 3 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$; on a : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

On calcule cette intégrale en posant :

$$\int_0^1 f(x)dx = [(2x + 3)e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx$$

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x \ln x$$

f est continue sur $[1 ; 2]$. Calculons $\int_1^2 f(x)dx$.

Posons : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$; on a : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

On calcule cette intégrale en posant :

$$\int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx$$

Exemple 2

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^2 \sin x$.

h est continue sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{3}} h(x)dx$.

Posons : $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g'(x) = \sin x \end{cases}$; on a : $\begin{cases} f'(x) = 2x \\ g(x) = -\cos x \end{cases}$

On calcule cette intégrale en posant :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} h(x)dx = [-x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx$$

Calculons : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx$.

Posons : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$; on a : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x \end{cases}$

On calcule cette intégrale en posant :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$$

Exercices

2.e Utiliser une intégration par parties pour calculer :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

(2) $\int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$

(3) $\int_1^2 x \ln x dx$

(4) $\int_1^2 \ln t dt$

2.f Utiliser deux intégrations par parties pour calculer :

(1) $\int_0^2 x^2 e^x dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

(3) $\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx$

(4) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx$

3.1. Calcul d'aires

Calcul de l'aire d'une partie du plan limitée par l'axe des abscisses et une courbe

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

Étant une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, de représentation graphique $(\mathcal{C})$, nous nous proposons de calculer l'aire de la partie Δ du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI) , les droites d'équations respectives : $x = a$ et $x = b$.

■ Cas où f est une fonction continue et positive

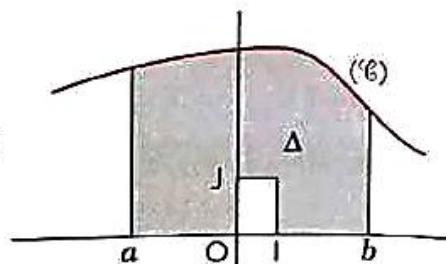
On sait que,

Si f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$,

Δ la partie du plan définie par : $M(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

alors

$$\text{aire de } \Delta = \int_a^b f(x) dx$$



■ Cas où f est une fonction continue et négative

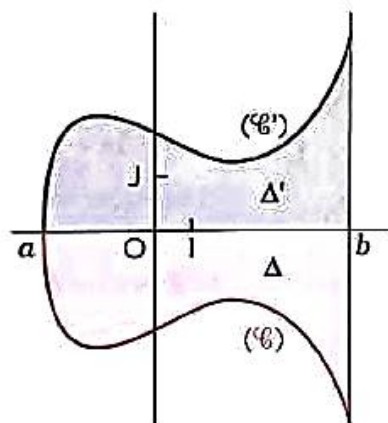
Si f est une fonction continue et négative sur $[a; b]$ on pourra considérer l'opposée de f , la fonction $-f$. C'est une fonction continue et positive sur $[a; b]$. Sa représentation graphique $(\mathcal{C}')$ est le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à (OI) .

Les parties du plan Δ et Δ' définies ci-dessous sont symétriques par rapport à l'axe (OI) , elles sont donc superposables.

$M(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$; $M(x, y) \in \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq (-f)(x) \end{cases}$

On a : $\text{aire}(\Delta') = \int_a^b (-f)(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

donc : $\text{aire}(\Delta) = \text{aire}(\Delta') = - \int_a^b f(x) dx$

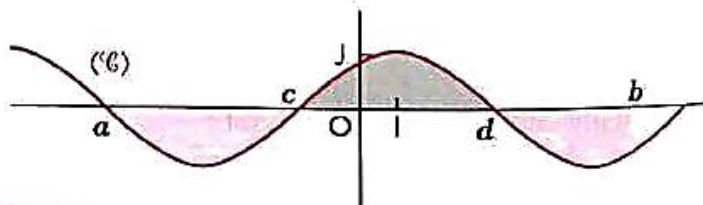


■ Cas où f est fonction continue et quelconque

Les résultats précédents permettent de calculer l'aire de la partie du plan Δ limitée par la représentation graphique $(\mathcal{C})$ d'une fonction continue, l'axe (OI) , les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

Dans le cas de figure ci-contre,

on a : $\text{aire}(\Delta) = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^b f(x) dx$



Exemple

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

$(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de la fonction polynôme f définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Calculons l'aire de la partie Δ du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI) , les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 2$.

Étude du signe de f

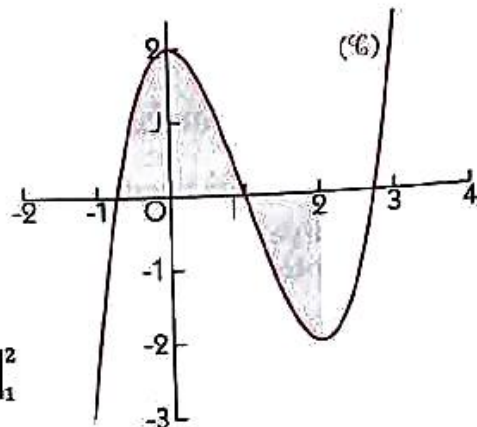
x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{3}$	1	2	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	+

Calcul d'aire

On a : $\text{aire}(\Delta) = - \int_1^{1-\sqrt{3}} f(x) dx + \int_{1-\sqrt{3}}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x \right]_1^{1-\sqrt{3}} + \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x \right]_{1-\sqrt{3}}^1 - \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x \right]_1^2$$

D'où : $\text{aire}(\Delta) \approx 5,75$.



Calcul de l'aire d'une partie du plan limitée par deux courbes

On veut calculer l'aire de la partie (Δ) du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$, représentations graphiques des fonctions f et g continues sur $[a; b]$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Soit k un nombre réel tel que :

pour tout x élément de $[a; b]$, $f(x) + k \geq 0$ et $g(x) + k \geq 0$.

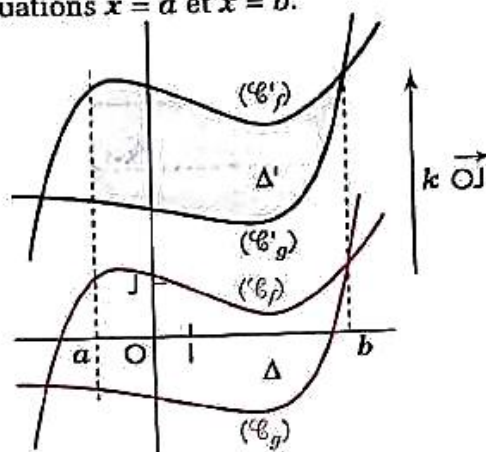
Désignons par Δ' l'image de Δ par la translation de vecteur $k \vec{OJ}$.

Δ' est limité par les représentations graphiques de $x \mapsto f(x) + k$,

$x \mapsto g(x) + k$, les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

donc : $\text{aire}(\Delta) = \text{aire}(\Delta') = \int_a^b [f(x) + k] dx - \int_a^b [g(x) + k] dx$.

d'où : $\text{aire}(\Delta) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$



Exemple

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de la fonction f

définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$.

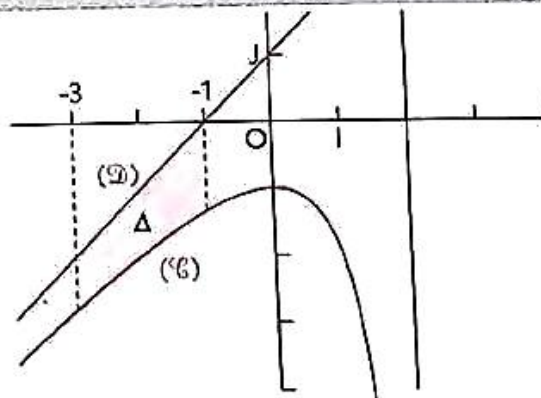
Calculons l'aire de la partie Δ du plan limitée par $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$ asymptote de $(\mathcal{C})$, les droites d'équation $x = -3$ et $x = -1$.

On a : $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x-2} = 0$;

donc : $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation $y = x + 1$.

Dans l'intervalle $[-3; -1]$, la droite $(\mathcal{D})$ est au-dessus de la courbe $(\mathcal{C})$.

Donc : $\text{aire}(\Delta) = \int_{-3}^{-1} [f(x) - (x + 1)] dx = \int_{-3}^{-1} \frac{4}{x-2} dx$
 $= [4 \ln(2 - x)]_{-3}^{-1} = 4 \ln \frac{3}{5}$.



Exercices

- 3.a Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) , l'unité graphique étant 2 cm.
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x - x \ln(-x)$. $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de la fonction f .
Calculer l'aire de la partie Δ du plan limitée par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, les droites d'équations : $x = -4$ et $x = -1$.

- 3.b Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .
On considère la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$, la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation : $y = -x^2 - 4x - 2$.
Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$.
Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$.

3.2. Calcul approché d'une intégrale

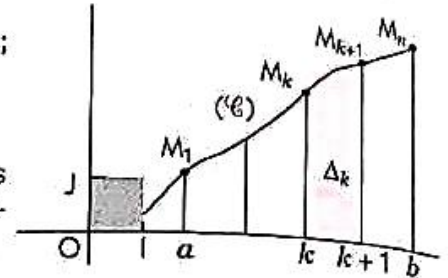
Recherche de méthodes de calcul approché

Il n'est pas toujours possible de calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Cependant, lorsque la fonction f est continue et positive, nous nous proposons de donner des méthodes de calcul approché de l'aire de la partie du plan limitée par la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f , (OI) , les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

Pour cela,

- on subdivise l'intervalle $[a ; b]$ en n intervalles de même amplitude ;
- on calcule une valeur approchée de $\mathcal{A}(\Delta_k)$ l'aire de Δ_k ;
- on fait la somme de toutes les valeurs approchées des aires des Δ_k .

Pour calculer l'aire de Δ_k , on utilise habituellement l'une des méthodes suivantes. Les figures ci-dessous permettent de déterminer les rectangles R_k , R_{k+1} , R'_k et le trapèze T_k .



Méthode du rectangle	Méthode du trapèze	Méthode du point milieu
$\mathcal{A}(R_k) \leq \mathcal{A}(\Delta_k) \leq \mathcal{A}(R_{k+1})$	$\mathcal{A}(\Delta_k) \approx \mathcal{A}(T_k)$	$\mathcal{A}(\Delta_k) \approx \mathcal{A}(R'_k)$

Exemple d'utilisation de la méthode des rectangles

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . f est une fonction continue, positive et croissante sur l'intervalle $[0,1 ; 0,8]$ définie par : $f(x) = \frac{-1}{\ln x}$.

Sans calculer l'intégrale, cherchons une valeur approchée du nombre $\int_{0,1}^{0,8} \frac{-1}{\ln x} dx$.

Pour cela,

partageons $[0,1 ; 0,8]$ en 7 intervalles d'amplitude 0,1.

L'intégrale $\int_{0,1}^{0,8} \frac{-1}{\ln x} dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI) , les droites d'équations : $x = 0,1$ et $x = 0,8$.

Désignons par S_1 la somme des aires des rectangles tramés gris et par S_2 la somme des aires des rectangles hachurés.

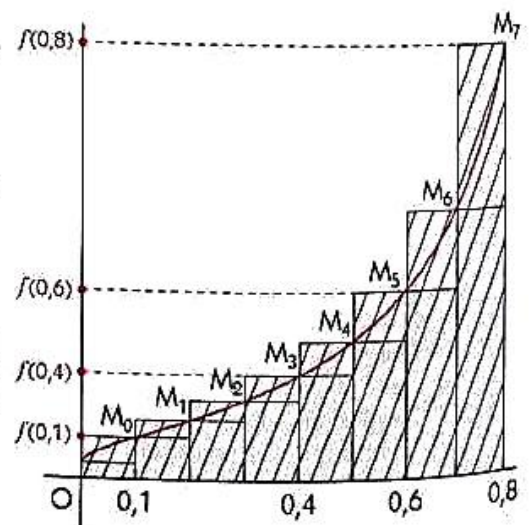
$$\text{On a : } S_1 \leq \int_{0,1}^{0,8} \frac{-1}{\ln x} dx \leq S_2 ;$$

$$S_1 = 0,1[f(0,1) + f(0,2) + f(0,3) + f(0,4) + f(0,5) + f(0,6) + f(0,7)]$$

$$S_2 = 0,1[f(0,2) + f(0,3) + f(0,4) + f(0,5) + f(0,6) + f(0,7) + f(0,8)]$$

Le calcul des valeurs approchées de S_1 et S_2 donne :

$$0,918 \leq \int_{0,1}^{0,8} \frac{-1}{\ln x} dx \leq 1,323$$



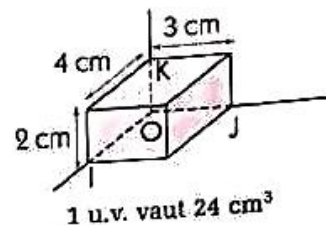
- Déterminer une valeur approchée de l'intégrale, calculer l'erreur $S_2 - S_1$ et donner une interprétation graphique de cette erreur.

3.3. Calcul de volumes

L'espace est muni du repère orthogonal (O, I, J) .

■ **Unité de volume, unité graphique de volume**

- L'unité de volume, noté u.v., est le volume du parallélépipède construit à partir des points O, I, J, K .
- Lorsque l'unité graphique sur chaque axe du repère est exprimée en cm, en m..., l'unité graphique de volume s'exprime en cm^3 , en m^3 ...



■ **Exemple introductif**

Volume d'un cylindre droit exprimé par une intégrale

On considère un cylindre droit d'axe (OK) , dont les bases sont contenues dans deux plans parallèles au plan (OIJ) et ayant respectivement pour équation : $z = a$ et $z = b$ [$a < b$].

On désigne par :

$\mathcal{R}$ l'aire d'une base

$\mathcal{V}$ le volume

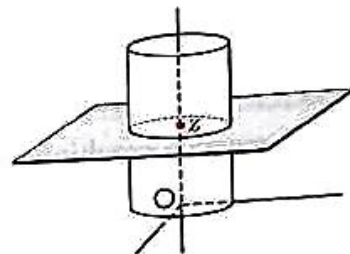
$\mathcal{G}$ l'application : $[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

$z \mapsto \mathcal{G}(z)$, $\mathcal{G}(z)$ étant l'aire de la section du cylindre avec un plan parallèle à (OIJ) et de côté z .

On a donc : $\mathcal{G}(z) = \mathcal{R}$.

On obtient : $\mathcal{V} = (b - a)\mathcal{R} = \int_a^b \mathcal{G}(z) dz$.

On démontre et nous admettons la propriété suivante.



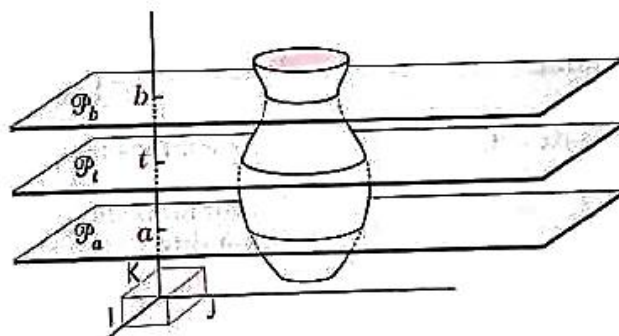
Propriété

Le volume $\mathcal{V}$ de la partie d'un solide limitée par les plans $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$ d'équations respectives :

$$z = a \quad \text{et} \quad z = b \quad [a < b]$$

est déterminé (en u.v.) par : $\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{G}(t) dt$,

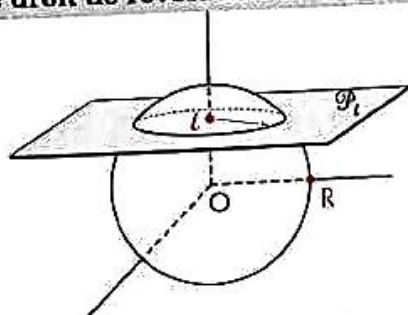
$\mathcal{G}(t)$ étant l'aire de la section du solide par le plan $\mathcal{P}_t$ d'équation $z = \mathcal{G}(t)$ [$a \leq t \leq b$].



■ **Volume de la boule et du cône**

Activité

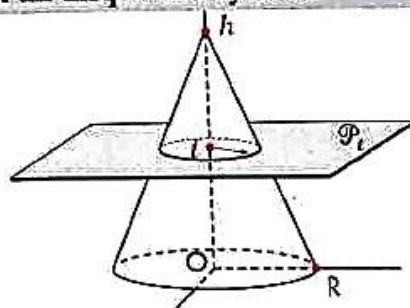
On veut retrouver par la propriété précédente, la formule du volume d'une boule de rayon R et celui d'un cône droit de révolution de hauteur h et dont la base est un disque de rayon R .



Le plan $\mathcal{P}_t$ d'équation $z = t$ [$-R \leq t \leq R$] coupe la boule suivant un disque de rayon $r(t)$ et d'aire $\mathcal{G}(t)$.

- Exprimer $\mathcal{G}(t)$ en fonction de R et t .

- Dans les deux cas, exprimer $\mathcal{V}$ à l'aide d'une intégrale ; calculer cette intégrale. Comparer les résultats ainsi obtenus avec les formules usuelles.



Le plan $\mathcal{P}_t$ d'équation $z = t$ [$0 \leq t \leq h$] coupe le cône suivant un disque de rayon $r(t)$ et d'aire $\mathcal{G}(t)$.

- Exprimer $\mathcal{G}(t)$ en fonction de R , h et t .

TP1 Encadrement d'une intégrale comportant ln

Exercice commenté 1

1. Étudier la position relative des représentations graphiques des fonctions $\ln$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.
En déduire un encadrement de la fonction $\ln$ sur $[1; +\infty[$.

2. Utiliser les résultats précédents pour encadrer les intégrales suivantes :

$$a) \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} dx \quad ; \quad b) \int_1^\alpha \frac{x^2 \ln x}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

α étant un nombre réel strictement supérieur à 1.

Trouver α pour que dans chacun des cas, l'intégrale soit inférieure à 1.

1. On constate graphiquement que :

$$\text{pour tout } x \text{ élément de } [1; +\infty[, \quad 0 \leq \ln x < \sqrt{x} \quad (1)$$

Cette constatation graphique est confirmée par l'étude des variations de la fonction $x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$.

2. Soit x un élément de $[1; +\infty[$;

$$\text{on a : } 0 \leq \ln x < \sqrt{x} \quad \text{d'après (1)}$$

$$\text{d'où : } 0 \leq \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} < \frac{1}{x}$$

$$\text{or : } \int_1^\alpha \frac{dx}{x} = \ln \alpha$$

$$\text{donc : } 0 \leq \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} dx < \ln \alpha.$$

$$\text{Nous voulons avoir : } \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} dx < 1$$

$$\text{il suffit alors de poser : } \ln \alpha = 1$$

$$\text{c'est-à-dire : } \alpha = e.$$

$$\text{D'où : } \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} dx < 1.$$

$$\text{on a : } 0 \leq \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} < \frac{1}{x^4}$$

$$\text{d'où : } 0 \leq \frac{x^2 \ln x}{x^4 + x^2 + 1} < \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^4} \quad \text{d'après (1)}$$

$$0 \leq \frac{x^2 \ln x}{x^4 + x^2 + 1} < \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$\text{or : } \int_1^\alpha \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \left[\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_1^\alpha$$

$$\text{donc : } 0 \leq \int_1^\alpha \frac{x^2 \ln x}{x^4 + x^2 + 1} dx < 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

$$\text{Nous voulons avoir : } \int_1^\alpha \frac{x^2 \ln x}{x^4 + x^2 + 1} dx < 1$$

$$\text{il suffit alors de poser : } 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = 1$$

$$\text{c'est-à-dire : } \alpha = 4.$$

$$\text{D'où : } 0 \leq \int_1^4 \frac{x^2 \ln x}{x^4 + x^2 + 1} dx < 1.$$

TP2 Calcul d'une intégrale comportant ln

Exercice commenté 2

$$\text{Calculer : } \int_2^3 (4x+1)\ln x dx.$$

Cette intégrale est du type : $\int_2^3 f(x)\ln x dx$.

Nous ne connaissons pas une primitive sur $[2; 3]$ de la fonction $f(x)\ln x$. Néanmoins, en utilisant judicieusement une intégration par parties, nous pouvons nous ramener à l'intégration d'une fonction ne contenant pas la fonction $\ln$.

Posons :

$$u(x) = \ln x$$

$$v'(x) = 4x + 1$$

$$\text{donc : } u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = 2x^2 + x$$

$$\text{d'où : } \int_2^3 (4x+1)\ln x dx = \left[(2x^2+x)\ln x \right]_2^3 - \int_2^3 (2x+1)dx = \left[(2x^2+x)\ln x - (x^2+x) \right]_2^3$$

$$\text{donc : } \int_2^3 (4x+1)\ln x dx = 21\ln(3) - 10\ln(2) - 6$$

TP3 Fonction définie par une intégrale

Ce TP a pour objectif d'étudier une fonction définie par une intégrale en utilisant la définition d'une primitive et les propriétés géométriques d'une intégrale.

Exercice commenté 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Étudier sommairement et représenter graphiquement f .

2. On considère la primitive F sur $[0 ; +\infty[$ de f qui s'annule en 0.

– Écrire $F(x)$ sous forme d'intégrale ; justifier que la fonction F est bien définie sur $[0 ; +\infty[$.

– Donner une interprétation de $F(x)$ pour les valeurs positives et les valeurs négatives de x ; en déduire la parité de F .

– Étudier le sens de variation de F (on ne calculera pas les limites).

1. Étude sommaire et esquisse de la représentation graphique de f

$$D_f = \mathbb{R}$$

f est une fonction paire ;

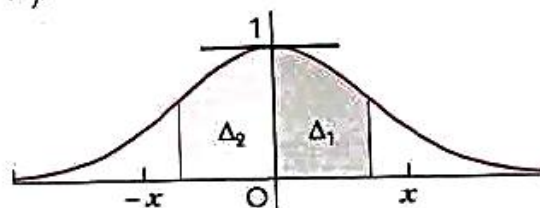
f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{pour tout nombre réel } x, f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0 ; \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variation de f et l'esquisse de $(\mathcal{C}_f)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	+		-
$f(x)$	0	1	0



2. Étude de la fonction F

Expression de $F(x)$ sous forme d'intégrale

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet sur $[0 ; +\infty[$ des primitives.

Désignons par F celle qui s'annule en 0.

Par définition :

$$\text{pour tout } x \text{ élément de } [0 ; +\infty[, F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Interprétation graphique de $F(x)$

Soit x un nombre réel strictement positif.

Par définition (voir graphique),

on a : Aire de $\Delta_1 = F(x)$; Aire de $\Delta_2 = F(-x)$

or : Aire de $\Delta_1 = \text{Aire de } \Delta_2$

d'où : F est une fonction paire.

Sens de variation de F

Par définition, la fonction F est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et

$$\text{pour tout } x \text{ élément de } [0 ; +\infty[, F'(x) = e^{-x^2}$$

On en déduit que F est une fonction strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

TP4. Détermination de primitives

Ce TP a pour objet de compléter les TP2 et TP3 par une méthode de détermination de primitives de certaines fonctions du type fg .

Cette méthode consiste à :

- définir la primitive sous forme d'intégrale ;
- expliciter cette primitive en calculant l'intégrale à l'aide d'une ou de deux intégrations par parties.

Exemple 1

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$, de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x \sin x.$$

- La primitive F est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x t \sin t \, dt.$$

- Calcul de cette intégrale par une intégration par parties :

$$\text{on pose : } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin t \end{cases} ; \quad \text{on a : } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$$

$$\text{on obtient : } \int_{\frac{\pi}{2}}^x t \sin t \, dt = - \left[t \cos t \right]_{\frac{\pi}{2}}^x + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos t \, dt$$

$$\text{d'où : } F(x) = -x \cos x + \sin x - 1.$$

Exemple 2

À l'aide de deux intégrations par parties, déterminer la primitive G sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$, de la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x^2 \cos x.$$

- La primitive G est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$G(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x t^2 \cos t \, dt.$$

- Calcul de cette intégrale par deux intégrations par parties :

$$\text{on pose : } \begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = \cos t \end{cases} ; \quad \text{on a : } \begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = \sin t \end{cases}$$

$$\text{on obtient : } G(x) = \left[t^2 \sin t \right]_{\frac{\pi}{2}}^x - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^x t \sin t \, dt$$

$$\text{d'où : } G(x) = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4} - 2F(x)$$

$$G(x) = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4} + 2(x \cos x - \sin x + 1).$$

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

1 Calculer les intégrales suivantes :

- (1) $\int_0^3 (-x^2 + 4x + 1) dx$ (2) $\int_1^e \frac{dx}{x}$
 (3) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ (4) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$
 (5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$ (6) $\int_0^{\ln 3} e^x dx$

2 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + |1 - e^{-x}|$.

Calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

3 On considère les intégrales I et J ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx.$$

1. Calculer $I + J$ et $I - J$.
 2. En déduire I et J .

4 On considère les intégrales I et J ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \cos^2 x dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin^2 x dx.$$

1. Calculer $I + J$ et $I - J$.
 2. En déduire I et J .

5 On considère la fonction f de $[0; \frac{\pi}{4}]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ et que :

$$\text{pour tout élément } x \text{ de } [0; \frac{\pi}{4}], f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x}.$$

2. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

3. En déduire une relation entre les intégrales I et J .

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx. \text{ Calculer } J.$$

Inégalités et intégrales

6 Démontrer que : pour tout x élément de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n ,

$$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^4} \leq x^n.$$

$$\text{En déduire que : } \frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^4} dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

7 Démontrer que : pour tout nombre réel positif t ,

$$1-t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1.$$

En déduire que : pour tout nombre réel positif x ,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

8 Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur moyenne sur l'intervalle K de la fonction f définie ci-dessous.

- (1) $f: x \mapsto e^{-x}$ $K = [\ln 2; \ln 3]$
 (2) $f: x \mapsto x^3 + x - 3$ $K = [1; 3]$
 (3) $f: x \mapsto \frac{\sin \pi x}{2}$ $K = [0; \frac{1}{2}]$
 (4) $f: x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ $K = [0; 3]$

9 Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur moyenne sur l'intervalle K de la fonction f définie ci-dessous.

- (1) $f(x) = x^2$ $K = [1; 2]$
 (2) $f(x) = 2 \sin 2x$ $K = [1; \frac{\pi}{2}]$
 (3) $f(x) = \tan x$ $K = [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$

10 1. Démontrer que pour tout $t \geq 0$,

$$1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2.$$

En déduire : que pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

2. Trouver un encadrement analogue pour $-1 \leq t \leq 0$.

$$\text{En déduire que : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

11 On sait que : pour tout $t \geq 0$, $1 \leq e^t$.
 1. Démontrer que : pour tout $t \geq 0$, $1+t \leq e^t$.

(Utiliser une intégration.)

2. Démontrer que :

$$\text{pour tout } t \geq 0, 1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\dots+\frac{t^n}{n!} \leq e^t.$$

(Utiliser la démonstration par récurrence.)

12 Démontrer que pour tout t élément de $[0; 1]$,

$$0 \leq e^t - 1 \leq e \times t.$$

(On pourra intégrer e^t sur $[0; 1]$.)

En déduire que :

pour tout u élément de $[0; 1]$,

$$1+u \leq e^u \leq 1+u+\frac{e}{2}u.$$

Techniques du calcul d'intégrales

Utilisation d'une primitive pour calculer une intégrale

13 Calculer chacune des intégrales suivantes :

- (1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ (2) $\int_2^4 \frac{1+x}{x^2+2x+3} dx$
 (3) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1} dx$ (4) $\int_1^3 x^3 \sqrt{x} dx$
 (5) $\int_0^2 e^{-3x} dx$ (6) $\int_0^{\frac{1}{3}} \sin x dx$
 (7) $\int_{-1}^1 e^{3x+1} dx$ (8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

14 Calculer chacune des intégrales suivantes :

(1) $\int_2^3 \left(x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

(2) $\int_0^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{1+x} + \frac{2}{2x+2} \right) dx$

15 Calculer chacune des intégrales suivantes :

(1) $\int_0^\pi \cos 2x \, dx$ (2) $\int_0^\pi \sin 2x \, dx$ (3) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$

16 Calculer chacune des intégrales suivantes :

(1) $\int_0^1 (2x-5)(x^2-5x+1) \, dx$

(2) $\int_{-3}^0 \frac{x+3}{(x^2+6x-1)^3} \, dx$ (3) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, dx$

(4) $\int_2^5 \left(2x-1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$ (5) $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} \, dx$

(6) $\int_{-3}^{-2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$ (7) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \, dx$

(8) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$ (9) $\int_{e-1}^1 \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{x} \right) dx$

✓ **17** Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin 2x \, dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^0 \cos x \, dx$

(3) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} u e^{u^2+1} \, du$ (4) $\int_0^2 u \sqrt{2u^2+1} \, du$

(5) $\int_0^2 \frac{2 \, dt}{\sqrt{4t+1}}$ (6) $\int_2^1 \frac{1}{u^2} e^{\frac{1}{u}} \, du$

(7) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1} \, dx$ (8) $\int_0^1 \frac{x+1}{2x^2+4x+5} \, dx$

(9) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$ (10) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2 \cos x} \sin x \, dx$

18 Calculer les intégrales :

(1) $\int_{-1}^0 \frac{x^2+3x+1}{2x+3} \, dx$ (2) $\int_{-1}^1 \frac{5x^5+3x^3\sqrt{3}}{x^4+x^2+1} \, dx$

19 On considère le polynôme $f(x)$ défini par :
 $f(x) = (1+x)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

1. Calculer $\int_0^1 f(x) \, dx$.

2. Après avoir transformé f par la formule du binôme, donner une autre expression de $\int_0^1 f(x) \, dx$.

3. En déduire la valeur de :

$$1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n$$

Utilisation de la linéarisation dans le calcul d'une intégrale

20 Linéariser $\sin^4 x$.

Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \sin^4 x \, dx$.

21 Linéariser $\sin^2 x \cos^4 x$.

Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

Calculer de même $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^4 x \, dx$.

22 Calculer les intégrales suivantes en linéarisant :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 5x \, dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \, dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ (4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2(2x) \cos^2(3x) \, dx$

✓ **23** Calculer les intégrales ci-dessous en évitant la linéarisation :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx$

(3) $\int_0^\pi \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$

(5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2 x \cos x \, dx$ (6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos x \, dx$

24 1. Transformer en une somme $\cos x \cos 2x \cos 3x$.
 2. Calculer les intégrales I et J définies ci-dessous :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x \cos 3x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 3x \, dx$.

Utilisation de la parité ou de la périodicité dans le calcul d'une intégrale

25 Utiliser la parité ou la périodicité pour calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_{-2\pi}^{2\pi} (x - \sin x) \, dx$ (2) $\int_{-2\pi}^{2\pi} (x^2 - \cos x) \, dx$

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) \, dx$ (4) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx$

Intégration par parties

✓ **26** Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

(1) $\int_1^2 \ln x \, dx$ (2) $\int_1^2 \ln(4x-1) \, dx$

(3) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ (4) $\int_3^5 \ln \frac{x-1}{x} \, dx$

27 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties :

(1) $\int_{-2}^1 x e^x \, dx$ (2) $\int_{-1}^1 (1+x) e^x \, dx$ (3) $\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{e^x} \, dx$

(4) $\int_0^2 (2x+4) e^{x-1} \, dx$ (5) $\int_{-1}^2 (x+2) e^{x+1} \, dx$

✓ **28** Calculer les intégrales ci-dessous à l'aide d'intégrations par parties :

(1) $\int_0^\pi x \cos x \, dx$ (2) $\int_0^\pi (2x^2-1) \cos 3x \, dx$

$$(3) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x \, dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin^2 x \, dx$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$$

29 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégration(s) par parties.

$$(1) \int_0^1 x \sqrt{1-x} \, dx$$

$$(2) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} \, dx$$

30 1. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que :

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

$$2. \text{ Calculer } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+1)} \, dx.$$

3. À l'aide d'une intégration par parties,

$$\text{calculer } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x(x^2+1)} \, dx.$$

31 1. Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + 3 \cos x.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties,

$$\text{calculer } \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x+1) \cos^2 x \sin x \, dx.$$

32 On considère la fonction f définie sur $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$ par : $f(x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la

$$\text{valeur exacte du nombre } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos t \sin t}.$$

33 On considère les intégrales I et J ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, dx.$$

1. Calculer $I+J$.

2. Calculer $I-J$ à l'aide d'une intégration par partie.

3. En déduire I et J .

34 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x} \cos x \, dx$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2x} x^2 \sin 3x \, dx$$

$$(3) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \sin x \, dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \sin x \, dx$$

35 Calculer les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties.

$$(1) \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 3) e^x \, dx$$

$$(2) \int_1^2 \ln^2 x \, dx$$

$$(3) \int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}} \, dx$$

$$(4) \int_{-2}^1 (x^2 + 1) e^x \, dx$$

$$(5) \int_1^2 x \ln^2 x \, dx$$

$$(6) \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \cos 3x \, dx$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \sin 3x \, dx$$

Calculs de grandeurs

Fonction définie par une intégrale

36 f est la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \int_1^x \frac{5t}{1+t} \, dt.$$

1. Calculer $f(1)$.

2. Déterminer la dérivée f' de f .

37 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$\text{par : } f(x) = \int_0^x (e^t + 3e^{-t}) \, dt.$$

1. Indiquer sans calcul $f'(x)$ et $f(0)$.

2. Étudier les variations de f .

3. m étant un nombre réel donné, déterminer dans $\mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

38 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} \, dt.$$

1. Indiquer sans calcul $f'(x)$ et $f(0)$.

2. Étudier les variations de f .

3. Démontrer que : pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = x + \ln(e^{-x} + 1) - \ln 2.$$

En déduire que la droite d'équation $x - \ln 2$ est une asymptote à la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f .

4. Construire $(\mathcal{C})$.

D'après BAC

39 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}.$$

1. Préciser l'ensemble D_f de définition de f .

2. Déterminer les nombres réels a, b, c et d tels que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}.$$

3. Donner une primitive de f sur $[-1; 1]$.

$$\text{Calculer } \int_{-1}^1 f(x) \, dx.$$

PROBLÈMES

40 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \ln \frac{3-x}{1+x}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f .

1. Étudier les variations de f et construire $(\mathcal{C})$.

2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales :

$$\int_1^2 \ln(x+1) \, dx \quad \text{et} \quad \int_1^2 \ln(-x+3) \, dx.$$

3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI), les droites d'équations : $x=1$ et $x=2$.

41 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x|x|.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f .

1. Étudier les variations de f et construire $(\mathcal{C})$.

2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI), les droites d'équations : $x=0$ et $x=-2$.

42 Le plan est muni du repère (O, I, J) .
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-2)^2}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f .

1. Étudier les variations de f et construire $(\mathcal{C})$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, les droites d'équations : $y = x + 1$, $x = 3$ et $x = 15$.

43 Le plan est muni du repère (O, I, J) .

On considère la fonction f de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \tan^2 x.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f .

1. Étudier les variations de f et construire $(\mathcal{C})$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI) , (OJ) et la droite d'équation : $x = \frac{2\pi}{5}$.

44 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x - e^{3x}.$$

1. Étudier les variations de f .
2. Construire la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f (unité graphique : $OI = OJ = 3$ cm).
3. Calculer l'aire (en cm^2) de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations : $x = -4$ et $x = -1$.

45 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

1. Étudier les variations de f .
2. Construire la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f (unité graphique : $OI = OJ = 4$ cm).
3. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :
$$f(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$
4. Calculer l'aire (en cm^2) de la partie limitée par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \frac{3}{4}$.

46 On se propose de calculer une valeur appro-

chée de l'intégrale A définie par : $A = \int_5^{50} \frac{dx}{1+x^5}.$

On considère pour cela les deux intégrales B et C définies par :

$$B = \int_5^{50} \frac{dx}{x^6} \quad \text{et} \quad C = \int_5^{50} \frac{dx}{x^{12}}.$$

1. Démontrer que : $A \leq B$.
2. Démontrer que : $B - A \leq C$.
3. Dédurre un encadrement de A .

47 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^x(1 - e^x).$$

On désigne par $(\mathcal{C}_k)$ la représentation graphique de f .

1. Étudier les variations de f et construire $(\mathcal{C}_k)$.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}(k)$ de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_k)$, (OI) , (OJ) et la droite d'équation : $x = k$ [$k < 0$].
3. Déterminer une valeur approchée de $\mathcal{A}(-3)$ à $5 \cdot 10^{-3}$.
4. Calculer $\lim_{k \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(k)$.

48 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

On considère la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - \ln(1+x).$$

On désigne par $(\mathcal{C}_\alpha)$ la représentation graphique de f .

1. Étudier les variations de f et construire $(\mathcal{C}_\alpha)$.
2. Démontrer que f détermine une bijection de $] -1 ; +\infty[$

sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α .

3. Prouver que : $0,7 \leq \alpha \leq 0,8$.

4. Calculer en fonction de l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_\alpha)$, (OI) et (OJ) .

49 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) .

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^{-x} \cos x.$$

On désigne par $(\mathcal{C}_\rho)$ la représentation graphique de f .

1. Étudier les variations de f et construire $(\mathcal{C}_\rho)$ sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $(a \cos x + b \sin x)e^{-x}$ soit une primitive de f .
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_\rho)$ et les droites d'équations : $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

50 On considère la fonction :

$$f(x) = \ln(1 + e^x).$$

On se propose de calculer : $\int_0^\lambda f(x) dx$ [$\lambda \in \mathbb{R}$].

1. On désigne par $I(\lambda)$ cette intégrale. Quel est le signe de $I(\lambda)$?

2. a) Trouver deux nombres réels a et b tels que :

$$\text{pour tout nombre réel } x, \frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}.$$

Calculer : $\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx$.

b) f' étant la fonction dérivée de f , calculer $f + f'$.

c) Calculer : $I(\lambda)$.

51 1. x est un nombre réel.

On pose : $F(x) = \int_0^x 10^t dt$.

Calculer $F(x)$. (Mettre 10^t sous la forme $e^{t \ln 10}$.)

2. Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 6$.

52 On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}.$$

1. Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

2. Étudier le sens de variation de g . Calculer $g(0)$. Déduire des variations de g le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

3. a) Calculer $\int_0^x 2te^{2t} dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire la primitive de la fonction g qui prend la valeur 3 en 0.

4. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$. $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité 2 cm).

a) Étudier les variations de f .

b) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet pour asymptote en $-\infty$ la droite (D) d'équation : $y = x + 3$.

Étudier suivant les valeurs de x les positions relatives de (D) et de $(\mathcal{C})$.

c) Démontrer que $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on désignera par A et B (A ayant une abscisse inférieure à celle de B).

d) Déterminer et justifier un encadrement d'amplitude 0,1 de l'abscisse de B .

5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) .

a) α est un nombre réel négatif. Exprimer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (D) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

b) Calculer : $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

Suites numériques

Les « suites de nombres » engendrent l'idée de récurrence, dont Blaise Pascal (1654) tire le raisonnement par induction complète. C'est le mathématicien Augustin Cauchy qui montra à Laplace la nécessité d'une étude précise des notions de convergence ou de divergence d'une suite.

Son œuvre est très riche. Il reconstruit en particulier l'analyse avec des concepts de base précisément définis et reste ainsi, pour le début du XIX^e siècle, le plus grand renovateur de l'analyse.



© Photothèque MACHETTE

Augustin Louis Cauchy
mathématicien français – 1789-1857.

SOMMAIRE

1. Généralités	166
2. Convergence	170
3. Suites arithmétiques et géométriques	177
4. Résolution de problèmes concrets	183

1.1. Détermination et sens de variation d'une suite

Tableau récapitulatif

① Détermination d'une suite

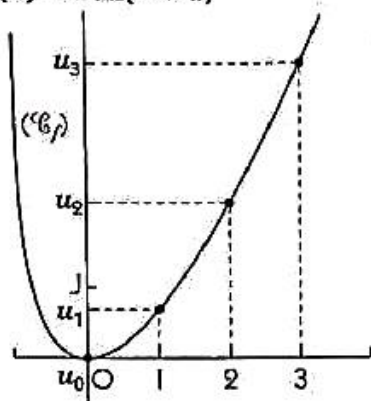
On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Suite définie par une formule explicite

$$u_n = n \ln(n+1) = f(n)$$

f étant la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x \ln(x+1)$$

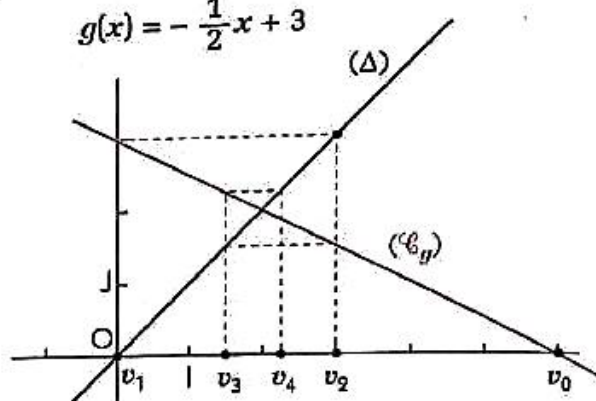


Suite définie par une formule de récurrence

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + 3 = g(v_n) \end{cases}$$

g étant la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$



② Sens de variation

u est une suite numérique, n_0 un nombre entier naturel.

- u est croissante à partir de l'indice n_0
si et seulement si
pour tout nombre entier naturel n supérieur
ou égal à n_0 , $u_n \leq u_{n+1}$

- u est strictement croissante à partir de l'indice n_0
si et seulement si
pour tout nombre entier naturel n supérieur
ou égal à n_0 , $u_n < u_{n+1}$

u est dite *monotone* lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

u est dite *strictement monotone* lorsqu'elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

- u est décroissante à partir de l'indice n_0
si et seulement si
pour tout nombre entier naturel n supérieur
ou égal à n_0 , $u_n \geq u_{n+1}$

- u est strictement décroissante à partir de l'indice n_0
si et seulement si
pour tout nombre entier naturel n supérieur
ou égal à n_0 , $u_n > u_{n+1}$

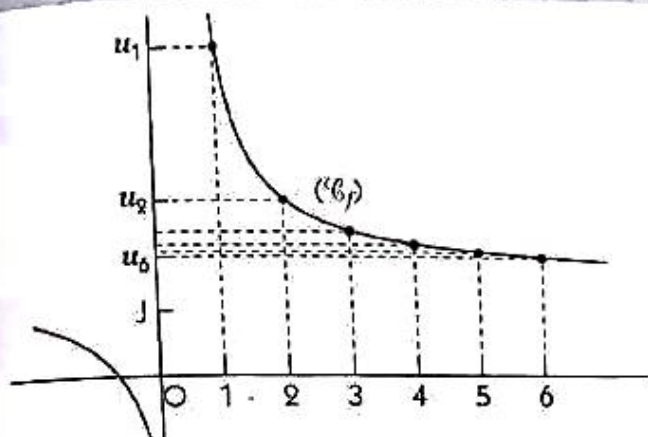


Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique u , on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- on compare u_n et u_{n+1} , ce qui revient aussi à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- pour une suite à termes positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 ;
- lorsque u est définie par une formule explicite : $u_n = f(n)$
on étudie le sens de variation de la fonction f .
- lorsque u est définie par une formule de récurrence : $u_{n+1} = g(u_n)$
on utilise un raisonnement par récurrence (éventuellement le sens de variation de g).

Exemples

Étudions le sens de variation de la suite u définie par : $u_n = \frac{3n+2}{2n-1}$.



Étudions, de deux manières, le sens de variation de u .

Signe de $u_{n+1} - u_n$

Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-7}{(2n+1)(2n-1)} < 0$$

d'où : u est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

Utilisation de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

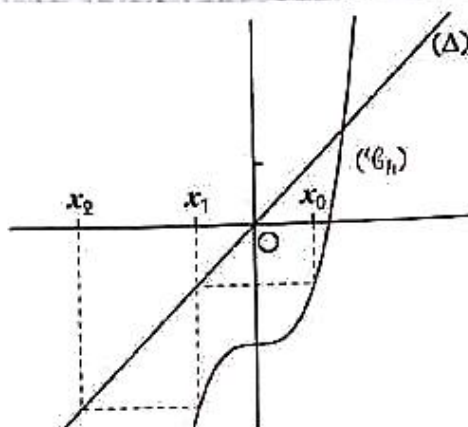
$$x \mapsto \frac{3x+2}{2x-1}$$

Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $u_n = f(n)$.

On vérifie, par le signe de sa dérivée f' , que f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

La suite u est donc strictement décroissante à partir de l'indice 1.

Étudions le sens de variation de la suite x définie par : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n^3 - 2 \end{cases}$



Considérons la fonction $h : x \mapsto x^3 - 2$.

Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $x_{n+1} = h(x_n)$.

On vérifie que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démontrons par récurrence que :

pour tout nombre entier naturel n , $x_n > x_{n+1}$

– On a : $x_0 > x_1$

– Supposons que :

pour un nombre entier naturel k , $x_k > x_{k+1}$

donc : $h(x_k) > h(x_{k+1})$

d'où : $x_{k+1} > x_{k+2}$

– Par conséquent :

pour tout nombre entier naturel n , $x_n > x_{n+1}$

La suite x est donc décroissante.

Étudions le sens de variation de la suite w définie par : $w_n = \frac{1}{3^n}$.

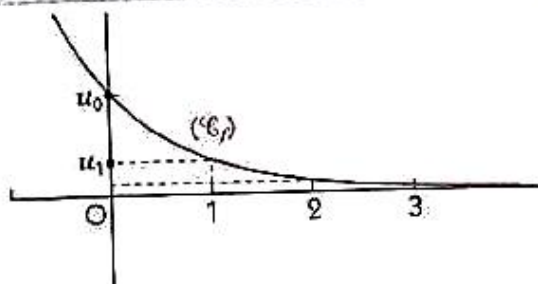
Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

On a : $w_n > 0$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} < 1$$

La suite w est donc strictement décroissante.



Exercices

1.a On considère la suite v définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n - 2 \end{cases}$$

Calculer les quatre premiers termes de v .
Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes de cette suite.
Émettre une conjecture sur le sens de variation de v .

Contrôler cette conjecture.

1.b On considère la suite x définie par :

$$x_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2+n^2} + \dots + \frac{1}{n+n^2}$$

Calculer les cinq premiers termes.
Étudier le sens de variation de cette suite.

1.2. Comparaison

■ Comparaison de deux suites

■ Activité

On veut comparer les suites u et v définies par :

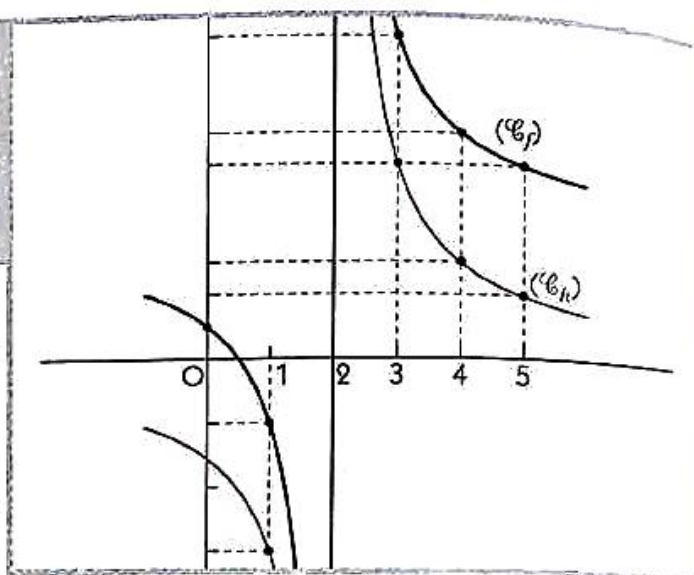
$$u_n = \frac{2n-1}{n-2} = f(n) \quad ; \quad v_n = \frac{3}{n-2} = h(n),$$

f et h étant les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-2} \quad ; \quad h(x) = \frac{3}{x-2}.$$

Pour cela,

- déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites par le calcul ou par le graphique ;
- comparer les termes de même indice et émettre une conjecture ;
- contrôler cette conjecture en étudiant le signe de $u_n - v_n$.



Définition

u et v sont des suites de même ensemble de définition, n_0 un nombre entier naturel.

Lorsque pour tout nombre entier naturel n supérieur à n_0 , $u_n \geq v_n$,

on dit que : u est *supérieure* à v à partir de l'indice n_0 .

On dit aussi que : v est *inférieure* à u à partir de l'indice n_0 .

■ Exemple

Comparons les suites u et v définies respectivement par : $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{2n+1}$.

Approche numérique

n	1	2	3	4	5	6	7
u_n	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{49}$
v_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{15}$

D'après cette table de valeurs, il semble que :

pour tout n supérieur à 3, $u_n < v_n$.

Contrôlons cette conjecture par le calcul.

Étude algébrique

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$,

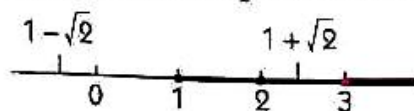
$$\text{On a : } v_n - u_n = \frac{n^2 - 2n - 1}{n^2(2n+1)}$$

donc : $(v_n - u_n)$ est toujours du signe de $n^2 - 2n - 1$

$$\text{donc de } (n - 1 + \sqrt{2})(n - 1 - \sqrt{2})$$

d'où : pour tout n supérieur à 3, $v_n - u_n > 0$

v est donc supérieure à u à partir de l'indice 3.



■ Suites majorées, minorées, bornées

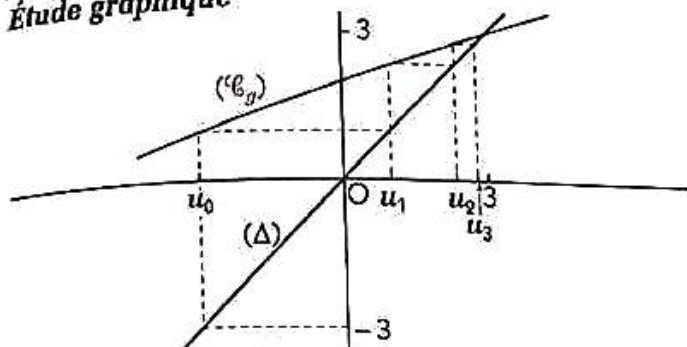
■ Exemple introductif

La suite u est définie par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = g(u_n) \end{cases}$

g étant la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

Démontrons que : pour tout nombre entier naturel n , $-3 \leq u_n < 3$.

Étude graphique



Ce graphique permet de conjecturer que :
la suite u est croissante et $u_0 \leq u_n \leq 3$.
Contrôlons cette conjecture par le calcul.

Étude algébrique

- Démontrons par récurrence que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $-3 \leq u_n < 3$.
- On a : $-3 \leq u_0 < 3$ (car $u_0 = -3$)
- Supposons que :
pour un nombre entier naturel k , $-3 \leq u_k < 3$
donc : $1 \leq \frac{1}{3} u_k + 2 < 3$
d'où : $1 \leq u_{k+1} < 3$; $-3 \leq u_{k+1} < 3$
- Conclusion :
pour tout nombre entier naturel n , $-3 \leq u_n < 3$.
- On dit que : la suite u est **minorée** par -3 et **majorée** par 3 ; c'est une suite **bornée**.

Définition

On dit qu'une suite numérique u définie sur une partie E de $\mathbb{N}$ est :

- **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que :
pour tout n élément de E , $u_n \geq m$.
- **positive** si elle est minorée par 0 .
- **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que :
pour tout n élément de E , $u_n \leq M$.
- **négative** si elle est majorée par 0 .
- **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple 1

w est la suite définie par : $w_n = \frac{n^2 - 10n + 21}{n^2 - 6n + 11}$.

Démontrons que w est minorée par -1 et majorée par 2 .

Désignons par f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 6x + 11}$$

L'étude des variations de f donne le tableau ci-contre.

On déduit de ce tableau de variation que :

f est minorée par -1 et majorée par 2 .

La suite w est donc minorée par -1 et majorée par 2 .

x	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0
$f(x)$	$\frac{21}{11}$	$\nearrow 2$	$\searrow -1$	$\nearrow 1$

Exemple 2

t est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $t_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2+n^2} + \dots + \frac{1}{n+n^2}$.

Démontrons que la suite t est bornée.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; t_n est égal à la somme des n termes : $\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{2+n^2}, \dots, \frac{1}{n+n^2}$.

Chaque terme de cette somme est inférieur ou égal à $\frac{1}{1+n^2}$ et supérieur ou égal à $\frac{1}{n+n^2}$;

$$\text{donc : } \frac{n}{n+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2+n^2} + \dots + \frac{1}{n+n^2} \leq \frac{n}{1+n^2}$$

$$\text{or : } \frac{n}{n+n^2} = \frac{1}{1+n} \geq \frac{1}{2} ; \frac{n}{1+n^2} \leq 1$$

d'où : $0,5 \leq t_n \leq 1$. La suite t est majorée par 1 et minorée par $\frac{1}{2}$, elle est donc bornée.

Exercices

1.c Démontrer que les suites suivantes sont bornées.

$$(1) u_n = \frac{2n-3}{5n-2} \quad (2) u_n = \ln(n+1) - \ln n$$

$$(3) u_n = \sqrt{n^2+2} - n \quad (4) u_n = \frac{2n+\cos n}{n^2}$$

1.d On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$$

Démontrer par récurrence que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n < 3$.

Étudier le sens de variation de la suite u .

2.1. Notion de convergence d'une suite numérique

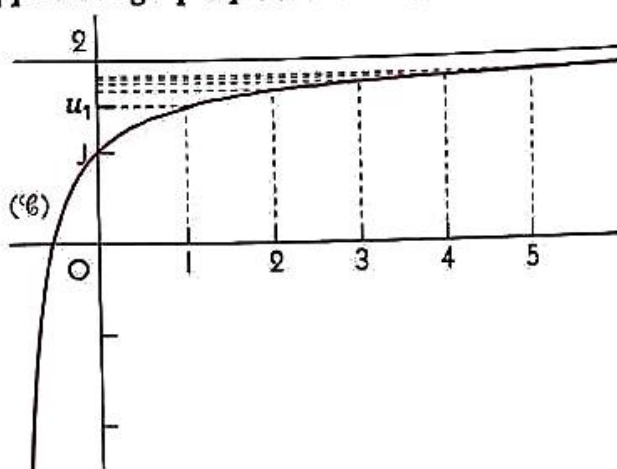
Approche de la notion de convergence

Exemples introductifs

Étudions, pour les grandes valeurs de n , le comportement de la suite u définie par :

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

Approches graphique et numérique



• Compléter la table de valeurs approchées suivante :

n	10	10^2	10^3	2×10^3	5×10^3	10^4	10^5
u_n							

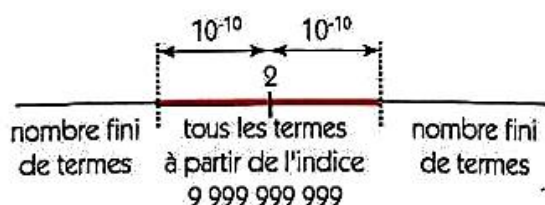
Les termes de la suite deviennent de plus en plus proches de 2, lorsque n devient de plus en plus grand.

Étude de la distance $|u_n - 2|$

– On a : $|u_n - 2| = \frac{1}{n+1}$

– On démontre que :

à partir de l'indice 9 999 999 999, $|u_n - 2| < 10^{-10}$.



Conclusion

La distance entre u_n et 2 devient aussi petite que l'on veut à partir d'un certain indice.

On dit que la suite u converge vers 2.

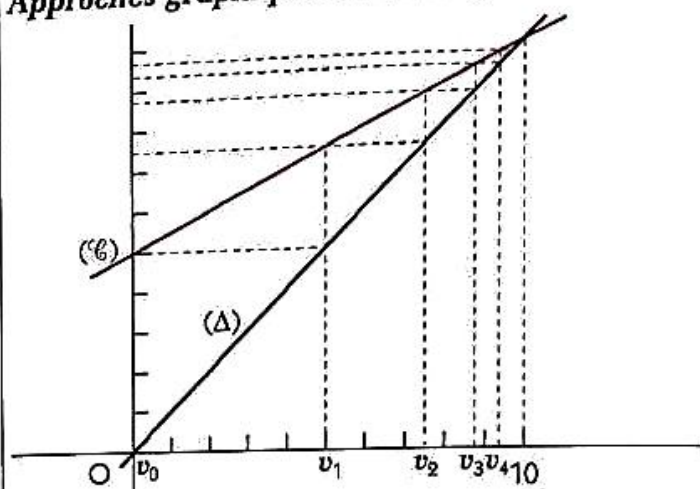
On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

ou plus simplement : $\lim u_n = 2$.

Étudions, pour les grandes valeurs de n , le comportement de la suite v définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 5 \end{cases}$$

Approches graphique et numérique



• Compléter la table de valeurs approchées suivante :

n	5	8	10	11	12	13	14	15
v_n								

Les termes de la suite deviennent de plus en plus proches de 10, lorsque n devient de plus en plus grand.

Étude de la distance $|v_n - 10|$

– On multiplie membre à membre les égalités suivantes,

$$v_1 - 10 = 0,5 (v_0 - 10)$$

$$v_2 - 10 = 0,5 (v_1 - 10)$$

...

$$v_n - 10 = 0,5 (v_{n-1} - 10)$$

On obtient l'égalité suivante :

$$v_n - 10 = (0,5)^n \times (v_0 - 10)$$

donc : $|v_n - 10| = \frac{10}{2^n}$

– On démontre que :

à partir de l'indice 37, $|v_n - 10| < 10^{-10}$.

Conclusion

La distance entre v_n et 10 devient aussi petite que l'on veut à partir d'un certain indice.

La suite v converge vers 10.

On écrit : $\lim v_n = 10$.

Suites divergentes

Exemples introductifs

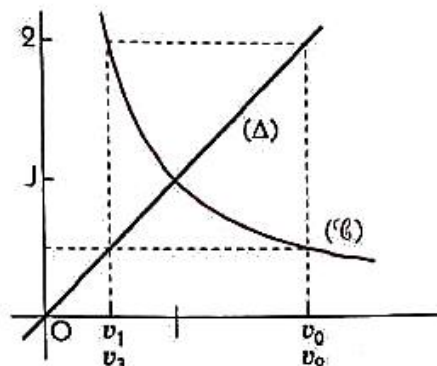
Étudions, pour les grandes valeurs de n , le comportement de la suite v définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{v_n} \end{cases}$

Approche graphique

Les termes d'indices pairs sont égaux à 2 et les termes d'indices impairs sont égaux à $\frac{1}{2}$.

La suite v n'a donc pas de limite.

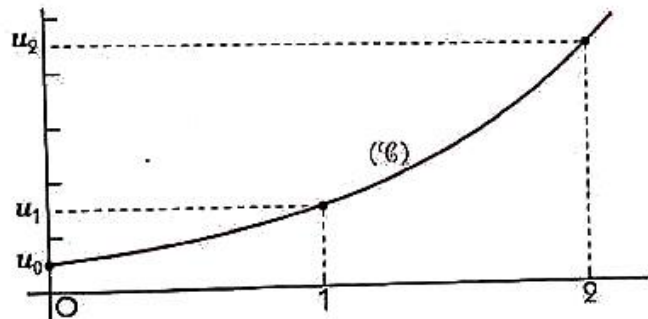
La suite v n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.



Exemple

Étudions, pour les grandes valeurs de n , le comportement de la suite u définie par : $u_n = 5 \times 3^n$.

Approche graphique



Ces approches montrent que les termes de la suite u deviennent très grands lorsque n devient de plus en plus grand. Contrôlons ce résultat par le calcul.

Étude algébrique

Déterminons n pour que u_n soit supérieur à 10^{20} .

$$\text{On a : } 5 \times 3^n > 10^{20} \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{10^{20}}{5}}{\ln 3}$$

$$\text{donc : } n > 42 \Rightarrow u_n > 10^{20}$$

$$\text{On démontre de même que : } n > 105 \Rightarrow u_n > 10^{50}.$$

Approche numérique

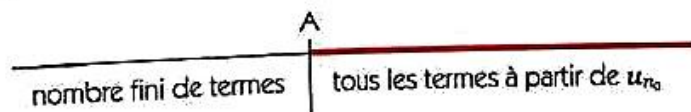
n	10	30	50	60
u_n	295245	$1,3 \times 10^{15}$	$3,59 \times 10^{24}$	$2,12 \times 10^{29}$

Conclusion

Pour tout nombre réel strictement positif A , aussi grand que l'on veut, il existe un indice n_0 tel que :

$$n > n_0 \Rightarrow u_n > A.$$

La suite numérique n'est pas convergente, elle est donc divergente.



On dit aussi que la suite u diverge vers $+\infty$ et on écrit : $\lim u_n = +\infty$.

Lorsqu'une suite u est telle que $-u$ diverge vers $+\infty$, on dit que u diverge vers $-\infty$ et on écrit :

$$\lim u_n = -\infty.$$

2.2. Limite d'une suite numérique

■ Limite d'une suite définie par une formule explicite

Propriété

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, u la suite définie par la formule explicite $u_n = f(n)$.
Si f admet une limite en $+\infty$ alors u admet la même limite.

■ Exemple

Étudions la limite de chacune des suites u, v, w, t définies respectivement par :

$$u_n = \frac{1-2n}{n+1} ; \quad v_n = \frac{\ln(1+n)}{n^2} ; \quad w_n = \frac{2n^2+n-3}{5n+4} ; \quad t_n = \exp\left(\frac{-2n+3}{n-1}\right).$$

$$y_n = \ln\left(\frac{n^2-n+1}{n^3}\right) ; \quad z_n = \sqrt{\frac{5n^2-4n-5}{3n^2+2}}.$$

Étude de la limite de u

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1-2x}{x+1}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

or : $u_n = f(n)$

donc : $\lim u_n = -2$

La suite u converge vers -2 .

Étude de la limite de v

On considère la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } g(x) &= \frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{x^2} \\ &= \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

or : $v_n = g(n)$

donc : $\lim v_n = 0$

La suite v converge vers 0.

Étude de la limite de y

On considère la fonction $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^3}\right)$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x^3}\right) = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^3}\right) = -\infty$

or : $y_n = p(n)$

donc : $\lim y_n = -\infty$

La suite y diverge vers $-\infty$.

Remarque

Lorsque la fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien conclure sur la convergence de la suite u définie par : $u_n = f(n)$.

Étude de la limite de w

On considère la fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x^2+x-3}{5x+4}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

or : $w_n = h(n)$

donc : $\lim w_n = +\infty$

La suite w diverge vers $+\infty$.

Étude de la limite de t

On considère la fonction $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \exp\left(\frac{-2x+3}{x-1}\right)$$

k est la composée de $x \mapsto \frac{-2x+3}{x-1}$ suivi de $\exp$.

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+3}{x-1} = -2 \\ \lim_{X \rightarrow -2} e^X = e^{-2} \end{cases}$$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = e^{-2}$

or : $t_n = k(n)$

donc : $\lim t_n = e^{-2}$

La suite t converge vers e^{-2} .

Étude de la limite de z

On considère la fonction $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{5x^2-4x-5}{3x^2+2}}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5x^2-4x-5}{3x^2+2}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

or : $z_n = q(n)$

donc : $\lim z_n = \sqrt{\frac{5}{3}}$

La suite z converge vers $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Propriétés fondamentales

Une suite numérique étant une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, on démontre et nous admettons que les propriétés permettant l'étude des limites des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ restent valables pour les suites numériques.

Tableau récapitulatif

Limite et opérations

Les propriétés sur la limite d'une somme, la limite d'un produit, la limite d'un quotient de suites sont les mêmes que celles sur les limites de fonctions en $+\infty$.

Les indéterminations sont étudiées cas par cas.

Passage à la limite dans une inégalité

u et v sont des suites numériques convergentes,

si à partir d'un certain indice, $u_n \leq v_n$ alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Cette propriété ne permet pas de calculer des limites, donc de reconnaître des suites convergentes, mais de comparer leurs limites.

Calcul de limites par comparaison

l est un nombre réel ; u, v, w sont des suites numériques

Si à partir d'un certain indice,

$$u_n \geq v_n \text{ et } \lim v_n = +\infty$$

alors $\lim u_n = +\infty$

Si à partir d'un certain indice,

$$u_n \leq v_n \text{ et } \lim v_n = -\infty$$

alors $\lim u_n = -\infty$

Si à partir d'un certain indice,

$$v_n \leq u_n \leq w_n \text{ et}$$

$$\lim v_n = \lim w_n = l$$

alors $\lim u_n = l$

Exemples

Étudions la convergence de la suite u définie par :

$$u_n = n^2 + \sin 2n.$$

Soit n un nombre entier naturel.

On a : $-1 \leq \sin 2n$

$$n^2 - 1 \leq n^2 + \sin 2n$$

donc : $n^2 - 1 \leq u_n$

or : $\lim(n^2 - 1) = +\infty$

d'où : $\lim u_n = +\infty$

La suite u diverge vers $+\infty$.

Étudions la convergence de la suite v définie par :

$$v_n = \cos^2 n - n \ln n.$$

Soit n un nombre entier naturel.

On a : $\cos^2 n \leq 1$

$$\cos^2 n - n \ln n \leq 1 - n \ln n$$

donc : $v_n \leq 1 - n \ln n$

or : $\lim(1 - n \ln n) = -\infty$

d'où : $\lim v_n = -\infty$

La suite v diverge vers $-\infty$.

Étudions la convergence de la suite w définie par :

$$w_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2}.$$

Soit n un nombre entier naturel.

$$\text{On a : } \frac{n^2 - 1}{n^2} \leq \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2} \leq \frac{n^2 + 1}{n^2}$$

or : $\lim \frac{n^2 - 1}{n^2} = 1$ et $\lim \frac{n^2 + 1}{n^2} = 1$

d'où : $\lim w_n = 1$

La suite w converge vers 1.

u étant une suite à termes positifs convergeant vers 0, calculons la limite de chacune des suites v et w définies par :

$$v_n = \frac{1 - 3u_n}{u_n + 2} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{2}{u_n}.$$

On a : $\lim u_n = 0$ et $u_n > 0$

d'où : $\lim v_n = \frac{1}{2}$

$\lim w_n = +\infty$.

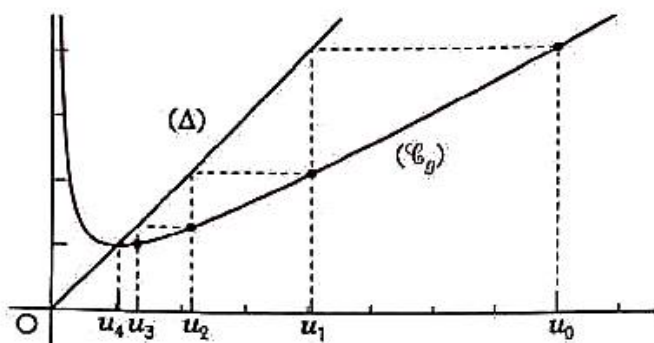
Convergence d'une suite monotone

Exemple introductif

u est la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2u_n} \end{cases}$$

On veut étudier le sens de variation et la convergence de la suite u .

Par le graphique, il semble que u est décroissante et minorée par 1 ; contrôlons cette conjecture.



Démontrons par récurrence que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 1$

– On a : $u_0 \geq 1$, (car $u_0 = 8$)

– Supposons que pour un élément k de $\mathbb{N}$, $u_k \geq 1$,

$$\text{donc : } u_{k+1} - 1 = \frac{1 + u_k^2 - 2u_k}{2u_k} = \frac{(u_k - 1)^2}{2u_k} \geq 0$$

d'où : $u_{k+1} \geq 1$

– Par conséquent, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

La suite u est donc minorée par 1.

Étudions le sens de variation de u

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{2u_n} = (1 - u_n) \times \frac{1 + u_n}{2u_n} \leq 0.$$

La suite u est donc décroissante.

La suite u est décroissante et minorée ; est-elle convergente ?

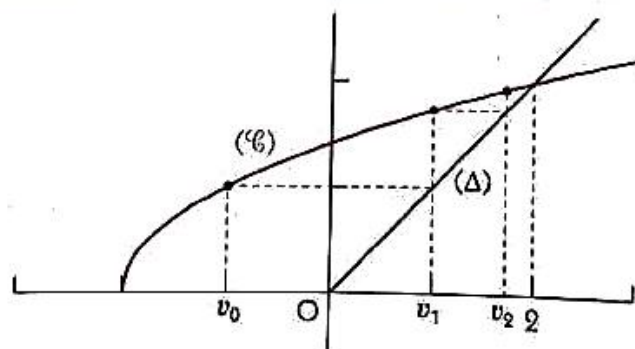
On démontre et nous admettons les propriétés suivantes :

Propriétés

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Exemples

Étudions le sens de variation et la convergence de la suite v définie par :
$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$$



Démontrons par récurrence que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $0 < v_n \leq 2$

– On a : $0 < v_1 \leq 2$

– Supposons que :

pour un élément p de $\mathbb{N}^*$, $0 < v_p \leq 2$.

d'où : $2 < 2 + v_p \leq 4$

$$0 < \sqrt{2} < \sqrt{2 + v_p} \leq 2$$

donc : $0 < v_{p+1} \leq 2$.

– Par conséquent,

pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $0 < v_n \leq 2$.

Démontrons par récurrence que v est croissante

– On a : $v_1 - v_0 > 0$

– Supposons que :

pour un élément p de $\mathbb{N}$, $v_{p+1} - v_p > 0$

$$\text{donc : } v_{p+2} - v_{p+1} = \sqrt{2 + v_{p+1}} - \sqrt{2 + v_p}$$

$$= \frac{v_{p+1} - v_p}{\sqrt{2 + v_{p+1}} + \sqrt{2 + v_p}} > 0$$

– Par conséquent,

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} > v_n$.

la suite v est donc croissante

Conclusion

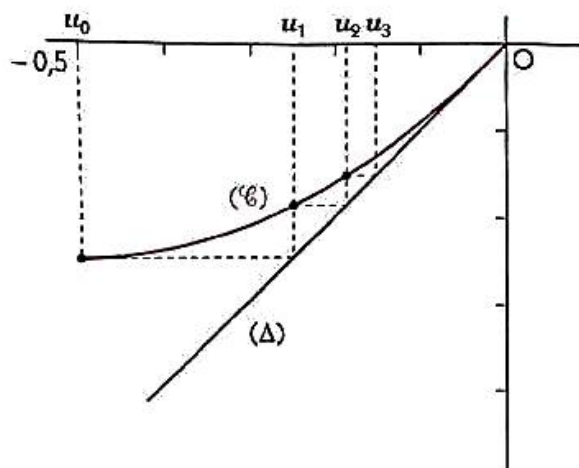
v étant croissante et majorée, elle est donc convergente.

Étudions le sens de variation et la convergence des suites u et w , définies respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = -0,5 \\ u_{n+1} = u_n(1 + u_n) \end{cases} ; \quad \begin{cases} w_0 = 12 \\ w_{n+1} = 0,25w_n + 3. \end{cases}$$

L'étude graphique de ces suites permet d'émettre des conjectures qui seront contrôlées par le calcul.

Étude de la suite u



Démontrons par récurrence que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $-0,5 < u_n \leq 0$

– On a : $-0,5 < u_0 \leq 0$

– Supposons que :

pour un élément p de $\mathbb{N}$, $-0,5 < u_p \leq 0$

$$\text{On a : } \begin{array}{l} 0,5 < 1 + u_p \leq 1 \\ 0 < -u_p \leq 0,5 \end{array}$$

$$\text{donc : } 0 \leq -u_p(1 + u_p) \leq 0,5$$

$$\text{d'où : } \begin{array}{l} -0,5 \leq u_p(1 + u_p) \leq 0 \\ -0,5 \leq u_{p+1} \leq 0 \end{array}$$

– Par conséquent,
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $-0,5 \leq u_n \leq 0$.

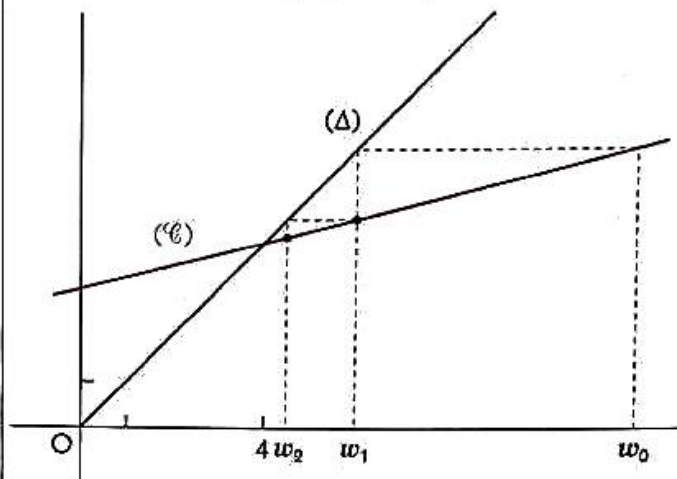
Sens de variation de u

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$,
la suite u est donc croissante.

Conclusion

La suite u étant croissante et majorée, elle est donc convergente.

Étude de la suite w



Démontrons par récurrence que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $w_n \geq 4$

– On a : $w_1 \geq 4$

– Supposons que :

pour un élément p de $\mathbb{N}$, $w_p \geq 4$

$$\text{donc : } w_{p+1} \geq 4 \quad (\text{car } w_{p+1} = \frac{1}{4}w_p + 3)$$

– Par conséquent,
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $w_n \geq 4$.

Sens de variation de w

$$\begin{aligned} \text{pour tout } n \text{ élément de } \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n &= \frac{3}{4}(4 - w_n) \\ w_{n+1} - w_n &\leq 0, \end{aligned}$$

la suite w est donc décroissante.

Conclusion

La suite w étant décroissante et minorée, elle est donc convergente.

Étudions le sens de variation et la convergence de la suite t définie par : $\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = 2t_n + n. \end{cases}$

Démontrons par récurrence que :
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $t_n \geq 0$

– On a : $t_0 \geq 0$ (car $t_0 = 1$)

– Supposons que :

pour un élément k de $\mathbb{N}$, $t_k \geq 0$

$$\text{On a : } t_{k+1} = 2t_k + k > 0$$

– Par conséquent,
pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $t_n \geq 0$.

Démontrons que la suite t est croissante

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \text{ élément de } \mathbb{N}, t_{n+1} - t_n &\geq 0 \\ (\text{car } t_{n+1} - t_n &= t_n + n) \end{aligned}$$

La suite t est donc croissante.

Démontrons que t n'est pas majorée

Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $t_{n+1} \geq n$;
donc la suite t n'est pas majorée.

Conclusion

La suite t étant croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Convergence d'une suite définie par une formule de récurrence

■ Limite de la composée d'une suite suivie d'une fonction

Nous admettons que la propriété donnant la limite de la composée de deux fonctions reste valable pour la composée d'une suite suivie d'une fonction. On obtient alors l'énoncé ci-dessous :

Propriété

a et l sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$,

g est une fonction définie sur un intervalle K , u une suite à valeurs dans K

$$\text{Si } \begin{cases} \lim u_n = a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim f(u_n) = l.$$

■ Limite d'une suite définie par une formule de récurrence

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

g est une fonction continue sur un intervalle K ,

u une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence : $u_{n+1} = g(u_n)$.

Si u est convergente alors sa limite est une solution α de l'équation $g(x) = x$.

On dit que α est un point fixe de la fonction g .

– Cette propriété ne permet pas de démontrer qu'une suite est convergente, mais de calculer la limite d'une suite sachant qu'elle est convergente (voir TP p. 186).

– Cette propriété est une implication ; sa contraposée donne la remarque suivante :

Remarque

g est une fonction continue sur un intervalle K ,

u une suite à valeurs dans K définie par la formule de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$;

si l'équation $g(x) = x$ n'admet pas de solution dans K , alors la suite u est divergente.

Exemple

Étudions la convergence de la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$.

Ce graphique permet de conjecturer que u diverge.

Contrôlons cette conjecture par la remarque précédente.

Considérons la fonction $g : x \mapsto x + \frac{1}{x}$

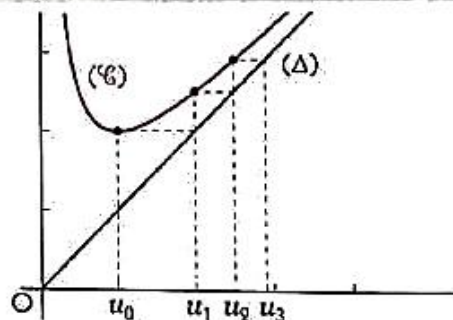
on a : $u_{n+1} = g(u_n)$.

Réolvons l'équation : $g(x) = x$

c'est-à-dire : $\frac{1}{x} = 0$

Cette équation n'admet pas de solution.

La suite u est donc divergente.



Exercices

2.a On sait que les suites u, v, w définies ci-dessous sont convergentes. Calculer leurs limites.

$$(u) \begin{cases} u_0 = -0,5 \\ u_{n+1} = u_n(1 + u_n) \end{cases}$$

$$(w) \begin{cases} w_0 = 12 \\ w_{n+1} = 0,25(1 + w_n) \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$$

2.b On sait que la suite u définie ci-dessous est divergente.

$$(u) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

Démontrer que la suite u est strictement croissante.

Par un raisonnement par l'absurde, en déduire qu'elle diverge vers $+\infty$.

3

Suites arithmétiques, géométriques

3.1. Suites arithmétiques

Tableau récapitulatif

① Définition

Une suite est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r appelé **raison** tel que :
pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Détermination

Une suite arithmétique est entièrement déterminée par la donnée d'un terme et de sa raison.

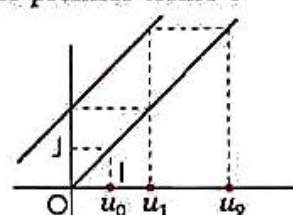
Formule explicite

La suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p est définie par :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Représentation graphique

Suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 0

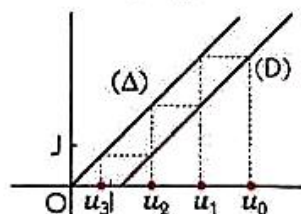


② Sens de variation

u est une suite arithmétique de raison r . On sait que :
Pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_{n+1} - u_n = r$.
Par conséquent,

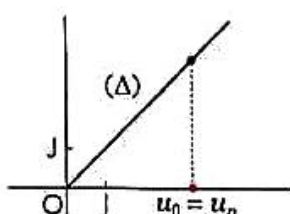
si $r < 0$

alors u est strictement décroissante



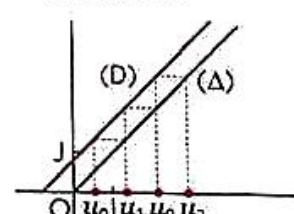
si $r = 0$

alors u est constante



si $r > 0$

alors u est strictement croissante



③ Somme de termes consécutifs

u est une suite arithmétique,

– pour tout nombre entier naturel n , $u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}$;

– somme de n termes consécutifs égale à $n \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

$$u_k + u_{k+1} + \dots + u_{k+p} = p \frac{u_k + u_{k+p-1}}{2}$$

premier terme de la somme →
← dernier terme de la somme

nombre de termes de la somme →

④ Convergence

u est la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . On sait que :

pour tous nombres entiers naturels n et p tels que $p < n$, $u_n = u_p + (n - p)r$.

Par conséquent,

si $r < 0$

alors u diverge vers $-\infty$

si $r = 0$

alors u converge vers u_0

si $r > 0$

alors u diverge vers $+\infty$

Exemples

■ Calcul de termes et des éléments caractéristiques

Calculons les cinq premiers termes de la suite arithmétique u de raison 3 et telle que $u_5 = 10$.

On a : $u_5 = u_4 + 3$;
 d'où : $u_4 = u_5 - 3 = 7$.
 De même :
 $u_3 = u_4 - 3 = 4$
 $u_2 = u_3 - 3 = 1$
 $u_1 = u_2 - 3 = -2$
 $u_0 = u_1 - 3 = -5$.

Donnons l'expression des n premiers termes puis déterminons la formule explicite de la suite u de premier terme $\ln 2$ et de raison 3.

Soit n un nombre entier naturel.
 On a : $u_1 = \ln 2 + 3$
 $u_2 = u_1 + 3$
 $\vdots$
 $u_n = u_{n-1} + 3$
 d'où : $u_n = \ln 2 + 3n$
 (en additionnant membre à membre.)

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de la suite v définie par :

$$v_n = -\frac{n}{2} - 1,5.$$

$v_0 = -1,5$
 Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a :
 $v_{n+1} - v_n = -\frac{n+1}{2} - 1,5 - (-\frac{n}{2} - 1,5)$
 $= -0,5$
 donc : v est la suite arithmétique de premier terme $-1,5$ et de raison $-0,5$.

■ Calcul de la somme de termes consécutifs et son utilisation

Exemple 1

u est une suite arithmétique de raison r . On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ [$n \in \mathbb{N}^*$].

Sachant que :
 $u_0 = 2$; $r = 6$,
 calculons u_{29} et S_{30} .

$$u_{29} = u_0 + 29r = 176$$

$$S_{30} = 30 \times \frac{u_0 + u_{29}}{2} = 2670$$

Sachant que :
 $u_{19} = 2$; $r = -25$,
 calculons u_0 et S_{20} .

$$u_{19} = u_0 + 19r$$

$$u_0 = u_{19} - 19r = 477$$

$$S_{20} = 20 \times \frac{u_0 + u_{19}}{2} = 4790$$

Sachant que :
 $u_0 = 7$; $u_{94} = -181$,
 calculons r et S_{95} .

$$u_{94} = u_0 + 94r$$

$$r = \frac{u_{94} - u_0}{94} = -2$$

$$S_{95} = 95 \times \frac{u_0 + u_{94}}{2} = -8265$$

Exemple 2

u est une suite arithmétique de raison r . On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ [$n \in \mathbb{N}^*$].

Sachant que
 $S_{10} = 10\sqrt{2} + 45\sqrt{3}$; $r = \sqrt{3}$,
 calculons u_0 et u_9 .

On a :
 $S_{10} = 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2}$

$$u_9 = u_0 + 9\sqrt{3}$$

$$S_{10} = 10 \times \frac{2u_0 + 9\sqrt{3}}{2}$$

donc :
 $u_0 = \frac{S_{10} - 45\sqrt{3}}{10} = \sqrt{2}$

$$u_9 = u_0 + 9r = \sqrt{2} + 9\sqrt{3}$$

Sachant que
 $u_{27} = 9,5$; $S_{28} = 140$,
 calculons u_0 et r .

On a :
 $S_{28} = 28 \times \frac{u_0 + u_{27}}{2}$

donc :
 $u_0 = \frac{2S_{28}}{28} - u_{27} = 0,5$

On a :
 $u_{27} = u_0 + 27r$

donc :
 $r = \frac{u_{27} - u_0}{27} = \frac{1}{3}$

Sachant que :
 $u_0 = -3$; $u_{n-1} = 69$ et $S_n = 330$,
 calculons n et r .

On a :
 $S_n = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$

donc :
 $n = \frac{2S_n}{u_0 + u_{n-1}} = 10$

On a :
 $u_{n-1} = u_0 + (n-1)r$

donc :
 $r = \frac{u_{n-1} - u_0}{n-1} = 8$

Exemple 3

Calculons la somme des multiples de 11 compris entre 1420 et 1600.

Les nombres entiers naturels multiples de 11 sont les termes d'une suite arithmétique de raison 11 ;
On a : $129 \times 11 < 1420 < 130 \times 11$ et $145 \times 11 < 1600 < 146 \times 11$;
les multiples de 11 compris entre 1420 et 1600 sont donc : 130×11 ; 131×11 ; ... ; 144×11 ; 145×11 .

Désignons par S leur somme.

premier terme de la somme : $130 \times 11 = 1430$
dernier terme de la somme : $145 \times 11 = 1595$
nombre de termes de la somme : $145 - 129 = 16$

Par conséquent :
$$S = 16 \times \frac{1430 + 1595}{2} = 24\,200.$$

■ Étude d'une suite définie par une formule de récurrence homographique

Soit u la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$$

Calculons u_1 , u_2 , u_3 et u_4 . Prouvons que, pour tout entier naturel n , $u_n > -1$.

Démontrons que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$ est une suite arithmétique.

Exprimons v_n puis u_n en fonction de n et étudions la convergence de la suite u .

Calcul des premiers termes de u

$$u_1 = 0 ; u_2 = -\frac{1}{3} ; u_3 = -\frac{1}{2} ; u_4 = -\frac{3}{5}.$$

Démontrons par récurrence que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n > -1$.

– On a : $u_0 > -1$ (car $u_0 = 1$)

– Supposons que :

pour un nombre entier naturel k , $u_k > -1$;

on a : $u_{k+1} = 1 - \frac{4}{u_k + 3}$ et $u_k > -1$

$$\begin{aligned} \text{donc : } u_k + 3 &> 2 \\ \frac{1}{u_k + 3} &< \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{4}{u_k + 3} &> -1 \\ u_{k+1} &> -1 \end{aligned}$$

– Conclusion :

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n > -1$.

Démontrons que v est une suite arithmétique

Soit n un élément de $\mathbb{N}$;

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{u_n + 3}{u_n + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{2} + v_n ; \end{aligned}$$

donc v est une suite arithmétique de raison 0,5 et de premier terme 0,5 ;

$$\begin{aligned} \text{d'où : } v_n &= \frac{1}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2} \\ u_n &= \frac{1}{v_n} - 1 = \frac{1-n}{1+n} . \end{aligned}$$

Convergence de la suite u

Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1-n}{1+n}$;
on en déduit que : $\lim u_n = -1$.

Exercices

3.a On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 2} \end{cases}$$

Démontrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par

$v_n = \frac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique.

Préciser sa raison et son premier terme.

Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Calculer $v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n .

Étudier la convergence de u .

3.b

Dans chacun des cas suivants, (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

Exprimer le terme général u_n en fonction de u_0 et de r .

(1) $u_0 = 40$; $r = -6$

(2) $u_0 = -2$; $r = 1$

(3) $u_0 = 4$; $r = 3$

(4) $u_0 = -5$; $r = -3$

3.2. Suites géométriques

Tableau récapitulatif

① Définition

Une suite est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel q appelé **raison** tel que :
pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

Détermination

Une suite géométrique est entièrement déterminée par la donnée d'un terme et de sa raison.

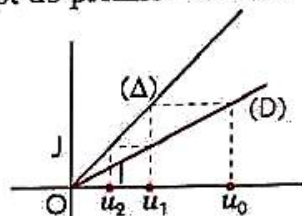
Formule explicite

La suite géométrique de raison q et de premier terme v_p est définie par :

$$v_n = q^{n-p} v_p$$

Représentation graphique

Suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 4



② Sens de variation

v est la suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q [$q \neq 0$; $q \neq 1$; $v_0 \neq 0$].

On sait que :

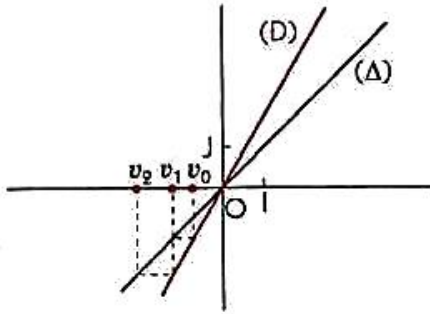
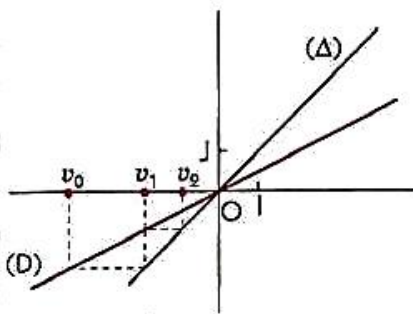
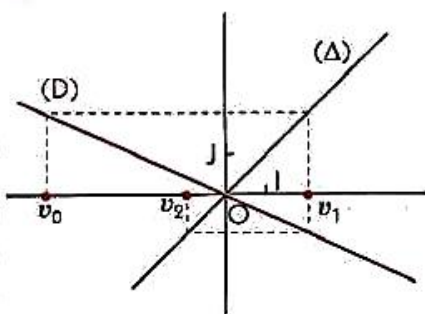
pour tout nombre entier naturel n , $v_{n+1} = qv_n$ et $v_n = q^n v_0$ et $v_{n+1} - v_n = q^n(q - 1)v_0$.

Par conséquent,

si $v_0 < 0$ et $q < 0$
alors v n'est pas monotone

si $v_0 < 0$ et $0 < q < 1$
alors v est strictement croissante

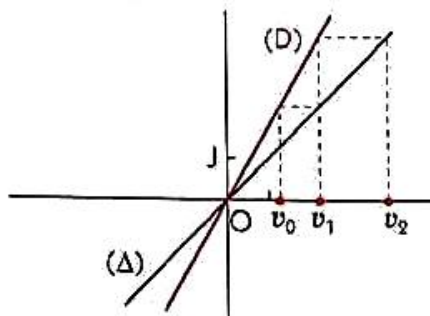
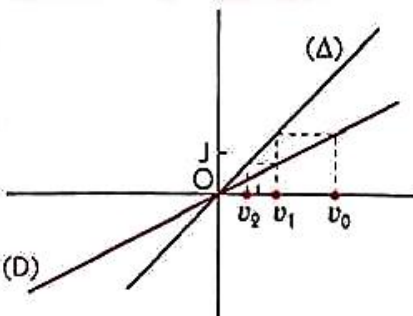
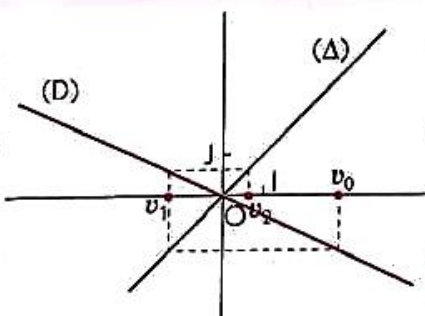
si $v_0 < 0$ et $q > 1$
alors v est strictement décroissante



si $v_0 > 0$ et $q < 0$
alors v n'est pas monotone

si $v_0 > 0$ et $0 < q < 1$
alors v est strictement décroissante

si $v_0 > 0$ et $q > 1$
alors v est strictement croissante



③ Somme de termes consécutifs

v est une suite géométrique de raison q [$q \neq 1$],

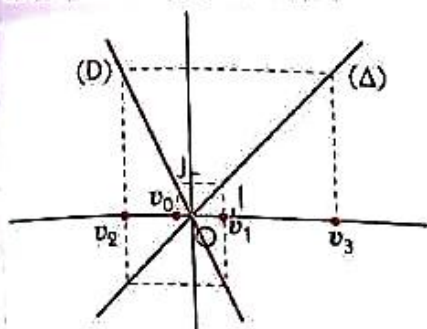
– pour tout nombre entier naturel n , $v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} v_1$;

– somme de n termes consécutifs égale à $\frac{q^{\text{nombre de termes}} - 1}{q - 1} \times \text{premier terme}$.

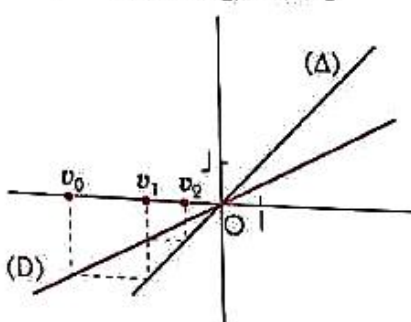
④ Convergence

v est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q [$q \neq 0$; $q \neq 1$; $v_0 \neq 0$].
On sait que : pour tout nombre entier naturel n , $v_n = q^n v_0$.
Par conséquent,

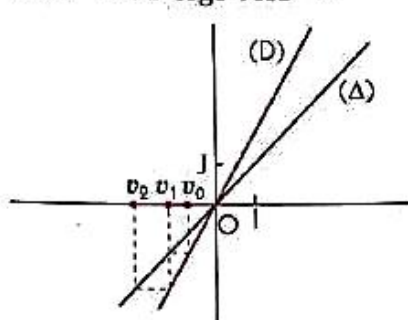
si $v_0 < 0$ et $q < -1$
alors v n'a pas de limite



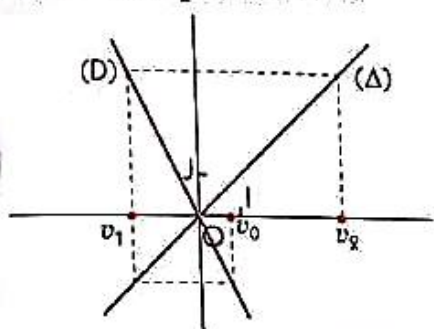
si $v_0 < 0$ et $-1 < q < 1$
alors v converge vers 0



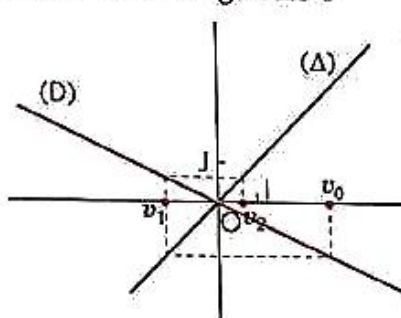
si $v_0 < 0$ et $q > 1$
alors v diverge vers $-\infty$



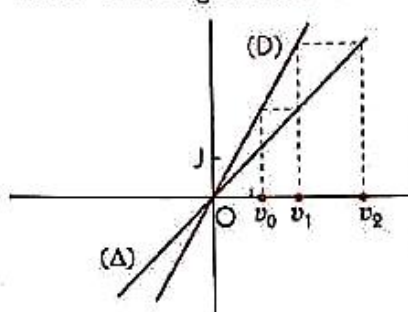
si $v_0 > 0$ et $q < -1$
alors v n'a pas de limite



si $v_0 > 0$ et $-1 < q < 1$
alors v converge vers 0



si $v_0 > 0$ et $q > 1$
alors v diverge vers $+\infty$



Exemples

■ Exemple 1

Calculons le premier terme de la suite géométrique v de raison -3 et telle que $v_4 = 81$.

$$v_3 = \frac{v_4}{-3} = -27$$

$$v_2 = \frac{v_3}{-3} = 9$$

$$v_1 = \frac{v_2}{-3} = -3$$

$$v_0 = \frac{v_1}{-3} = 1$$

Donnons l'expression des n premiers termes et déterminons la formule explicite de la suite géométrique de raison $\ln 2$ et de premier terme 1.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$$\text{On a : } v_1 = v_0 \ln 2$$

$$v_2 = v_1 \ln 2$$

$$\vdots$$

$$v_n = v_{n-1} \ln 2$$

d'où : $v_n = v_0 (\ln 2)^n = (\ln 2)^n$
(en multipliant membre à membre.)

Déterminons la nature de la suite v définie par :

$$v_n = \frac{3^{n-1}}{2^n}$$

$$v_0 = \frac{1}{3}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$; on a :

$$v_{n+1} = \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{3^{n-1}}{2^n}$$

$$v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n$$

donc : v est la suite géométrique de premier terme $\frac{1}{3}$ et de raison 1,5.

■ Exemple 2

v est une suite géométrique de raison q . On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ [$n \in \mathbb{N}^*$].

Sachant que :

$v_0 = 2$; $q = 5$,
calculons v_3 et S_4 .

$$v_3 = v_0 q^3 = 250$$

$$S_4 = v_0 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 312.$$

Sachant que :

$v_0 = 343$; $v_3 = 1$,
calculons q et S_4 .

$$v_{n-1} = v_0 q^{n-1}$$

$$q = \frac{1}{7}$$

$$S_4 = v_0 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 400.$$

Sachant que :

$v_9 = \frac{1}{625}$; $q = \frac{1}{5}$,
calculons v_0 et S_9 .

$$v_{n-1} = v_0 q^{n-1}$$

$$v_0 = \frac{v_9}{q^9} = 5^5$$

$$S_n = v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{488281}{625}.$$

■ Exemple 3

v est une suite géométrique de raison q . On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ [$n \in \mathbb{N}^*$].

Sachant que :

$q = \frac{1}{3}$; $n = 10$ et $S_n = \frac{59048}{19683}$
calculons v_0 et v_{n-1} .

$$S_n = v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1};$$

$$v_0 = S_n \frac{q - 1}{q^n - 1} = 2.$$

$$v_{n-1} = v_0 q^{n-1} = \frac{2}{19683}.$$

Sachant que :

$q = 2$; $v_0 = 7$ et $S_n = 1785$
calculons n et v_{n-1} .

$$S_n = v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1};$$

$$q^n = \frac{S_n(q - 1)}{v_0} + 1 = 256.$$

$$\text{Or : } 256 = 2^8 = q^8;$$

$$\text{donc : } n = 8.$$

$$v_{n-1} = v_0 q^{n-1} = 896.$$

Sachant que :

$q = \frac{1}{3}$; $S_n = 3267$ et $v_{n-1} = 27$
calculons n et v_0 .

$$S_n = v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1};$$

$$v_{n-1} = v_0 q^{n-1};$$

$$\text{donc : } \frac{S_n}{v_{n-1}} = \frac{q^n - 1}{q^{n-1}} \times \frac{1}{q - 1}$$

$$q^{n-1} = \frac{1}{81} \text{ et } n = 5.$$

$$\text{d'où : } v_0 = \frac{v_{n-1}}{q^{n-1}} = 2187.$$

■ Exemple 4 : Étude d'une suite définie par une formule de récurrence affine

On considère la suite numérique u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 1 \end{cases}$

On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

Démontrons que v est une suite géométrique. Exprimons v_n puis u_n en fonction de n .

Étudions la convergence de u .

Démontrons que v est une suite géométrique

$$\text{Soit } n \text{ un élément de } \mathbb{N}; v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \left(\frac{2}{3} u_n + 1\right) - 3 = \frac{2}{3} (u_n - 3) = \frac{2}{3} v_n;$$

donc v est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$;

$$\text{pour tout élément de } \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0 = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ et } u_n = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Convergence de la suite u

v est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$; or : $0 < \frac{2}{3} < 1$; donc $\lim v = 0$; par conséquent $\lim u = 3$.

Exercices

3.c On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases}$$

Démontrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} \text{ est une suite géométrique.}$$

Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Étudier la convergence de u .

3.d Dans chacun des cas suivants, (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q . Exprimer le terme général v_n en fonction de v_0 et de q .

$$(1) \quad v_0 = 3 \quad ; \quad q = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad v_0 = -3 \quad ; \quad q = 5$$

$$(3) \quad v_0 = \frac{2}{3} \quad ; \quad q = -\frac{1}{3}$$

$$(4) \quad v_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad q = -3$$

4

Résolution de problèmes concrets

Les suites constituent un outil puissant qui permet la résolution de problèmes relevant de phénomènes discrets aussi variés que la variation d'une population d'individus, la constitution ou l'amortissement d'un capital...

Pour résoudre de tels problèmes, nous procéderons suivant les étapes ci-dessous :

- ① la modélisation du problème, qui consiste ici à rechercher une suite permettant de décrire la situation ;
- ② la résolution mathématique du problème ;
- ③ l'interprétation des résultats obtenus mathématiquement, d'où la solution du problème posé.

Problèmes divers

Exemple 1

Un jeune planteur décide de créer une cacaoyère dans une vaste forêt. Il décide de mettre en valeur deux hectares la première année et, chacune des années suivantes, un hectare et demi de plus que l'année précédente. Calculons la superficie totale de la plantation au bout de six années.

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation

Désignons par u_n la superficie (en hectare) défrichée la $n^{\text{ième}}$ année.

On a : $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 1,5$.

Les superficies défrichées année après année sont déterminées par la suite arithmétique u de premier terme 2 et de raison 1,5.

Calcul de la superficie totale S défrichée au bout de 6 ans

On a : $S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$; $u_6 = u_1 + 5 \times 1,5$; $u_1 = 2$.

donc : $S = \frac{6 \times [2u_1 + 5 \times 1,5]}{2} = 34,5$.

Le jeune planteur aura mis en valeur 34,5 hectares au bout de six années.

Exemple 2

L'appartenance à une association de mathématiciens est assujettie aux conditions suivantes :

- un droit d'adhésion de 8 000 francs ;
- et une cotisation annuelle de 5 000 francs.

Quelle est la somme totale déboursée par dix membres sachant que le premier a 10 ans d'ancienneté, le deuxième a 9 ans d'ancienneté, le troisième a 8 ans d'ancienneté, et ainsi de suite jusqu'au dernier qui a un an d'ancienneté ?

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation

Posons : $u_0 = 8\,000$;

désignons par u_n la somme déboursée par un membre après n année(s) de présence à l'association ($n \geq 1$).

On a : $u_n = u_0 + 5\,000n$.

La suite arithmétique de premier terme 8 000 et de raison 5 000 permet de calculer la somme déboursée par chacun des dix membres.

Somme totale déboursée par les dix membres

On a : $u_1 = 8\,000 + 5\,000 = 13\,000$; $u_{10} = 13\,000 + 9 \times 5\,000 = 58\,000$.

d'où : $S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = 10 \times \frac{u_1 + u_{10}}{2} = 355\,000$.

Les dix membres ont déboursé la somme de 355 000 francs.

■ Exemple 3

Une balle rebondit en avançant chaque fois d'une longueur égale à la moitié de la précédente. Sachant que le premier bond mesurait 1 m, quelle est la distance parcourue au bout de 10 rebonds ?

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation

Désignons par v_n la longueur du $n^{\text{ème}}$ bond.

On a : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$;

la suite v ainsi définie est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Calcul de la distance S parcourue après 10 rebonds

On a : $S = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} = \frac{(0,5)^{10} - 1}{0,5 - 1} v_1 \approx 1,998$.

Au bout de dix rebonds, la balle aura parcourue environ 2 m.

■■■■■ Démographie

Un pays A a un taux de croissance démographique de 0,4 % par an. Un pays B a un taux de croissance de 3%.

Au 1^{er} janvier 1999, le pays A compte 40 millions d'habitants et le pays B, 30 millions.

1°) Quel sera le nombre d'habitants de chacun des pays A et B au 1^{er} janvier 2009 ?

2°) En quelle année la population doublera dans chacun des pays ?

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation de la population dans le pays A

Posons : $u_0 = 40\,000\,000$ et désignons par u_n la population dans le pays A au 1^{er} janvier 1999 + n ($n \geq 1$).

On a : $u_1 = u_0 + \frac{0,4 u_0}{100} = u_0(1 + \frac{0,4}{100}) = 1,004 u_0$
 $u_{n+1} = 1,004 u_n$

Les nombres réels u_n sont donc les termes de la suite géométrique de raison 1,004 et de premier terme u_0 .

d'où : $u_n = (1,004)^n u_0$.

Population en 2009 dans le pays A

$$u_{10} = (1,004)^{10} \times 40\,000\,000 = 41\,629\,109.$$

Nombre n d'années nécessaires pour que la population de A double

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(1,004)^x \times 40\,000\,000 = 80\,000\,000$$

$$(1,004)^x = 2$$

$$x \ln(1,004) = \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 2}{\ln(1,004)}$$

$$\text{or : } 173 < \frac{\ln 2}{\ln(1,004)} < 174$$

$$\text{d'où : } n = 174.$$

La population de A doublera en 2173.

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation de la population dans le pays B

Posons : $v_0 = 30\,000\,000$ et désignons par v_n la population dans le pays B au 1^{er} janvier 1999 + n ($n \geq 1$).

On a : $v_1 = v_0 + \frac{3 u_0}{100} = u_0(1 + \frac{3}{100}) = 1,003 v_0$
 $v_{n+1} = 1,003 v_n$

Les nombres réels v_n sont donc les termes de la suite géométrique de raison 1,003 et de premier terme v_0 .

d'où : $v_n = (1,003)^n v_0$.

Population en 2009 dans le pays B

$$v_{10} = (1,003)^{10} \times 30\,000\,000 = 40\,317\,491.$$

Nombre n d'années nécessaires pour que la population de B double

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(1,003)^x \times 30\,000\,000 = 60\,000\,000$$

$$(1,003)^x = 2$$

$$x \ln(1,003) = \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 2}{\ln(1,003)}$$

$$\text{or : } 24 < \frac{\ln 2}{\ln(1,003)} < 25$$

$$\text{d'où : } n = 25.$$

La population de B doublera en 2023.

Amortissement de capital

Un véhicule coûte 80 millions de francs en 1998. Il se déprécie de 20 % par an ; (c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 20 % par an).

1°) Quelle est la valeur du véhicule au bout de cinq ans ?

2°) On suppose que pendant la même période les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 4 % par an.

Quelle somme d'argent l'entreprise doit-elle prévoir pour remplacer le véhicule dans cinq ans ?

Recherche d'une suite permettant de déterminer la valeur du véhicule d'année en année

Posons : $u_0 = 80\,000\,000$;

désignons par u_n la valeur du véhicule après n année(s) ($n \geq 1$).

On a : $u_1 = u_0 - 0,20u_0 = u_0(1 - 0,2) = 0,8u_0$.

$$u_{n+1} = u_n - 0,2u_n = 0,8u_n.$$

Les nombres réels u_n sont les termes d'une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme 80 000 000.

donc : $u_n = (0,8)^n u_0$.

Valeur du véhicule après 5 ans

$$u_5 = (0,8)^5 \times 80\,000\,000 = 26\,214\,400.$$

Recherche d'une suite permettant de déterminer la valeur du véhicule neuf d'année en année

Posons : $v_0 = 80\,000\,000$;

désignons par v_n le prix du véhicule neuf après n année(s) ($n \geq 1$).

On a : $v_1 = v_0 + 0,04v_0 = v_0(1 + 0,04) = 1,04v_0$.

$$v_{n+1} = v_n + 0,04v_n = 1,04v_n.$$

Les nombres réels v_n sont les termes d'une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme 80 000 000.

Vérifier que : $v_n = (1,04)^n v_0$.

Valeur du véhicule neuf après 5 ans

$$v_5 = (1,04)^5 \times 80\,000\,000 = 97\,332\,232,16.$$

Somme d'argent à prévoir pour remplacer ce véhicule

$$S = v_5 - u_5 = 97\,332\,232,16 - 26\,214\,400 = 71\,117\,832,16.$$

Remboursement de prêts bancaires

Monsieur ACQUAH emprunte un capital de 4 millions de francs à sa banque au taux d'intérêt annuel de 14 %.

Il décide de rembourser cet argent en effectuant quatre paiements annuels constants.

Calculer le montant de ces paiements annuels.

Posons : $u_0 = 4\,000\,000$;

désignons par u_n la somme que M. Acquah doit à la $n^{\text{ième}}$ année et x le montant fixe de ce paiement annuel.

Capital + intérêt	Capital restant dû	échéance
$u_0 = 4\,000\,000$	4 000 000	année 0
$u_1 = 1,14u_0$	$u_1 - x$	année 1
$u_2 = 1,14(u_1 - x)$	$u_2 - x$	année 2
$u_3 = 1,14(u_2 - x)$	$u_3 - x$	année 3
$u_4 = 1,14(u_3 - x)$	$u_4 - x = 0$	année 4
$u_4 - x = 0 \Leftrightarrow$	$1,14(u_3 - x) - x = 0$	
$\Leftrightarrow$	$1,14 \times [1,14(u_2 - x) - x] - x = 0$	
$\Leftrightarrow$	$1,14 \times [1,14[1,14(u_1 - x) - x] - x] - x = 0$	
$\Leftrightarrow$	$1,14 \times [1,14[1,14(1,14u_0 - x) - x] - x] - x = 0$	

En développant, on a : $1,14^4 u_0 - x(1,14^3 + 1,14^2 + 1,14 + 1) = 0$

$$\text{donc : } x = \frac{1,14^4 u_0}{1,14^3 + 1,14^2 + 1,14 + 1} = 1\,372\,819,13.$$

TP Limite d'une suite monotone du type : $u_{n+1} = g(u_n)$

Deux propriétés du cours se complètent et permettent de calculer la limite d'une suite convergente du type : $u_{n+1} = g(u_n)$.

L'objet de ce TP est de faire la synthèse de ces propriétés en une méthode pratique utilisée pour calculer la limite de telles suites numériques.

■ Une méthode pratique

u est une suite monotone à valeurs dans un intervalle K et définie par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

Pour calculer la limite de u , on peut procéder comme suit :

1. on étudie le sens de variation de la suite u ;
 2. on cherche à majorer ou minorer la suite u ;
 - On conclut immédiatement dans les deux cas suivants :
 - si u est croissante et non majorée alors : $\lim u = +\infty$;
 - si u est décroissante et non minorée alors : $\lim u = -\infty$.
 - Dans les deux autres cas, la suite u est convergente car elle est,
 - soit croissante et majorée,
 - soit décroissante et minorée.
- On vérifie alors que g est continue sur K .
 - On résout l'équation (E) $g(x) = x$.
 - On conclut : u a pour limite une solution de (E).

■ Exercice commenté

On donne la suite numérique v définie par : $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$.

Démontrer que la suite v est convergente, calculer sa limite.

La suite v est une suite de récurrence du type $v_{n+1} = g(v_n)$

où g est la fonction définie sur $[-2 ; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{2 + x}$.

On constate que : pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $v_n > 0$.

Étude de la convergence de v

On a vu à la page 174 que v est une suite croissante et majorée, elle est donc convergente.

Calcul de la limite de v

Résolution de l'équation (E) $g(x) = x$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2 + x} = x.$$

Sur $[0 ; +\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation : $2 + x = x^2$ dont l'unique solution dans $[0 ; +\infty[$ est 2.

Conclusion

Puisque :

- la fonction g est continue sur $[0 ; +\infty[$,
- la suite v est convergente et à valeurs dans $[0 ; +\infty[$,
- le nombre réel 2 est la solution dans $[0 ; +\infty[$ de l'équation $g(x) = x$,

On déduit que : $\lim v = 2$.

■ Application

On donne les suites numériques u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = -0,5 \\ u_{n+1} = u_n(1 + u_n) \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = 0,25v_n + 3. \end{cases}$$

On a vu que ces limites sont convergentes (voir page 175).

Calculer leurs limites.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Généralités

Sens de variation d'une suite

1 Étudier le sens de variation de la suite u dans chacun des cas suivant :

$$(1) u_n = \frac{2n-1}{3n-2} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$(2) u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - n \quad ; \quad n \geq 1$$

$$(3) u_n = \frac{5}{(-2)^n} \quad ; \quad n \geq 0$$

$$(4) u_n = \frac{2^{2n}}{3^{n+2}} \quad ; \quad n \geq 0$$

$$(5) u_n = e^{1-2n^2} \quad ; \quad n \geq 0$$

2 La suite u est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}]$$

1. Démontrer par récurrence que :

pour tout nombre entier naturel n , $u_n < 3$

2. Étudier le sens de variation de la suite (u) .

Comparaison

3 Dans chacun des cas suivants, démontrer que la suite u définie ci-dessous est bornée.

$$(1) u_n = \frac{2n-3}{5n-2} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$(2) u_n = \ln(n+1) - \ln(n) \quad ; \quad n \geq 1$$

$$(3) u_n = \sqrt{n^2+2} - n \quad ; \quad n \geq 0$$

$$(4) u_n = \frac{2n + \cos n}{n^2} \quad ; \quad n \geq 1$$

4 u est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} - 4 \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}].$$

Démontrer par récurrence que :

a) la suite u est minorée par -6 .

b) la suite u est décroissante.

5 On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35} \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}].$$

Démontrer par récurrence que :

a) la suite u est majorée par 7 .

b) la suite u est croissante.

6 La suite u est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}].$$

Démontrer par récurrence que la suite u est minorée par $\frac{3}{2}$ et majorée par 2 .

Suite périodique

7 On dit qu'une suite numérique u est périodique lorsqu'il existe un nombre entier naturel p non nul, tel que :

pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+p} = u_n$.

On dit alors que p est une période de la suite u .

Dans chacun des cas suivants, la suite u a pour terme général u_n . Vérifier si la suite u est périodique et donner sa période.

$$(1) u_n = \sin\left(\frac{2n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2n}{5}\right) \quad [n \geq 0]$$

$$(2) u_n \text{ est la } n^{\text{ième}} \text{ décimale de } \frac{22}{7} \quad [n \geq 1]$$

$$(3) \begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 25 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}]$$

$$(4) u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{1-u_n} \quad [n \geq 0]$$

Convergence

Convergence

8 v est la suite numérique définie par :

$$v_n = \frac{\ln 1}{1^2} + \frac{\ln 2}{2^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2} \quad [n \geq 1].$$

$$1. \text{ Établir que : } \frac{\ln k}{k^2} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad [k \geq 1].$$

$$2. \text{ Justifier que : } \frac{1}{2k\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \quad [k > 1].$$

$$3. \text{ En déduire que : } v_n \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \quad [n \geq 1].$$

4. Démontrer que la suite v est convergente.

9 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1} \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

1. Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) étudier graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite u .

2. On se propose de démontrer les résultats observés. Démontrer, en utilisant le raisonnement par récurrence que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $u_n \neq -2$.

10 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases} \quad [n \in \mathbb{N}].$$

1. Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) étudier graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite u .

2. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 et conclure intuitivement quant à l'expression de u_n en fonction de n .

3. Démontrer le résultat observé au 2. et conclure quant à la convergence de la suite u .

11 u est une suite numérique croissante.
Démontrer que :

si u est divergente, alors : $\lim u_n = +\infty$.

12 v est une suite numérique décroissante.
Démontrer que :

si v est divergente, alors : $\lim v_n = -\infty$.

13 v est une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \quad [n \in \mathbb{N}]. \end{cases}$$

1. Dans le plan muni du repère (O, I, J) , étudier graphiquement les propriétés de cette suite.

2. Démontrer que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite u est croissante.

4. Démontrer que la suite u est divergente.

Limite

14 Dans chacun des cas suivants, u est la suite de terme général u_n .

Étudier la limite de la suite u .

(1) $u_n = 2n - \sqrt{4n^2 + 1} \quad ; \quad n \geq 0$

(2) $u_n = \ln n + \sin n \quad ; \quad n \geq 0$

(3) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \quad ; \quad n \geq 1$

(4) $u_n = \frac{e^{4n+4}}{4n} \quad ; \quad n \geq 1$

(5) $u_n = \frac{n^3}{e^{n^2} - 1} \quad ; \quad n \geq 0$

15 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2u_n} \quad [n \in \mathbb{N}]. \end{cases}$$

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , étudier graphiquement les propriétés de cette suite.

2. Démontrer que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$.

4. Démontrer que u est une suite décroissante.

5. La suite u est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

16 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 3u_n + 6}{u_n - 1} \end{cases}$$

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , étudier graphiquement les propriétés de cette suite.

2. Démontrer que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 3$.

3. Démontrer que la suite u est décroissante.

4. La suite u est-elle convergente ?

Si oui, quelle est sa limite ?

17 u est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 3} \quad [n \in \mathbb{N}]. \end{cases}$$

1. Dans le plan muni du repère (O, I, J) , étudier graphiquement les propriétés de cette suite.

2. Démontrer que :

pour tout n , $u_n \geq 0$.

3. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $u_n - u_{n-1}$. En déduire que u est monotone.

4. Justifier que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $u_n < 2$.

5. Démontrer que la suite u est convergente et donner sa limite.

18 (u_n) est la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{n} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

p est un nombre entier naturel non nul ;

$S_{1,p}$ est la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_p$.

1. a) En utilisant la méthode des rectangles avec des intervalles d'amplitude 1, donner un encadrement de

l'intégrale : $\int_1^5 \frac{1}{x} dx$.

b) En déduire : $\int_1^5 \frac{1}{x} dx < S_{1,4}$.

2. Démontrer que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx < S_{1,n}$.

3. En remarquant que : $\int_1^n \frac{1}{x} dx = I_n$,

déduire que : $\lim S_{1,n} = +\infty$.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

19 u est la suite numérique définie par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

1. Quelle est la limite de la suite u ?

2. p est un nombre entier naturel non nul.

$S_{1,p}$ est la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_p$.

a) En utilisant la méthode des rectangles avec des intervalles d'amplitude 1, donner un encadrement de l'intégrale :

$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

b) En déduire : $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < S_{1,4}$.

3. Démontrer que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx < S_{1,n}$.

4. a) On pose : $v_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \quad [n \in \mathbb{N}^*]$.

Exprimer v_n en fonction de u .

b) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

c) Quelle est la limite de la suite $(S_{1,n})$?

5. (w_n) est la suite numérique définie par :

$$w_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

a) Démontrer que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. En déduire que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2 < w_n$.

3. Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

20 Dans chacun des cas suivants u est la suite de terme générale u_n définie ci-dessous.

En utilisant la croissance comparée des fonctions logarithme exponentielle et puissance, étudier la limite de la suite u .

(1) $u_n = \frac{3^n + n^3}{5^n + 7} \quad ; \quad n \geq 0$

$$(2) u_n = \frac{5^n + 4n}{3^n + 2} \quad ; \quad n \geq 0$$

$$(3) u_n = \frac{(\ln n)^{10}}{n^{0.1}} \quad (4) u_n = \frac{5^n + (\ln n)^{50}}{7^{3n} + n^{1000}}$$

$$(5) u_n = \frac{10^{2n} + (2n)^{10}}{6^{6n} + (2n)^{1000}} \quad (6) u_n = \frac{3n^{1/5} + 3^n}{n^{7/3} + 5^n}$$

$$(7) u_n = 2^n - n \ln n$$

21 1. En étudiant le sens de variation des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sin x - x \quad \text{et} \quad g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6},$$

justifier que :

pour tout nombre réel strictement positif x :

$$x + \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

2. Dans chacun des cas suivants, u est une suite de terme générale u_n ; étudier la limite de la suite u .

$$(1) u_n = \sin \frac{1}{n} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$(2) u_n = n \sin \frac{1}{n} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$(3) u_n = \sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$(4) u_n = n^2 \sin \frac{1}{n} - n \quad ; \quad n \geq 1$$

22 u est la suite numérique définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

1. Justifier que :

$$\text{pour tout } k \text{ élément de } \mathbb{N}^*, \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

2. En déduire que :

$$\text{pour tout } n \text{ élément de } \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n-1} - 2 \leq u_n.$$

3. Étudier la limite de la suite u .

23 u est la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

1. Justifier que :

$$\text{pour tout } n \text{ élément de } \mathbb{N}^*, \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

2. Étudier la limite de la suite u_n .

Suites arithmétiques et suites géométriques

Suite arithmétique

24 u est une suite arithmétique de raison r .

On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ $[n \geq 1]$.

1. On donne : $u_0 = 2$, $r = 6$ et $n = 30$.

Calculer u_{n-1} et S_n .

2. On donne : $n = 20$, $u_{n-1} = 62$ et $r = 5$.

Calculer u_0 et S_n .

3. On donne : $u_0 = 7$, $n = 95$ et $u_{n-1} = -181$.

Calculer r et S_n .

4. On donne : $r = \sqrt{3}$, $n = 10$ et $S_n = 10\sqrt{2} + 45\sqrt{3}$.

Calculer u_0 et u_{n-1} .

5. On donne : $n = 28$, $u_{n-1} = \frac{19}{2}$ et $S_n = 140$.

Calculer u_0 et r .

6. On donne : $u_0 = -3$, $u_{n-1} = 69$ et $S_n = 330$.

Calculer n et r .

7. On donne : $u_0 = 35$, $r = 13$ et $S_n = 1\,100$.

Calculer n et u_{n-1} .

8. On donne : $u_{n-1} = -53$, $r = -2$ et $S_n = -585$.
Calculer n et u_0 .

Suite géométrique

25 u et v sont les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{4} \\ u_{n-1} = \frac{1}{3}u_n - n - \frac{4}{3} \quad [n \geq 1]. \end{cases}$$

Pour tout naturel n , $v_n = u_n + a_n + b$, a et b sont des nombres réels.

1. Déterminer les nombres réels a et b sachant que la suite (v_n) est géométrique. En déduire v_n puis u_n en fonction de n .

2. On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ $[n \in \mathbb{N}]$

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad [n \in \mathbb{N}].$$

Calculer S_n et T_n en fonction de n .

26 u et v sont les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n-1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad [n \in \mathbb{N}^*] \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n-1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \quad [n \in \mathbb{N}^*]. \end{cases}$$

1. On pose : $w_n = v_n - u_n$ $[n \in \mathbb{N}^*]$.

Démontrer que la suite w de terme général w_n est géométrique et exprimer w_n en fonction de n .

2. Démontrer que la suite u est décroissante et que la suite v est croissante.

3. Démontrer que :

$$\text{pour tout nombre entier naturel } n \text{ non nul, } u_n \geq v_n$$

et en déduire que :

$$u_1 \geq u_n \geq v_n \geq v_1.$$

4. On pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$ $[n \geq 1]$.

Démontrer que la suite t de terme général t_n est croissante.

27 On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+1} = a^2 u_{n+1} + 2(a-3)u_n, \quad a \text{ étant un nombre réel.} \end{cases}$$

v est la suite définie par $v_n = u_{n+1}$ $[n \in \mathbb{N}]$.

1. On pose : $a = 2$ et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Vérifier que la suite v est constante. En déduire que u est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

Exprimer u_n et S_n en fonction de n .

2. On pose : $a = -4$ et $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

Vérifier que la suite v est une suite géométrique.

Exprimer v_n et T_n en fonction de n .

Démontrer que : pour tout entier naturel n , $T_n = u_{n+1}$.

3. Démontrer que -4 est la seule valeur de a telle que la suite v soit une suite géométrique non constante.

28 La suite numérique v est définie par :

$$\begin{cases} v_1 = 6 \\ 5v_{n+1} = v_n + 16 \quad [n \in \mathbb{N}^*]. \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite v est minorée par 4 et décroissante.

2. Pour tout nombre entier naturel non nul n , on pose $w_n = v_n - a$, a étant un nombre réel donné.

a) Déterminer le nombre réel a tel que la suite w de terme général w_n soit une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) On pose : $a = 4$.

Calculer w_n puis v_n en fonction de n .

Sachant que : $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$

$$T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n,$$

calculer S_n puis T_n en fonction de n .

29 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \quad [n \in \mathbb{N}]. \end{cases}$$

On se propose d'étudier la limite de la suite u par deux méthodes.

1^{re} méthode

1. Justifier que :

pour tout nombre entier naturel n , $u_n \geq -\frac{1}{2}$.

2. Étudier les variations de la suite u .

3. Dédire des questions précédentes que la suite u est convergente.

Déterminer sa limite.

2^e méthode

v est la suite définie par : $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} \quad [n \in \mathbb{N}]$.

1. Démontrer que v est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n .

2. Calculer u_n en fonction de n et étudier la convergence de la suite u_n .

30 u est la suite numérique définie par :

$$u_n = e^{2n+1} \quad [n \in \mathbb{N}].$$

1. Démontrer que la suite u est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2. a) $S_{0,n}$ désigne la somme : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n .

b) Démontrer que : $\lim(S_{0,n}) = +\infty$.

c) Déterminer la valeur minimale de n pour que : $S_{0,n} \geq 10^5$.

3. v est la suite numérique définie par :

$$v_n = \ln(u_n) \quad [n \in \mathbb{N}].$$

a) Exprimer la somme $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ en fonction de n .

b) Exprimer le produit $u_0 u_1 u_2 \dots u_n$ en fonction de n .

D'après bac

31 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \quad [n \in \mathbb{N}^*]. \end{cases}$$

1. Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) étudier graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite u .

2. v est la suite numérique définie par :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

a) Démontrer que :

pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $u_n \neq -1$.

b) Démontrer que v est une suite géométrique dont on précisera le terme v_1 et la raison.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

d) En déduire la limite de la suite u .

Étudier les variations et la convergence de la suite w définie par :

$$\begin{cases} w_1 = 3 \\ w_{n+1} = \frac{5w_n + 3}{w_n + 3} \quad [n \in \mathbb{N}^*]. \end{cases}$$

Étudier les variations et la convergence de la suite z_n définie par :

$$\begin{cases} z_1 = -3 \\ z_{n+1} = \frac{5z_n + 3}{z_n + 3} \quad [n \in \mathbb{N}^*]. \end{cases}$$

32 u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}} \quad [n \in \mathbb{N}]. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. v est la suite définie par :

pour tout nombre entier naturel n , $v_n = u_n \sqrt{2} - n$.

Démontrer que la suite v est une suite géométrique dont on précisera le terme v_0 et la raison.

3. Calculer v_n puis u_n en fonction de n . Étudier la convergence de la suite u .

4. $S_{0,n}$ désigne la somme : $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n .

Étudier $\lim S_{0,n}$.

D'après bac

33 (I) est la suite numérique définie par :

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx \quad [n \in \mathbb{N}].$$

1. En utilisant la technique d'intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .

2. Démontrer que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme I_0 et la raison.

3. $S_{0,n}$ désigne la somme $I_0 + I_1 + \dots + I_n$. Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n puis calculer $\lim S_{0,n}$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) , représenter graphiquement les fonctions f , g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = e^{-x} ; \quad g(x) = -e^{-x} ; \quad h(x) = -e^{-x} \sin x.$$

Interpréter graphiquement les résultats obtenus aux questions 2. et 3.

34 1. Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) , représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 2^{-x}.$$

2. u_n est la suite numérique définie par :

$$u_n = \int_{n-1}^n 2^{-x} \, dx \quad [n \in \mathbb{N}^*].$$

Démontrer que la suite u_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

3. $S_{1,n}$ désigne la somme : $u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Calculer $S_{1,n}$ en fonction de n :

a) en utilisant la suite u ;

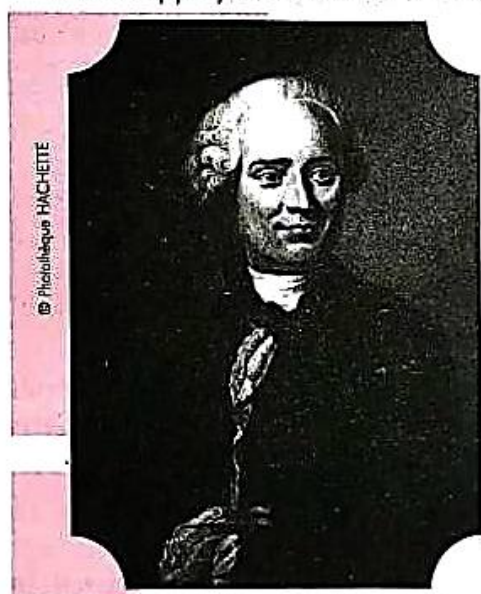
b) en utilisant l'égalité de Chasles.

4. Calculer $\lim S_{1,n}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Équations différentielles

Les équations différentielles tirent leur origine dans la résolution de problèmes de physique et de mécanique proposés aux mathématiciens par des physiciens. Elles se sont développées au fil des ans et se sont détachées de leur carcan originel pour atteindre les sommets de la théorie. Des mathématiciens illustres ont élaboré la théorie des équations différentielles et donné des théorèmes généraux d'existence et d'unicité de solutions de telles équations satisfaisant à des conditions initiales.

Nous citerons tout particulièrement Clairaut, Ricatti, Bernoulli, Lagrange, Maxwell, d'Alembert, Cauchy, Lipschitz dont les travaux s'appliquent à différents domaines tels que :



l'électromagnétisme,
la relativité restreinte
ou généralisée,
la recherche opérationnelle,
la mécanique générale,
la mécanique quantique,
l'astronomie,
l'astronautique...

Jean le Rond d'Alembert
physicien et mathématicien français – 1717-1783.

SOMMAIRE

- | | |
|---|-----|
| 1. Résolution d'équations différentielles | 192 |
| 2. Résolution de problèmes | 199 |

1

Résolution d'équations différentielles

1.1. Notion d'équation différentielle

Présentation

■ Activité introductive 1

On donne la fonction rationnelle g définie par : $g(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

On veut déterminer la primitive f sur $] -1 ; +\infty[$ de g qui prend la valeur 3 en 1.

Le plan étant muni d'un repère, construire cette primitive f .

- Le problème revient à déterminer une fonction f dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ telle que : $\begin{cases} f' = g & (E) \\ f(1) = 3 & (1) \end{cases}$
- (E) définit une équation ayant pour inconnue une fonction. Dans cette équation figure la dérivée première de la fonction inconnue. On dit que (E) est une **équation différentielle du premier ordre**.
- On appelle **conditions initiales du problème**, les conditions $\begin{cases} f' \text{ est dérivable sur }] -1 ; +\infty[\\ f(1) = 3 & (1) \end{cases}$
- Ce problème admet une fonction solution unique, c'est la primitive f sur $] -1 ; +\infty[$ de g qui prend la valeur 3 en 1, car la fonction g est continue sur $] -1 ; +\infty[$.
- Dans le plan muni d'un repère, la représentation graphique de la fonction solution f est appelée **courbe intégrale** de (E) avec les conditions initiales (I).

■ Activité introductive 2

On donne la fonction rationnelle g définie par : $g(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

On veut déterminer une fonction f deux fois dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ telle que : $f'' = g$.

- Le problème revient à déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $] -1 ; +\infty[$ telles que : $f'' = g$ (E). (E) définit une équation ayant pour inconnue une fonction. Dans cette équation figure la dérivée seconde de la fonction inconnue. On dit que (E) est une **équation différentielle du second ordre**.
- Ce problème admet une infinité de solutions. En effet,
une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{2}{(x+1)^2}$ est du type : $x \mapsto \frac{-2}{(x+1)} + a$ [$a \in \mathbb{R}$],
une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{-2}{(x+1)} + a$ est du type : $x \mapsto -\ln(x+1)^2 + ax + b$ [$b \in \mathbb{R}$].
Ainsi on obtient la famille de fonctions solution f_{ab} définies sur $] -1 ; +\infty[$ par :
$$f_{ab}(x) = -\ln(x+1)^2 + ax + b \quad [a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}].$$
- Dans le plan muni d'un repère, les représentations graphiques des fonctions f_{ab} , solutions de l'équation différentielle (E), constituent une famille de courbes intégrales ($\mathcal{C}_{ab}$).

Définition

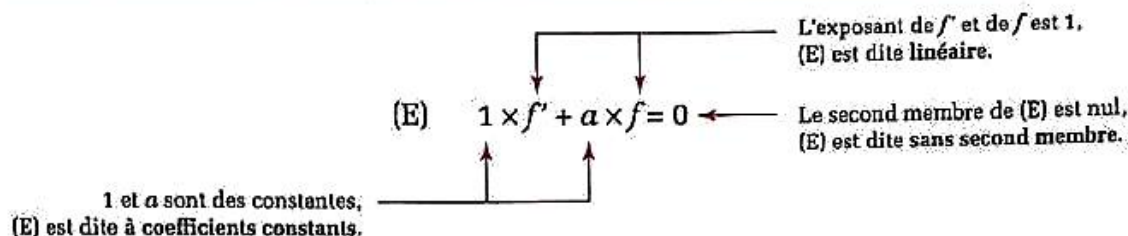
On appelle **équation différentielle**, toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

1.2. Équations différentielles du type $f' + af = 0$

Présentation

Définition

On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre*, toute équation différentielle qui peut s'écrire : $f' + af = 0$ [$a \in \mathbb{R}^*$].



Exemple

$f' - f = 0$; $f' + 2f = 0$; $5f' - 3f = 0$ sont des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants sans second membre.

Activité

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = ae^{2x}$ [$a \in \mathbb{R}$].

Déterminer une équation différentielle du premier ordre qui a pour solution la fonction f .

Résolution

Activité

On donne l'équation différentielle (E) : $f' - 4f = 0$.

On donne les fonctions g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $g(x) = e^{4x}$; $h(x) = ke^{4x}$ [$k \in \mathbb{R}$].

Vérifier que g et h sont des solutions de (E).

Démontrons la propriété suivante :

Propriété

(E) est l'équation différentielle : $f' + af = 0$ [$a \in \mathbb{R}^*$].

Les seules solutions de (E) sont les fonctions f_k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_k(x) = ke^{-ax} \quad [k \in \mathbb{R}].$$

Démonstration

On a : $[f' + af = 0] \Leftrightarrow$ pour tout nombre réel x , $f'(x) + af(x) = 0$.

Soit x un nombre réel ; on obtient donc les égalités ci-dessous qui sont équivalentes :

$$f'(x) + af(x) = 0$$

$$[f'(x) + af(x)] e^{ax} = 0$$

$$[f(x) e^{ax}]' = 0$$

$$f(x) e^{ax} = k \quad [k \in \mathbb{R}]$$

$$f(x) = ke^{-ax} \quad [k \in \mathbb{R}]$$

$$\text{car : } e^{ax} \neq 0$$

$$\text{car : } [f(x) e^{ax}]' = [f'(x) + af(x)] e^{ax}$$

$$\text{car : } e^{ax} \neq 0$$

Exemples

Réolvons chacune des équations différentielles suivantes :

(1) $f' - f = 0$; (2) $f' + 6f = 0$; (3) $5f' - 3f = 0$

- Les solutions de l'équation (1) sont les fonctions $x \mapsto k e^x$ [$k \in \mathbb{R}$].
- Les solutions de l'équation (2) sont les fonctions $x \mapsto k e^{-6x}$ [$k \in \mathbb{R}$].
- Les solutions de l'équation (3) sont les fonctions $x \mapsto k e^{\frac{3}{5}x}$ [$k \in \mathbb{R}$].

Réolvons l'équation différentielle (E) $f' + 2f = 0$.

On désigne par φ la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale (I) $\varphi(1) = -1$.

Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), construisons en noir les représentations graphiques de quatre solutions de (E), traçons en couleur celle de φ .

Résolution de l'équation différentielle (E)

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f_k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_k(x) = k e^{-2x} \quad [k \in \mathbb{R}].$$

Désignons par $(\mathcal{C}_k)$ la représentation graphique de f_k .

Détermination de la solution

On sait que : $\begin{cases} \varphi(x) = k e^{-2x} & [k \in \mathbb{R}] \\ \varphi(1) = -1 \end{cases}$

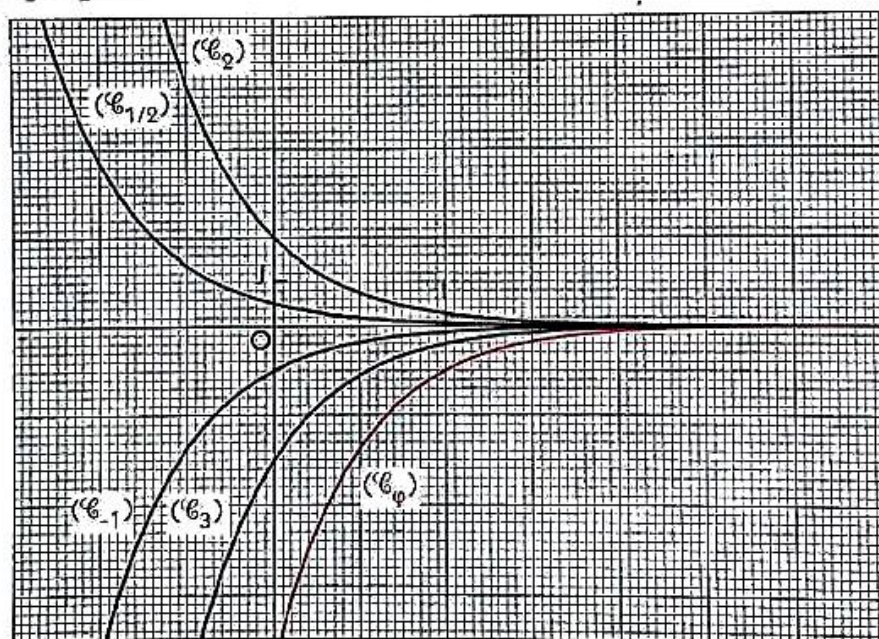
donc : $k e^{-2} = -1$

$$k = \frac{-1}{e^{-2}} = -e^2$$

d'où : $\varphi(x) = -e^2 e^{-2x}$

Désignons par $(\mathcal{C}_\varphi)$ la représentation graphique de φ .

Représentations graphiques



Exercices

1. a Dans chacun des cas suivants, déterminer la famille solution f de l'équation différentielle.

- | | |
|-----------------------------|------------------------|
| (1) $f' + 2f = 0$ | (2) $f' - 3f = 0$ |
| (3) $f' - \frac{3}{2}f = 0$ | (4) $f' - f \ln 2 = 0$ |
| (5) $4f' + 3f = 0$ | (6) $6f' = f$ |

1. b Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

- | | | |
|--------------------|----|-------------|
| (1) $f' - 3f = 0$ | et | $f(0) = 1$ |
| (2) $f' + 3f = 0$ | et | $f(1) = 2$ |
| (3) $4f' - 3f = 0$ | et | $f(-1) = 1$ |

1.2. Équations différentielles du type $f'' + af' + bf = 0$

Présentation

Définition

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre*, toute équation différentielle qui peut s'écrire : $f'' + af' + bf = 0$ $[(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$.

(E) $1 \times f'' + a \times f' + b \times f = 0$

1, a et b sont des constantes, (E) est dite à coefficients constants.

L'exposant de f'' , de f' et de f est 1, (E) est dite linéaire.

Le second membre de (E) est nul, (E) est dite sans second membre.

Exemple

$f'' - 3f' + 5f = 0$; $f'' - 5f = 0$; $f'' + 4f = 0$ sont des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre.

Activité

On donne les fonctions g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$g(x) = ae^{3x} \quad ; \quad h(x) = a \sin 4x + b \cos 4x \quad [a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}].$$

- Déterminer une équation différentielle du second ordre qui a pour solution la fonction g .
- Même question pour la fonction h .

Équation caractéristique d'une équation différentielle

Activité 1

On donne les équations différentielles : (1) $f'' + 25f = 0$ (2) $f'' - 3f' - 4f = 0$.

- Vérifier que la fonction $x \mapsto e^{4x}$ est solution de (2).
- Vérifier que la fonction $x \mapsto \sin 5x$ est solution de (1).
- Vérifier que la fonction $x \mapsto \cos 5x + \sin 5x$ est solution de (1).

Activité 2

On considère une équation différentielle (E) $f'' + af' + bf = 0$.

On veut trouver une solution de l'équation (E) de la forme $x \mapsto e^{rx}$ $[r \in \mathbb{R}]$.

La fonction U de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $U(x) = e^{rx}$ est deux fois dérivable.

On a : $U' = rU$, $U'' = r^2U$,

d'où : $U'' + aU' + bU = 0 \Leftrightarrow (r^2 + ar + b)U = 0$,

donc : $r^2 + ar + b = 0$ (car $U \neq 0$),

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue r est appelée *équation caractéristique* de l'équation différentielle $f'' + af' + bf = 0$.

Exemples

- L'équation différentielle : $f'' - 2f' + 5f = 0$ a pour équation caractéristique : $r^2 - 2r + 5 = 0$.
- L'équation différentielle : $f'' - 25f = 0$ a pour équation caractéristique : $r^2 - 25 = 0$.
- L'équation différentielle : $f'' + f = 0$ a pour équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$.

Famille de solutions d'une équation différentielle

■ L'équation caractéristique admet deux solutions réelles

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

(E) est l'équation $f'' + af' + bf = 0$ [$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$].

Si l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions réelles r_1 et r_2 ,
alors les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Cas particulier

(E) est l'équation différentielle $f'' - w^2 f = 0$, [$w \in \mathbb{R}$].

Les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto Ae^{wx} + Be^{-wx} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Exemple

Réolvons chacune des équations différentielles suivantes :

$$(1) \quad f'' - 9f = 0 \quad ; \quad (2) \quad f'' - 4f' + 3f = 0.$$

$$(1) \quad f'' - 9f = 0$$

L'équation caractéristique de (1) est :

$$r^2 - 9 = 0.$$

Elle admet deux solutions réelles : 3 et -3.

Les solutions de (1) sont donc les fonctions :

$$x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-3x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

$$(2) \quad f'' - 4f' + 3f = 0$$

L'équation caractéristique de (2) est :

$$r^2 - 4r + 3 = 0.$$

Elle admet deux solutions réelles : 1 et 3.

Les solutions de (2) sont donc les fonctions :

$$x \mapsto Ae^x + Be^{3x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

■ L'équation caractéristique admet une solution réelle unique

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

(E) est l'équation $f'' + af' + bf = 0$ [$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$].

Si l'équation caractéristique de (E) admet une solution réelle unique r ,

alors les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto (Ax + B)e^{rx} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Exemple

Réolvons chacune des équations différentielles suivantes :

$$(1) \quad f'' - 4f' + 4f = 0 \quad ; \quad (2) \quad f'' + \frac{12}{5}f' + \frac{36}{25}f = 0.$$

$$(1) \quad f'' - 4f' + 4f = 0$$

L'équation caractéristique de (1) est :

$$r^2 - 4r + 4 = 0.$$

Elle admet une solution réelle : -2.

Les solutions de (1) sont donc les fonctions :

$$x \mapsto (Ax + B)e^{-2x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

$$(2) \quad f'' + \frac{12}{5}f' + \frac{36}{25}f = 0.$$

L'équation caractéristique de (2) est :

$$r^2 + \frac{12}{5}r + \frac{36}{25} = 0.$$

Elle admet une solution réelle : $-\frac{6}{5}$.

Les solutions de (2) sont donc les fonctions :

$$x \mapsto (Ax + B)e^{-\frac{6}{5}x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

■ L'équation caractéristique admet deux solutions complexes

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

(E) est l'équation différentielle $f'' + af' + bf = 0$ [$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$].

Si l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$, alors les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Cas particulier

(E) est l'équation différentielle $f'' + w^2 f = 0$ [$w \in \mathbb{R}$].

Les seules solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto A \cos wx + B \sin wx \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Exemple

Réolvons chacune des équations différentielles suivantes :

$$(1) \quad f'' + 25f = 0 \quad ; \quad (2) \quad f'' + f' + f = 0.$$

$$(1) \quad f'' + 25f = 0$$

L'équation caractéristique de (1) est :

$$r^2 + 25 = 0.$$

Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $5i$ et $-5i$.

Les solutions de (1) sont donc les fonctions :

$$x \mapsto A \cos 5x + B \sin 5x \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

$$(2) \quad f'' + f' + f = 0.$$

L'équation caractéristique de (2) est :

$$r^2 - r + 1 = 0.$$

Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Les solutions de (2) sont donc les fonctions :

$$x \mapsto (A \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x) e^{-\frac{1}{2} x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Tableau récapitulatif

Équation différentielle du type : $f'' + af' + bf = 0$ [$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$]	
Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet :	alors la solution générale est la fonction f définie par :
deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2	$f_{AB}(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}]$
une unique solution réelle r	$f_{AB}(x) = (Ax + B) e^{rx} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}]$
deux solutions complexes conjuguées $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$	$f_{AB}(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}]$

■ ■ ■ ■ ■ Solution vérifiant des conditions initiales

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

x_0, y_0 et z_0 étant trois nombres réels donnés, l'équation différentielle $f'' + af' + bf = 0$,
[$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$] admet une solution unique φ telle que : $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = z_0$.

Exemple 1

Réolvons l'équation différentielle : (E) $f'' + 4f' + 7f = 0$,
avec les conditions initiales (1) $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + 4r + 7 = 0$.

Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $-2 + i\sqrt{3}$ et $-2 - i\sqrt{3}$.

Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions f définies par :

$$f_{AB}(x) = (A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x)e^{-2x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Cherchons celle qui vérifie $f_{AB}(0) = 0$ et $f'_{AB}(0) = 1$.

Elle vérifie donc le système $\begin{cases} A = 0 \\ -2A + B\sqrt{3} = 1 \end{cases}$; d'où $\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Les solutions de l'équation différentielle (E) qui s'annule en 0 et dont la dérivée prend la valeur 1 en 0 est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-2x} \sin\sqrt{3}x$.

Exemple 2

Réolvons l'équation différentielle : (E) $f'' - 4f' + 4f = 0$,
avec les conditions initiales (1) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 4r + 4 = 0$.

Elle admet une unique solution réelle : 2.

Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions f définies par :

$$f_{AB}(x) = (Ax + B)e^{2x} \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Cherchons celle qui vérifie $f_{AB}(0) = 1$ et $f'_{AB}(0) = 0$.

Elle vérifie donc le système $\begin{cases} A + 2B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$; d'où $\begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases}$

Les solutions de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 1 en 0 et dont la dérivée s'annule en 0 est la fonction : $x \mapsto (-2x + 1)e^{2x}$.

Exercices

1. c Déterminer les solutions de chacune des équations différentielles (E).

(1) $9f'' - 64f = 0$ (2) $f'' + 4f' - 5f = 0$

(3) $2f'' - 5f' - 3f = 0$ (4) $f'' - 4f' + 4f = 0$

(5) $\frac{1}{3}f'' - 2f' + 3f = 0$ (6) $9f'' + 6f' + f = 0$

(7) $9f'' - 6f' + 2f = 0$ (8) $f'' + f' + 6f = 0$

1. d Déterminer la solution f de chacune des équations différentielles (E) vérifiant les conditions initiales données.

(1) $2f'' + f = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

(2) $9f'' + 64f = 0$; $f(\pi) = 0$ et $f'(2\pi) = -\frac{1}{3}$

(3) $f'' + 4f' + 5f = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$

(4) $4f'' + 4f' + f = 0$; $f(1) = 0$ et $f'(1) = 5$.

2

Résolution de problèmes

De nombreux problèmes, en démographie, en électricité... relevant de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évaluation et à une condition initiale sont décrits par une fonction solution d'une équation différentielle.

Pour résoudre de tels problèmes, nous procédons suivant les étapes ci-dessous :

- 1 la modélisation du problème
qui consiste à la mise en équation, c'est-à-dire ici la recherche d'une équation différentielle permettant de décrire la situation ;
- 2 la résolution mathématique du problème
c'est-à-dire la résolution de l'équation différentielle avec la condition initiale ;
- 3 l'interprétation du résultat obtenu
d'où la solution du problème posé.

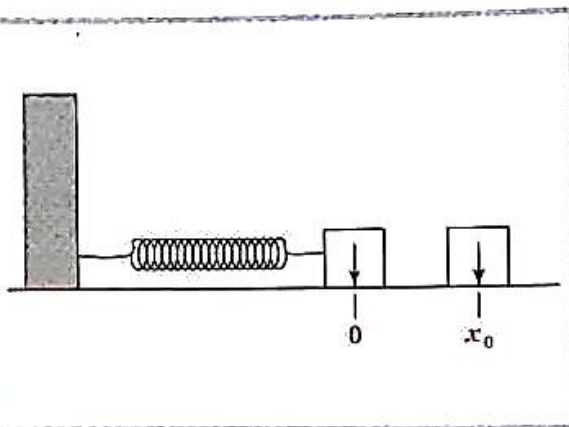
Oscillations non amorties

On fixe un solide de masse m à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives de dureté k ; on fixe l'autre extrémité à un mur.

Le solide peut se déplacer horizontalement sans frottement sur une droite (D). Le repère de (D) est tel que, lorsque le ressort n'est pas tendu, la marque sur le solide a une abscisse nulle.

On tire le ressort jusqu'à amener la marque sur le solide à l'abscisse x_0 .

On abandonne le système et on demande de trouver la position x du solide en fonction du temps t . (On négligera la masse du ressort.)



Mise en équation

Désignons par f la fonction définie par : $x = f(t)$.

L'accélération à la date t est $\frac{d^2x}{dt^2}$ et la force qui s'exerce sur la masse est $-kx$.

D'après la loi de Newton, on a : $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$.

On définit une équation différentielle du type : $f'' + af = 0$ [$a = \frac{k}{m}$],

avec les conditions initiales $f(0) = x_0$ et $f'(0) = 0$.

Résolution

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :

$$x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x \quad [A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}].$$

Les conditions initiales permettent d'obtenir la fonction solution f définie par :

$$f(t) = x_0 \cos \omega t, \quad [\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}].$$

Accroissement d'une population

En 1990, la population du Bénin était d'environ 4 750 000 d'habitants et d'environ 5 500 000 en 1995. On suppose que la vitesse d'accroissement $h'(t)$ de cette population à l'instant t est proportionnelle au nombre $h(t)$ d'habitants à cet instant.

Dans ces conditions, en quelle année la population du Bénin sera-t-elle de 10 millions d'habitants ? de 20 millions d'habitants ?

Mise en équation

La vitesse d'accroissement $h'(t)$ de cette population à l'instant t étant proportionnelle au nombre $h(t)$ d'habitants à cet instant, on peut écrire que : $h'(t) = ah(t)$ [$a \in \mathbb{R}$].

Résolution

– Cette équation étant du type $h' - ah = 0$, la fonction solution est définie par : $h(t) = ke^{at}$.

– Déterminons k et a à l'aide des conditions initiales :

En 1990, la population du Bénin étant d'environ 4 750 000 d'habitants et d'environ 5 500 000 en 1995,

$$\text{on a : } 4\,750\,000 = ke^{1990a}$$

$$5\,500\,000 = ke^{1995a}$$

$$\text{d'où : } \frac{5\,500\,000}{4\,750\,000} = \frac{ke^{1995a}}{ke^{1990a}}, \text{ c'est-à-dire } \frac{550}{475} = e^{5a}$$

$$\text{donc : } 5a = \ln \frac{550}{475}$$

$$\text{et } a = 0,03$$

$$\text{par suite } h(t) = 5\,500\,000e^{0,03(t-1995)}.$$

Déterminons l'année à laquelle la population du Bénin sera de 10 millions d'habitants.

$$10\,000\,000 = 5\,500\,000e^{0,03(t-1995)}$$

$$\frac{10\,000\,000}{5\,500\,000} = e^{0,03(t-1995)}$$

$$\text{d'où : } \ln \frac{100}{55} = 0,03(t-1995)$$

$$20 = t - 1995$$

$$t = 2015$$

Solution du problème

En 2015 la population du Bénin sera de 10 millions d'habitants.

Pour 20 millions d'habitants, on trouve : $t = 2039$; en 2039 la population du Bénin sera de 20 millions d'habitants.

■ ■ ■ Décharge dans un circuit RC

Étudions la variation de la charge du condensateur au cours du temps.

Mise en équation

M et N sont les armatures d'un condensateur de capacité C initialement neutre. Chargeons-le sous une différence de potentiel U_0 et relions ses armatures à un résistor de résistance R . Le condensateur décharge à travers la résistance R .

Désignons par q_0 la charge du condensateur à l'instant initial où commence la décharge, l'intensité i_0 du courant dans le circuit étant nulle.

À un instant t quelconque de la décharge, q est la charge de l'armature M du condensateur, i l'intensité du courant dans le circuit.

q est une fonction du temps et on a : $i = \frac{dq}{dt} = q'$.

La définition de la capacité du condensateur donne la différence de potentiel entre ses armatures :

$$U_{NM} = \frac{q}{C}.$$

La loi d'Ohm exprimée aux bornes du résistor donne :

$$U_{NM} = Ri = -U_{MN}$$

$$\text{donc : } Ri = -\frac{q}{C}$$

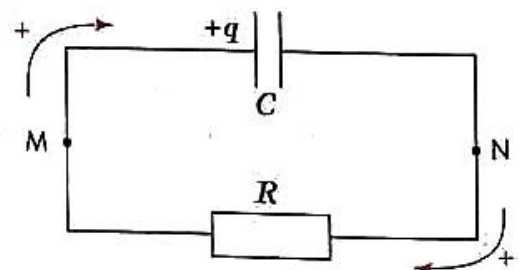
$$\text{d'où : } R \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$$

q est donc solution de l'équation différentielle : $\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q$, avec $q(0) = q_0$.

Résolution

Cette équation différentielle est du type : $q' + aq = 0$.

- Donner sa solution générale.



TP Courbes paramétrées

Ce TP a pour objectif de fournir un complément de cours, qui est un outil souvent utilisé en physique.

À partir d'une représentation paramétrique d'une courbe $(\mathcal{C})$, savoir :

- déterminer une tangente de $(\mathcal{C})$,
- construire $(\mathcal{C})$.

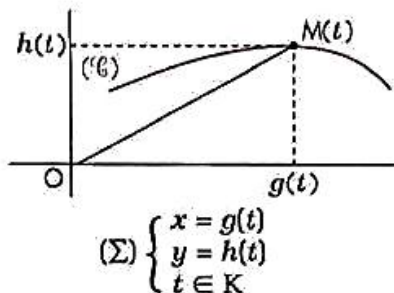
■ Notion de courbe paramétrée

En cinématique

Description du mouvement du point M par la position de M à chaque instant t :

$$\vec{OM}(x; y)$$

$$\vec{F}(t)(g(t); h(t))$$



En analyse

M est un point de la courbe $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x; y)$:

$$M(x; y)$$

$$M(g(t); h(t)) \quad [t \in K]$$

$(\mathcal{C})$ est une courbe paramétrée.
 (Σ) définit une représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$.

Supposons f et g dérivables sur l'intervalle K .

Considérons le vecteur :

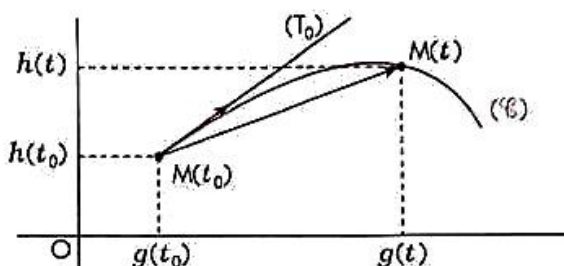
$$\frac{1}{t - t_0} \vec{M_0 M_t} \left(\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}; \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} \right).$$

Lorsque t tend vers t_0 , à la limite, on obtient :

$$\vec{V}_0(g'(t_0); h'(t_0)).$$

Lorsque $(g'(t_0); h'(t_0)) \neq (0; 0)$, $\vec{V}_0$ est un vecteur directeur d'une droite (T_0) , position limite des sécantes $\vec{M_0 M_t}$ $[t \in K]$.

La droite (T_0) est appelée **tangente** à $(\mathcal{C})$ au point $M_0(g(t_0); h(t_0))$; le vecteur $\vec{V}_0(g'(t_0); h'(t_0))$ est appelé **vecteur dérivée** en t_0 .



■ Construction d'une courbe paramétrée

Exercice commenté

Construire la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases} \quad [t \in \mathbb{R}]$.

Considérons les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = t^2 + 1$ et $h(t) = t^2 - 2t + 2$.

Étude de la fonction g

$$g'(t) = 2t$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$$

Tableau de variation de g

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Étude de la fonction h

$$h'(t) = 2(t - 1)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$$

Tableau de variation de h

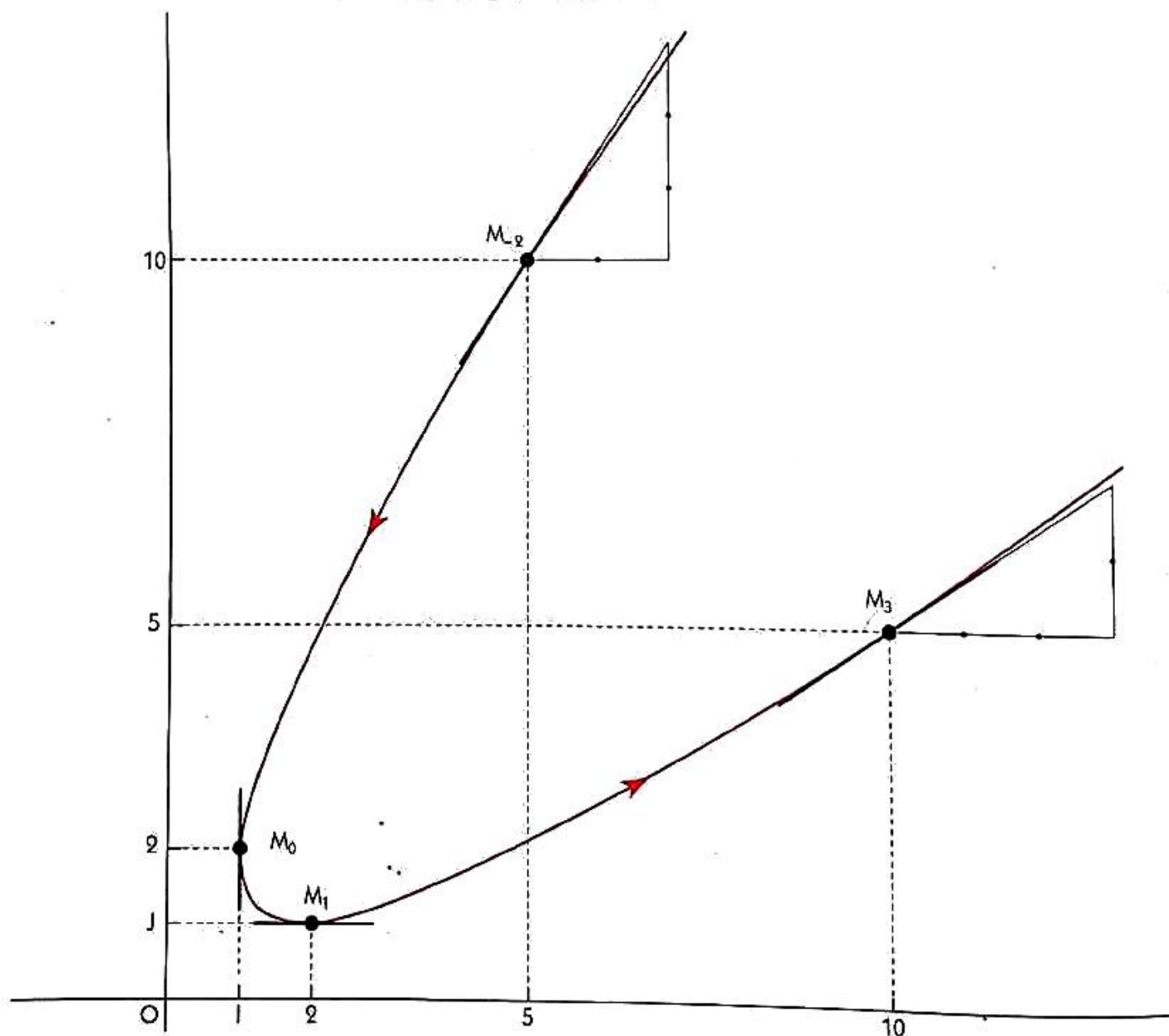
t	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(t)$	-	0	+
$h(t)$	$+\infty$	1	$+\infty$

t	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
$g(t)$	$+\infty$	5	1	2	10	$+\infty$
$h(t)$	$+\infty$	10	2	1	5	$+\infty$
$g'(t)$	-	-4	0	2	6	+
$h'(t)$	-	-6	-2	0	4	+

Valeurs remarquables et vecteurs dérivées

t	-2	0	1	3
coordonnées du point M_t	(5 ; 10)	(1 ; 2)	(2 ; 1)	(10 ; 5)
coordonnées du vecteur $\vec{V}_t$	(-4 ; -6)	(0 ; -2)	(2 ; 0)	(6 ; 4)
coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente (T_t)	(2 ; 3)	(0 ; 1)	(1 ; 0)	(3 ; 2)

Construction de $(\mathcal{C})$ sur les intervalles où g et h sont monotones



Exercices

ENTRAÎNEMENT

Équations différentielles du type $f' + af = 0$

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| (1) $f' + 3f = 0$ | (4) $f' - 4f = 0$ |
| (2) $2f' - 3f = 0$ | (5) $f' + \sqrt{2}f = 0$ |
| (3) $f' + 2f = 0$ | (6) $2f' + f = 0$ |

2 Résoudre les équations différentielles ci-dessous avec les conditions initiales imposées

- | |
|----------------------------------|
| (1) $f' + 3f = 0$; $f(1) = 1$ |
| (2) $f' + 3f = 0$; $f(-2) = 2$ |
| (3) $-f' + 2f = 0$; $f(3) = -2$ |
| (4) $3f' + 6f = 0$; $f(4) = 2$ |
| (5) $5f' + f = 0$; $f(-5) = 0$ |
| (6) $2f - 5f' = 0$; $f(1) = -1$ |

Équations différentielles du type $f'' + af' + bf = 0$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| (1) $f'' - f' - 2f = 0$ | (4) $f'' - 4f' - 4f = 0$ |
| (2) $3f'' + 3f' - f = 0$ | (5) $2f'' - 12f' + 18f = 0$ |
| (3) $-f'' - f' + 2f = 0$ | (6) $4f'' + 6f = 0$ |

4 Résoudre les équations différentielles ci-dessous avec les conditions initiales imposées.

- | |
|---|
| (1) $2f'' + 3f' - 2f = 0$; $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$ |
| (2) $f'' + 2f' + f = 0$; $f(0) = -1$, $f'(0) = 0$ |
| (3) $f'' - 2f' + 5f = 0$; $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$ |
| (4) $3f'' - 2f' + 3f = 0$; $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ |
| (5) $3f'' - 2f' + 7f = 0$; $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ |

5 Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales données.

- | | |
|---------------------|--|
| (1) $25f'' + f = 0$ | avec $f(\pi) = 2$ et $f'(\pi) = \sqrt{3}$ |
| (2) $f'' + f = 0$ | avec $f(\frac{\pi}{2}) = 3$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 2$ |

PROBLÈMES

6 Déterminer la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2g'(x) + g(x) = 0$ et dont la courbe représentative ($\mathcal{C}$) admet en son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.

7 f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x on a : $f(x) = -3f'(x)$. La représentation graphique ($\mathcal{C}$) de f dans le plan muni du repère (O, I, J) passe par le point de coordonnées $(-2; 1)$. Déterminer f et construire ($\mathcal{C}$).

8 On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 3e^{-\frac{3}{2}x}.$$

Déterminer une équation linéaire du premier ordre dont f est solution.

Déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f' + \ln 2 = 0$ qui prend la valeur 4 en 1.

9 1. Résoudre l'équation différentielle :

$$f'' - \frac{1}{2} \times f = 0.$$

Déterminer la solution qui prend la valeur $\frac{1}{e}$ en 1.

10 On considère l'équation différentielle :

$$f'' + 2f' = 0.$$

1. On pose $g = f'$.

Justifier que g est solution de l'équation différentielle :

$$g' + 2g = 0$$

2. Résoudre l'équation différentielle : $g' + 2g = 0$.

En déduire les solutions de l'équation différentielle :

$$f'' + 2f' = 0.$$

11 On donne l'équation différentielle :

$$f'' + 2f' + f = 0 \quad (E)$$

On pose : pour tout nombre réel x : $h(x) = e^x k(x)$.

1. Démontrer que k est solution de (E) si et seulement si, pour tout nombre réel x , $h''(x) = 0$.

2. Résoudre l'équation différentielle : $h'' = 0$.

3. En déduire les solutions (E).

12 Déterminer la solution f de l'équation différentielle $f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$ sachant que sa représentation graphique passe par le point $A(0; 4)$ et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

13 Déterminer la solution f de l'équation différentielle $9f'' + f = 0$ sachant que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} f(x) dx = 3.$$

14 Déterminer la solution f de l'équation différentielle $f'' - f = 0$ sachant que f est une fonction paire et $f(0) = 1$.

15 1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad 16f'' + f = 0$$

2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(2\pi) = -\sqrt{3}.$$

3. Démontrer que :

$$\text{pour tout nombre réel } x, f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right).$$

16 Déterminer la fonction positive u définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\frac{u'}{u}$ est -2 en tout x de $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 10 en 0.

17 1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad f'' - 2f' + 5f = 0$$

Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

2. On pose :

pour tout nombre réel x , $F(x) = -\frac{1}{5}[f''(x) - 2f(x)]$.

Justifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

18 On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie les deux conditions suivantes :

- sa représentation graphique ($\mathcal{C}$) passe par le point $M(0; 4)$;

- la tangente à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 0.

3. Représentez ($\mathcal{C}$) et sa tangente au point d'abscisse 2 dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathcal{C}$), (OI) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 4$.

19 On se propose de chercher les fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que : pour tout nombre réel x ,

$$(E) \quad f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 6x^2 + 5x.$$

1. On désigne par g un polynôme défini par :

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont des nombres réels.

Déterminer a, b, c pour que, pour tout nombre réel x , g soit solution de (E).

2. On pose : $F = f - g$.

a) Démontrer que si f est solution de l'équation (E) alors F est solution de l'équation :

$$(E') \quad F'' - 4F' + 3F = 0.$$

Réciproquement établissez que si F est solution de (E') alors f est définie par $f = F + g$.

20 On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + 2y' + 5y = 0.$$

1. Vérifier que les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = e^{-x} \cos 2x$ et $f_2(x) = e^{-x} \sin 2x$ sont des solutions de l'équation (E).

On admettra que toute solution de (E) est de la forme $k_1 f_1 + k_2 f_2$ où k_1 et k_2 sont des nombres réels quelconques.

2. Démontrer qu'il existe une solution f , de (E), dont la courbe représentative dans un plan muni d'un repère, passe par le point $A(0; 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -3 .

21 Une population a une croissance instantanée relative constante à tout instant t égale à 1,5 %. À l'instant 0, la population est de 3,5 millions d'habitants.

Déterminer la population $p(t)$ en fonction de t .

22 Dans un pays, la consommation d'un produit a diminué régulièrement, la variation relative instantanée à tout instant t étant de -2% .

Déterminer l'expression $f(t)$ de cette consommation en kg par habitant en fonction du temps t exprimé en année, sachant que cette consommation est de 12 kg à l'instant $t = 15$.

(On donnera $f(t)$ sous forme $k e^{mt}$.)

23 A - 1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad f'' + kf = 0.$$

où f est une fonction dépendant du temps t ($t \geq 0$) et k une constante réelle strictement positive.

Préciser la solution particulière f_1 correspondant à la condition initiale : $f_1(0) = 2$

B - Application

Après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (taux de glucose sanguin) décroît à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi :

$$g' + kg = 0.$$

où g désigne la fonction glycémique dépendant du temps t ($t \geq 0$) et k une constante strictement positive, appelée coefficient d'assimilation glucidique.

1. À l'aide de la première question, déterminer l'expression de $g(t)$ à l'instant t sachant que $g(0) = 2$.

Étudier les variations de g et donner l'allure de sa représentation graphique.

2. Calculer en fonction de k l'abscisse T du point d'intersection de la tangente à la courbe au point $M(0; 2)$ avec l'axe des temps.

3. On pose : $g_1 = g(t_1)$, g_1 étant le taux de glycémie à l'instant t_1 donné et positif.

Déterminer la formule donnant le coefficient k en fonction de g_1 .

Le XIX^e siècle s'est émerveillé sur « ces nombres qui mêlent le réel et l'imaginaire ! »

La construction des nombres complexes a enregistré la contribution d'éminents mathématiciens à qui s'est posée la nécessité de trouver une racine carrée de -1 !



© BOYER-VIOLET

Niels Henrik Abel
mathématicien norvégien –
1802-1829.

Citons Euler, Hamilton, Cauchy...

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) conjectura, sans pouvoir le prouver, que « dans l'ensemble des nombres complexes, tout polynôme de degré n a exactement n racines. »

Niels Henrik Abel et Évariste Galois apportèrent la preuve de cette base fondamentale de l'algèbre.



© HARINGUE-VIOLET

William Rowan Hamilton
mathématicien et astronome
irlandais – 1805-1865.



© Collection VIOLET

Évariste Galois
mathématicien français –
1811-1832.

SOMMAIRE

1. Nombres complexes, forme algébrique	206
2. Formes trigonométriques et exponentielles	214
3. Résolution d'équations	219

1.1. Présentation de l'ensemble des nombres complexes

Introduction historique

■ Des équations du 3^e degré aux « quantités imaginaires »

• Après la résolution des équations du 1^{er} et du 2nd degré par les Babiloniens vers le II^e millénaire av. J.-C. et transmise à l'occident au IX^e siècle par Al-Khwarizmi, la résolution d'une équation du 3^e degré est longtemps restée une énigme pour les mathématiciens.

• C'est au IX^e siècle que les mathématiciens de Bagdad étudient les équations du 3^e degré. Au XVI^e siècle l'étude de ces équations est reprise en Occident par les mathématiciens italiens de la Renaissance : Cardan, Bombelli...

– Dans le cadre de concours entre savants, l'équation du 3^e degré est résolue algébriquement par Cardan (1501 - 1576) qui donne en 1547, par une « formule » décrite littéralement, une méthode de résolution de l'équation du type : $x^3 + px + q = 0$ [$p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$] (1).

– Pour résoudre une telle équation par la méthode de Cardan, Bombelli introduit des « quantités imaginaires » qui ne sont pas des nombres réels, les « racines carrées » des nombres réels négatifs. À l'aide d'une comptine, il énonça en 1572, dans son *Algèbre* les règles de multiplication de ces « quantités imaginaires ».

L'activité suivante donne, dans un cadre moderne, les principales étapes de cette méthode.

■ Résolution d'une équation dans $\mathbb{R}$ du type : $x^3 + px + q = 0$

Activité

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 - 6x - 4 = 0$ (E).

Pour cela,

- vérifier graphiquement que (E) admet trois solutions dans $\mathbb{R}$;
- utiliser la méthode suivante pour résoudre algébriquement (E).

[1] Introduction de deux inconnues auxiliaires

- Vérifier que si u et v sont deux nombres réels tels que :

$$u^3 + v^3 = 4 \text{ et } uv = 2,$$

alors $u + v$ est une solution de l'équation (E).

La résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) conduit donc à la résolution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ du système (Σ), donc aussi du système (Σ').

$$(\Sigma) \begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ uv = 2 \end{cases} \quad (\Sigma') \begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ u^3 v^3 = 8 \end{cases}$$

S'ils existent, les nombres réels u et v sont solutions de l'équation (F) : $X^2 - 4X + 8 = 0$.

- Vérifier que (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, cependant l'équation (E) admet trois solutions dans $\mathbb{R}$!

[2] Introduction d'un nombre imaginaire noté i tel que : $i^2 = -1$

On suppose qu'on peut encore appliquer les règles de calcul de l'addition et de la multiplication des nombres réels.

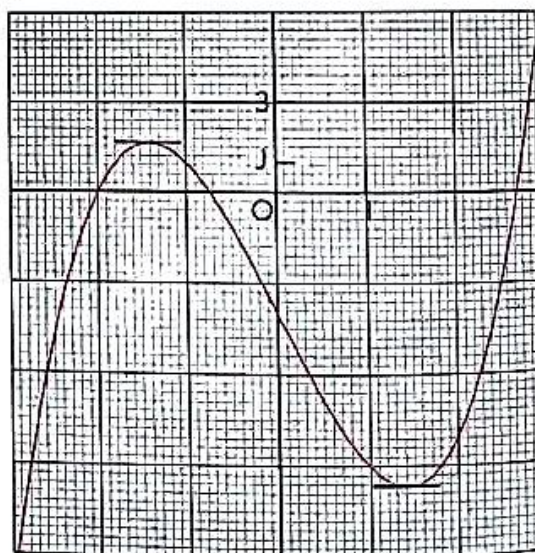
- Vérifier que l'équation (F) admet deux solutions $2 + 2i$ et $2 - 2i$ et que :

$$(-1 + i)^3 = 2 + 2i \text{ et } (-1 - i)^3 = 2 - 2i.$$

$(-1 + i)$ et $(-1 - i)$ sont donc les solutions de l'équation (F).

-2 est la somme de $(-1 + i)$ et $(-1 - i)$; c'est donc une solution de l'équation (E).

- Acheter la résolution de E.



3 Expression de certains nombres réels contenant des « quantités imaginaires »

• Les mathématiciens ont ainsi montré que certains nombres réels peuvent être écrits par des expressions contenant des « quantités imaginaires ».

Cependant, l'utilisation de ces « quantités imaginaires » reste controversée pendant deux siècles !

• On peut remarquer que :

– toute équation du type $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ peut se ramener à l'équation $X^3 + pX + q = 0$ (il suffit de poser $x = X - \frac{a}{3}$).

– toute équation du 3^e degré admet dans $\mathbb{R}$ au moins une solution (car sa fonction polynôme f associée à une équation du type précédent est continue et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$).

■ Des « quantités imaginaires » aux nombres complexes

• Au milieu du XVIII^e siècle,

– Euler propose en 1777 de remplacer la « racine carrée » de -1 par i ; d'où l'introduction de i tel que $i^2 = -1$.

– D'Alembert (1717-1783) montre que toutes les « quantités imaginaires » sont de la forme $a + ib$ avec a et b réels.

• Au XIX^e siècle,

À la suite d'Argand, Gauss désigne en 1811 ces « quantités imaginaires » par **nombres complexes** et décrit leur représentation géométrique, ce qui confère à ces « quantités imaginaires » le statut de nombres.

■■■■■ Calcul avec ces nombres

Exemples

$$(5 - i\sqrt{2}) + (-\sqrt{3} + 4i) = 5 - \sqrt{3} + (4 - \sqrt{2})i.$$

$$(5 - i\sqrt{2}) \times (-\sqrt{3} + 4i) = -5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}i^2 + (20 + \sqrt{6})i = -5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + (20 + \sqrt{6})i.$$

Activité

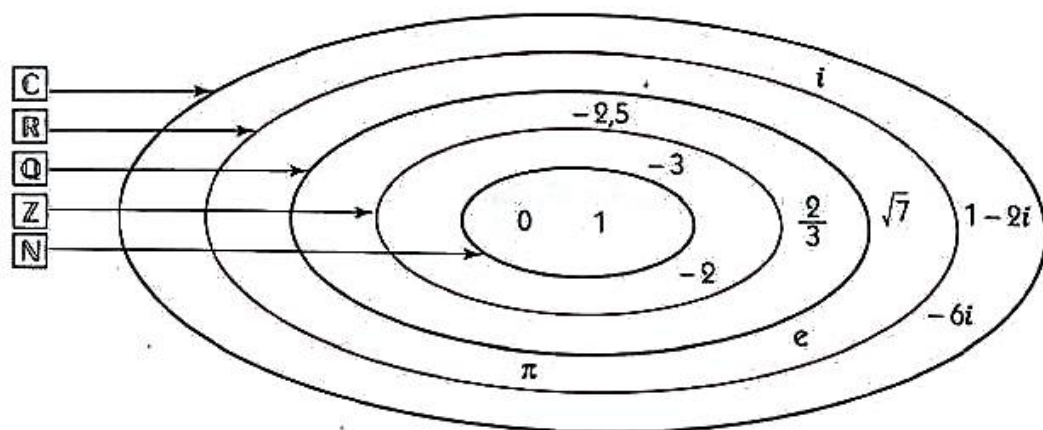
a, b, a', b' étant des nombres complexes, calculer la somme et le produit suivant :
 $(a + ib) + (a' + ib')$; $(a + ib) \times (a' + ib')$

■■■■■ Ensemble des nombres complexes

Nous admettons la propriété suivante :

Propriété – Définition

- Il existe un nombre imaginaire noté i , vérifiant : $i^2 = -1$;
- Tout nombre de la forme $a + ib$ [$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$] est appelé **nombre complexe** ;
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$;
- Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ sont définies une addition et une multiplication ayant respectivement les mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.



1.2. Forme algébrique d'un nombre complexe

Égalité de deux nombres complexes

Propriétés

a, b, a', b' sont des nombres réels.

$$\begin{aligned} [a + ib = a' + ib'] &\Leftrightarrow [a = a' \text{ et } b = b'] \\ [a + ib = 0] &\Leftrightarrow [a = 0 \text{ et } b = 0] \end{aligned}$$

Démonstration

- $a + ib$ et $a' + ib'$ sont des nombres complexes.

Démontrons que $[a + ib = a' + ib'] \Leftrightarrow [a = a' \text{ et } b = b']$.

– Supposons $a = a'$ et $b = b'$; on en déduit : $a + ib = a' + ib'$.

– Supposons $a + ib = a' + ib'$; on obtient : $a - a' = i(b' - b)$

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrons que : $b' - b = 0$

Supposons $b' - b \neq 0$

on obtient $i = \frac{a - a'}{b' - b}$; or $\frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$; donc $i \in \mathbb{R}$ (ce qui est faux).

Par suite $b' - b = 0$; c'est-à-dire $b = b'$

Par conséquent $a - a' = 0$; c'est-à-dire $a = a'$.

- La deuxième propriété est un cas particulier de la première.

Notation

On désigne par $\mathbb{C}^*$ l'ensemble de nombres complexes non nuls.

Forme algébrique d'un nombre complexe

Propriété – Définition

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique : $z = a + ib$ [$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$].

a est appelé la *partie réelle* de z et est noté $\operatorname{Re}(z)$

b est appelé la *partie imaginaire* de z et est noté $\operatorname{Im}(z)$.

On appelle *forme algébrique* du nombre complexe z l'écriture : $a + ib$.

Exemple

z écrit sous la forme algébrique	$\operatorname{Re}(z)$	$\operatorname{Im}(z)$
$-9 + 2i$	-9	2
$5,6 + i\sqrt{3}$	$5,6$	$\sqrt{3}$
12	12	0
i	0	1

Nombres réels – Nombres imaginaires purs

– Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un **nombre réel**.

– Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **nombre imaginaire pur**.

L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres imaginaires purs non nuls est noté $i\mathbb{R}^*$.

La propriété suivante est immédiate :

Propriété

z étant un nombre complexe, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$; $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$.

Exemple

x étant un nombre réel, $2x - 1 - i(x + 1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -1$; $2x - 1 - i(x + 1) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

1.3. Calcul dans $\mathbb{C}$

■ ■ ■ Somme et produit de nombres complexes

- On vérifie que :

Pour tous nombres complexes de formes algébriques $a + ib$ et $a' + ib'$,

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

- z et z' étant des nombres complexes, on pose : $z + (-z') = z - z'$.

Exemples

$$\begin{aligned}(3 + 2i) + (2 - 5i) &= 2 + 3 + (2 - 5)i &&= 5 - 3i \\ 3i(3 + 2i) &= 3 \times 3i + 3 \times 2i^2 &&= -6 + 9i \\ (4 + i)(3 - 2i) &= 4 \times 3 + (-2i^2) + (3 - 2 \times 4)i &&= 14 - 5i\end{aligned}$$

■ ■ ■ Opposé et inverse d'un nombre complexe

■ Opposé d'un nombre complexe

Soient des nombres complexes de formes algébriques $a + ib$ et $x + iy$.

$$\begin{aligned}x + iy \text{ est l'opposé de } a + ib &\Leftrightarrow (a + ib) + (x + iy) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + a) + i(y + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -a \text{ et } y = -b.\end{aligned}$$

L'opposé du nombre complexe $(a + ib)$ est noté $-(a + ib)$ et on a :

$$\begin{aligned}\text{Pour tout nombre complexe de forme algébrique } a + ib, \\ -(a + ib) = -a - ib\end{aligned}$$

■ Inverse d'un nombre complexe non nul

- Soient des nombres complexes de formes algébriques $a + ib$ et $x + iy$.

$$\begin{aligned}x + iy \text{ est inverse de } a + ib &\Leftrightarrow (x + iy) \times (a + ib) = 1 \\ &\Leftrightarrow (ax - by) + i(ay + bx) = 1.\end{aligned}$$

On est amené à résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$

on obtient : $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$ et $y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$

Ce système admet donc une solution unique car $a^2 + b^2$ est non nul (en effet, $a + ib \neq 0$),

L'inverse du nombre complexe non nul $a + ib$ est noté $\frac{1}{a + ib}$ et on a :

$$\begin{aligned}\text{Pour tout nombre complexe non nul de forme algébrique } a + ib, \\ \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a^2 + b^2} (a - ib)\end{aligned}$$

- z étant un nombre complexe et z' un nombre complexe non nul, on pose : $z \times \frac{1}{z'} = \frac{z}{z'}$.

■ ■ ■ Produit nul

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' , $z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Démonstration

Soient z et z' deux nombres complexes.

Démontrons que $z \times 0 = 0$

$$\text{on a : } zz' = z \times (z' + 0)$$

$$zz' = zz' + z \times 0$$

$$\text{d'où : } z \times 0 = 0$$

Supposons $z \times z' = 0$

si $z = 0$, la propriété est vérifiée quel que soit z' ;

si $z \neq 0$, $\frac{1}{z}$ existe et : $z' = \frac{1}{z}(z \times z') = \frac{1}{z} \times 0$

donc : $z' = 0$.

Exemple

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(z + 2 - 3i)(z - 3 + 5i) = 0$.

On sait que : $(z + 2 - 3i)(z - 3 + 5i) = 0 \Leftrightarrow [z + 2 - 3i = 0] \text{ ou } [z - 3 + 5i = 0]$
 $\Leftrightarrow [z = -2 + 3i] \text{ ou } [z = 3 - 5i]$

donc : $-2 + 3i$ et $3 - 5i$ sont les solutions de (E).

Puissance entière d'un nombre complexe

Puissance entière d'un nombre complexe quelconque

Par analogie avec l'ensemble des nombres réels, on définit les puissances à exposant entier d'un nombre complexe.

Définition

z étant un nombre complexe non nul, n un nombre entier naturel non nul,

$$(1) z^0 = 1 \quad ; \quad (2) 0^n = 0 \quad ; \quad (3) z^{n+1} = z^n \times z \quad ; \quad (4) z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Puissances entières de i

• Calculer i^3 ; i^4 ; i^5 ; i^6 ; i^7 ; i^8 ; i^9 ; i^{10} .

Plus généralement, on démontre que :

Pour tout nombre entier naturel n ,

$$i^{4n} = 1 \quad ; \quad i^{4n+1} = i \quad ; \quad i^{4n+2} = -1 \quad ; \quad i^{4n+3} = -i$$

Formule du binôme de Newton

Les règles de calcul sur les puissances à exposants entiers des nombres réels non nuls sont les mêmes que celles sur les puissances à exposants entiers des nombres complexes non nuls, d'où la propriété suivante :

Propriété

Pour tous nombres complexes non nuls u et v , pour tout nombre entier naturel n plus grand que 1,

$$(u + v)^n = C_n^0 u^n + C_n^1 u^{n-1} v + \dots + C_n^k u^{n-k} v^k + \dots + C_n^n v^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{n-k} v^k.$$

Exemples

$$\begin{aligned} (3 - i)^4 &= C_4^0 3^4 + C_4^1 3^3(-i) + C_4^2 3^2(-i)^2 + C_4^3 3(-i)^3 + C_4^4 (-i)^4 \\ &= 1 \times 81 + 4 \times 27(-i) + 6 \times 9 - 4 \times 3i + 1 \\ &= 81 + 54 + 1 + i(-108 - 12) \\ &= 136 - 120i. \end{aligned}$$

Triangle de Pascal (voir p 295)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Exercices

- 1.a Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :
- $$(2 + i)(1 - i) - (3 - 2i)^2 + (5 - i)(5 + i);$$
- $$3i(2 + 8i) - 7(5 - 2i) + (7 - 3i)(1 + 5i).$$

- 1.b Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :
- $$\frac{1}{3 + 2i} \quad ; \quad \frac{1}{2 - i\sqrt{3}} \quad ; \quad \frac{5 + 7i}{1 + i} \quad ; \quad \frac{4 - 3i}{i}.$$

- 1.c z et z' étant deux nombres complexes quelconques,
- calculer : $(z + z')^2$; $(z - z')^2$; $(1 - i)^2$; $(1 + i)^2$;
 - factoriser : $z^2 - z'^2$; $z^3 - z'^3$; $z^3 + 1$; $z^3 - 1$.

- 1.d Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :
- $$\begin{array}{lll} (5 + i)^3 & ; & (2 + i)^4 \\ (1 + i)^6 & ; & (1 + 2i)^5 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} (-3 + 2i)^3 \\ (1 - 2i)^6 \end{array}$$

1.4. Module et conjugué d'un nombre complexe

Pour écrire sous forme algébrique l'inverse du nombre complexe non nul de forme algébrique $a + ib$, on a mis en évidence le nombre complexe $a - ib$ et le nombre réel $a^2 + b^2$. Étudions ces deux nombres.

Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle *conjugué* du nombre complexe z , le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que :

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$$

z étant un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$, $\bar{z} = a - ib$.

Exemple

$3 + 2i$ a pour conjugué : $3 - 2i$

$-5 + i$ a pour conjugué : $-5 - i$

$-2 - 3i$ a pour conjugué : $-2 + 3i$

$6 - 4i$ a pour conjugué : $6 + 4i$

$12i$ a pour conjugué : $-12i$

10 a pour conjugué : 10

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la définition.

Propriété - Définition

Pour tout nombre complexe z , $\overline{\bar{z}} = z$.

On dit que les nombres complexes z et $\bar{z}$ sont *conjugués*.

Les propriétés (1) à (5) se démontrent aisément, les propriétés (6), (7) et (8) sont des conséquences.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z ,

(1) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$

(2) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$

(3) $z \times \bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2$

Pour tout nombre complexe z ,

(4) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

(5) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

z étant un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$,

$$z + \bar{z} = 2a \quad ; \quad z - \bar{z} = 2ib \quad ; \quad z \times \bar{z} = a^2 + b^2.$$

Pour tous nombres complexes z et z' , (6) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; (7) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.

Pour tout nombre complexe z , pour tout nombre complexe non nul z' , (8) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

Démonstration guidée

Soient z et z' deux nombres complexes de formes algébriques respectives $a + ib$ et $a' + ib'$.

• Calculer et comparer $\overline{z + z'}$ et $\bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{z \times z'}$ et $\bar{z} \times \bar{z}'$.

• Démontrer que : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

Pour cela, justifier que : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} \times z' = z$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} \times z' = \bar{z}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} \times \bar{z}' = \bar{z}$.

Exemples

$48(3 - i\sqrt{2})$ a pour conjugué : $48(3 + i\sqrt{2})$.

$\frac{7}{2 + i\sqrt{3}}$ a pour conjugué : $\frac{7}{2 - i\sqrt{3}}$.

$(7 - i\sqrt{3})(\sqrt{2} + 3i)$ a pour conjugué : $(7 + i\sqrt{3})(\sqrt{2} - 3i)$.

$\frac{2 + 3i}{9 - 5i}$ a pour conjugué : $\frac{2 - 3i}{9 + 5i}$.

Exemples d'utilisation du conjugué d'un nombre complexe

z étant un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$, $z = a + ib$; $\bar{z} = a - ib$; $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

$z\bar{z}$ est un nombre réel, d'où l'utilisation de $\bar{z}$ pour écrire $\frac{1}{z}$ sous forme algébrique : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

Exemples

Écrivons la forme algébrique du nombre complexe :

$$\frac{1}{2+4i}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+4i} &= \frac{2-4i}{(2-4i)(2+4i)} \\ &= \frac{2-4i}{4+16} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}i\end{aligned}$$

Écrivons la forme algébrique du nombre complexe :

$$\frac{3+2i}{1-5i}$$

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{1-5i} &= \frac{(3+2i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} \\ &= \frac{-7+17i}{1+25} = \frac{-7}{26} + \frac{17}{26}i\end{aligned}$$

Module d'un nombre complexe

Définition

On appelle *module* du nombre complexe z , le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$.

On le note $|z|$.

z étant un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple

$3 + 2i$ a pour module : $\sqrt{13}$

$4 - 3i$ a pour module : 5

i a pour module : 1

12 a pour module : 12

Les propriétés (1), (2), (3), et (4) sont des conséquences immédiates de la définition.
Les propriétés (5), (6), (7) et (8) seront démontrées ultérieurement.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z , (1) $|\bar{z}| = |z|$; (3) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
(2) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$; (4) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Pour tous nombres complexes z et z' ,

$$(5) |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$(6) |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

Pour tous nombres complexes z ,

pour tout nombre complexe non nul z' ,

$$(7) \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} ; (8) \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Exercices

1.e Quel est le nombre complexe conjugué de chacun des nombres complexes suivants ?

$2 + 4i$; $1 - 5i$; $2i(4 - i)$; $(3 + i)(-5i + 3)$

$\frac{1}{2+i}$; $\frac{3-i}{6i-2}$; $\frac{-5i}{i}$; $\frac{2+i}{8-i}$.

1.f Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$\frac{1}{-5i}$; $\frac{2}{3i}$; $\frac{1}{\sqrt{2+5i}}$; $\frac{3-i}{4+3i}$; $\frac{1}{4-2i}$; $\frac{2+5i}{9-4i}$.

1.g Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$2 + 4i$; $1 - 5i$; $-7 + i$;
 $-1 - 3i$; $-6i$; -8 .

1.5. Nombre complexe et représentation géométrique

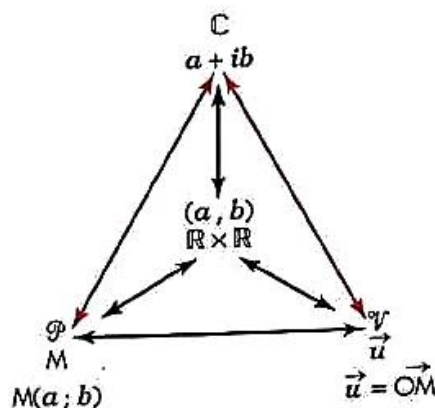
Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) .

L'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est muni de la base orthonormée $(\vec{OI}, \vec{OJ})$.

On sait que tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme : $z = a + ib$.

En tenant compte des bijections entre les ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{V}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on en déduit les six bijections ci-contre.

Ces bijections permettent d'établir ou de justifier les résultats essentiels.



	Dans $\mathbb{C}$	Dans $\mathcal{P}$ ou dans $\mathcal{V}$	Illustrations
Affixe Point-image Vecteur-image	$z = x + iy, [(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$ z est $\nearrow$ l'affixe du point A noté z_A $\searrow$ l'affixe du vecteur $\vec{OA}$ noté $z_{\vec{OA}}$ $z_A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A \in (OI)$ $z_A \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow A \in (OJ)$	A est le point-image de z noté $A(z)$ On pose $\vec{OA} = \vec{u}$ $\vec{u}$ est le vecteur-image de z noté $\vec{u}(z)$	
Somme Différence Opposé	On pose $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ $z_A + z_B$ est l'affixe du point $C(x_A + x_B; y_A + y_B)$ $z_C = z_A + z_B$ $z_A - z_B$ est l'affixe du vecteur $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$ $-z_A$ est l'affixe du vecteur $-\vec{OA}(-x_A; -y_B)$		
Module	Le module de z est la norme du vecteur-image de z $ z = \sqrt{a^2 + b^2} = \ \vec{u}(z)\ $ On sait que : $OC \leq OA + OB$ d'où : $ z + z' \leq z + z' $		

$\mathcal{P}$ est appelé le **plan complexe**, (OI) est l'**axe réel**, (OJ) l'**axe imaginaire**.

Exercices

1.h Le plan est muni du repère (O, I, J) . Placer le point-image de chacun des nombres complexes suivants : $1 - i$; $1 + i$; $2 + 4i$; $-1 + i$; $-2 + i$; $1 - 2i$; $-i$; 5 .

1.i Le plan est muni du repère (O, I, J) . Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points-images des nombres complexes z

tels que : (1) $z \in \mathbb{R}_+$; (2) $z \in \mathbb{R}_-$; (3) $z \in i\mathbb{R}$; (4) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

1.j Le plan est muni du repère (O, I, J) . On considère un nombre complexe z et son point-image M . Placer les points-images M_1 , M_2 et M_3 respectifs des nombres complexes : $-z$; $\bar{z}$ et $-\bar{z}$.

2

Formes trigonométriques Formes exponentielles

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) ; $\mathcal{V}$ est muni de la base orthonormée directe $(\vec{OI}, \vec{OJ})$.

2.1. Arguments d'un nombre complexe non nul

Définition

Activité

Dans chacun des cas suivants, construire le point-image M du nombre complexe z et déterminer la mesure principale et deux autres mesures de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$:

(1) $z = 1 - i$

(2) $z = -2 + 2i$

(3) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

Définition

z est un nombre complexe non nul, M le point-image de z dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) .

– La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est appelée l'**argument principal** de z , noté : $\text{ARG}(z)$.

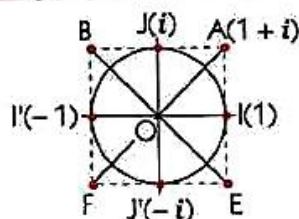
– Toute mesure de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est appelée un **argument** de z , noté $\arg(z)$.

θ étant un argument d'un nombre complexe non nul z , tout autre argument de z est de la forme : $\theta + k2\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$].

Exemple

z	1	i	-1	$-i$	$1+i$
$\text{ARG}(z)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

On n'attribue pas d'argument au nombre complexe 0.



Égalité de nombres complexes non nuls

z étant un nombre complexe non nul, M son point-image peut être repéré par la distance OM et l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$.

Par conséquent, le nombre complexe non nul z est déterminé par son module et un de ses arguments.

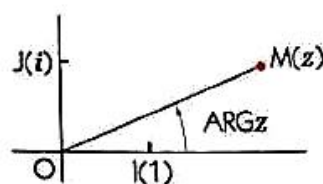
On en déduit l'égalité de nombres complexes non nuls :

Propriété

z et z' sont des nombres complexes non nuls.

$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \text{ARG}(z) = \text{ARG}(z')$$

$$\Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) = \arg(z') + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}].$$



Exercices

- 2.a Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) . Déterminer l'ensemble des nombres complexes z dans chacun des cas ci-dessous :
 $\text{ARG}(z) = 0$; $\text{ARG}(z) = \pi$; $\text{ARG}(z) = \frac{\pi}{2}$;
 $\text{ARG}(z) = -\frac{\pi}{2}$.

- 2.b Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) . On considère un nombre complexe z d'argument principal θ .
 Exprimer en fonction de θ l'argument principal des nombres complexes suivants : $-z$; $\bar{z}$; $-\bar{z}$.

2.2. Formes trigonométriques, formes exponentielles d'un nombre complexe non nul

Formes trigonométriques

■ Présentation

z est un nombre complexe non nul, M son point-image, θ un de ses arguments, $a + ib$ sa forme algébrique.

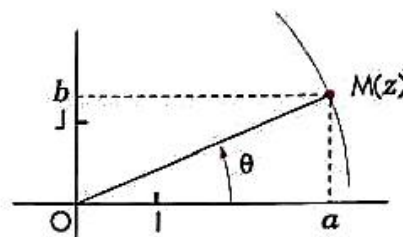
On a : $\vec{OI} \cdot \vec{OM} = a$ et $\vec{OJ} \cdot \vec{OM} = b$

or : $\vec{OI} \cdot \vec{OM} = \|\vec{OI}\| \|\vec{OM}\| \cos(\vec{OI}, \vec{OM}) = OM \cos \theta$

$\vec{OJ} \cdot \vec{OM} = \|\vec{OJ}\| \|\vec{OM}\| \cos(\vec{OJ}, \vec{OM}) = OM \sin \theta$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$$

d'où : $z = OM (\cos + i \sin \theta)$.



Propriété - Définition

Tout nombre complexe non nul z , de module r et d'argument θ peut s'écrire :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

On appelle *forme trigonométrique* du nombre complexe non nul z l'écriture :

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad [r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$$

■ Exemples

Dans chacun des cas suivants, déterminons une forme trigonométrique du nombre complexe z :

$$z = 1 + i$$

$$z = i$$

$$z = 1$$

On a : $|1 + i| = \sqrt{2}$;

$$\text{ARG}(1 + i) = \frac{\pi}{4} ;$$

donc : $1 + i = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

On a : $|i| = 1$;

$$\text{ARG}(i) = \frac{\pi}{2} ;$$

donc : $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

On a : $|1| = 1$;

$$\text{ARG}(1) = 0 ;$$

donc : $1 = \cos 0 + i \sin 0$.

Remarquons que le nombre complexe $-2(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ [$\alpha \in \mathbb{R}$], n'est pas écrit sous forme trigonométrique. En effet : $-2 \notin \mathbb{R}_+^*$.

On a : $-2(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 2(-\cos \alpha - i \sin \alpha) = 2(\cos(\alpha + \pi) + i \sin(\alpha + \pi))$.

Forme algébrique - Formes trigonométriques

■ Passage d'une forme à l'autre

Forme algébrique
$z = a + ib \quad [(a ; b) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}]$

Détermination du module r et d'un argument θ
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ θ est une solution du système : $\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

Formes trigonométriques
$r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad [r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$

Formes trigonométriques
$r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad [r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$

Détermination de la partie réel a et de la partie imaginaire b
$a = r \cos \theta$ $b = r \sin \theta$

Forme algébrique
$z = a + ib \quad [(a ; b) \in \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}]$

■ Exemples

Dans chacun des cas suivants, écrivons le nombre complexe non nul z sous forme trigonométrique :

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z = -\sqrt{3} + 3i$$

$$z = 1 - i$$

On a : $r = \sqrt{4} = 2$

$$z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

θ est une solution du système :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

donc : $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

On a : $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$z = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

θ est une solution du système :

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

donc : $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

On a : $r = \sqrt{2}$

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

θ est une solution du système :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

donc : $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Formes exponentielles

■ Présentation

– On pose :

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

– Considérons un nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ , on peut donc écrire :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

– Nous verrons que cette notation est cohérente avec les propriétés des puissances et la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul ($e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$).

Propriété – Définition

Tout nombre complexe non nul z , de module r et d'argument θ peut s'écrire :

$$z = re^{i\theta}$$

On appelle *forme exponentielle* du nombre complexe non nul z l'écriture :

$$re^{i\theta} \quad [r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$$

■ Exemples

Dans chacun des cas suivants, déterminons une forme exponentielle du nombre complexe z :

$$z = 1 + i$$

$$z = i$$

$$z = -1$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$$

Information historique

– L'écriture d'un nombre complexe non nul sous forme exponentielle est due à Euler.

Elle facilite les calculs dans $\mathbb{C}$ car elle transforme les règles de calcul sur les produits et les quotients en règles de calcul sur les puissances.

– La formule $e^{i\pi} + 1 = 0$, qui aurait été écrite pour la première fois par Euler, a frappé les imaginations du fait qu'elle lie entre eux, de façon simple, cinq nombres fondamentaux, dont trois (i , e et π) restaient, à l'époque, quelque peu mystérieux.

Leonhard EULER
mathématicien suisse
1707-1783



Propriétés des modules et des arguments

■ Produit, quotient et puissance entière d'un nombre complexe non nul

on donne : $z = r e^{i\theta}$ [$r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$] et $z' = r' e^{i\theta'}$ [$r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta' \in \mathbb{R}$]
 On obtient : $zz' = rr' e^{i(\theta+\theta')}$ $z^n = r^n e^{in\theta}$ [$n \in \mathbb{Z}$]
 $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$

Puisque les nombres réels r et r' sont strictement positifs, il en est de même des nombres réels rr' , $\frac{1}{r}$, r^n .

Par conséquent,

$$\begin{array}{l|l} rr' = |zz'| \text{ et } \theta + \theta' \text{ est un argument de } zz' & r^n = |z|^n \text{ et } n\theta \text{ est un argument de } z^n \\ \frac{1}{r} = \left| \frac{1}{z} \right| \text{ et } -\theta \text{ est un argument de } \frac{1}{z} & \frac{r}{r'} = \left| \frac{z}{z'} \right| \text{ et } \theta - \theta' \text{ est un argument de } \frac{z}{z'} \end{array}$$

On en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' , pour tout nombre entier relatif n ,

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k \times 2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') + k \times 2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k \times 2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n\arg(z) + k \times 2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

■ Exemple

On donne : $z_1 = 5(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$; $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$.

Écrivons sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants : $z_1 z_2$; z_2^4 ; $\frac{1}{z_1}$; $\frac{z_1}{z_2}$.

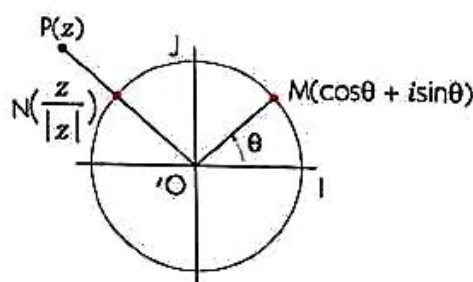
On a : $z_1 z_2 = 5\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})}$; $z_2^4 = 4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{5} e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})}$.

Nombres complexes de module 1

• θ étant un nombre réel, $\cos\theta + i\sin\theta$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

Donc :
$$e^{-i\theta} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

• z étant un nombre complexe non nul, $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1 et de même argument principal que z .



Exercices

2.c Déterminer une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

(1) $1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$ (2) $\frac{1 - \sqrt{3}}{1 - i}$
 (3) $-2(1 + i)$ (4) $(1 - i)e^{i\frac{\pi}{4}}$

2.d Déterminer le module et l'argument principal θ , puis donner une forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants :

5 ; $\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$; $-\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$;
 $\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$; $-2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$.

2.3. Nombres complexes et trigonométrie

Formules de Moivre

Propriété

θ étant un nombre réel et n un nombre entier relatif,

on a : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$; $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$.

On en déduit la propriété suivante.

Formules de Moivre

Pour tout nombre réel θ , pour tout nombre entier relatif n ,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Exemple

θ étant un nombre réel, exprimons $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \cos 4\theta + i\sin 4\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 \\ &= \cos^4\theta + 4\cos^3\theta(i\sin\theta) + 6\cos^2\theta(i\sin\theta)^2 + 4\cos\theta(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4 \\ &= \cos^4\theta + \sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + 4i(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta) \\ \text{donc : } \cos 4\theta &= \cos^4\theta + \sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta & \sin 4\theta &= 4(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta) \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 8\cos^2\theta\sin^2\theta & &= 4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta). \\ &= 1 - 8\cos^2\theta\sin^2\theta = 1 - 8\cos^2\theta + 8\cos^4\theta \end{aligned}$$

Formules d'Euler

Propriété

θ étant un nombre réel, n un nombre entier relatif :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta ; e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta ; e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta ; e^{-in\theta} = \cos n\theta - i\sin n\theta.$$

On en déduit les formules suivantes.

Formules d'Euler

Pour tout nombre réel θ , pour tout nombre entier relatif n ,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} ; \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} ; \cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} ; \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}.$$

Exemple

θ étant un nombre réel, linéarisons $\cos^5\theta$, c'est à dire exprimons $\cos^5\theta$ en fonction de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$, n étant un nombre entier relatif.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \cos\theta &= \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \text{donc : } \cos^5\theta &= \frac{1}{2^5} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^5 \\ &= \frac{1}{2^5} [e^{5i\theta} + 5e^{4i\theta}e^{-i\theta} + 10e^{3i\theta}e^{-2i\theta} + 10e^{2i\theta}e^{-3i\theta} + 5e^{i\theta}e^{-4i\theta} + e^{-5i\theta}] \\ &= \frac{1}{2^5} [(e^{5i\theta} + e^{-5i\theta}) + 5(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 10(e^{i\theta} + e^{-i\theta})] = \frac{1}{2^5} (\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta). \end{aligned}$$

Exercices

- 2.e θ étant un nombre réel, linéariser $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$.
En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^3 x \quad \text{et} \quad g(x) = \sin^3 x.$$

- 2.f θ étant un nombre réel, exprimer $\sin^2 3\theta \cos^2 \theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 3x \cos^2 x$.

- 2.g Démontrer que z étant un nombre complexe de module 1 et d'argument θ , n un nombre entier relatif,

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) ; \sin n\theta = \frac{1}{2i} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right).$$

Utiliser ces formules pour linéariser chacune des expressions trigonométriques suivantes : $\sin^5\theta$ et $\cos^5\theta$.

3

Résolution d'équations

3.1. Racines n^e d'un nombre complexe

Définition

Exemple introductif 1

Utilisons la forme algébrique et la forme trigonométrique pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 = \sqrt{3} + i$.
Comparons les résultats obtenus. Quelle conséquence peut-on en tirer ?

Utilisation de la forme algébrique

On pose : $z = x + iy$

$$\text{d'où : } z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \sqrt{3} + i$$

$$|z|^2 = |\sqrt{3} + i| = 2 = x^2 + y^2$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) revient à résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$(\Sigma) \begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 2 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

(Σ) est équivalent au système :

$$(\Sigma') \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}) \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\text{or : } (1 + \sqrt{3})^2 = 2(2 + \sqrt{3}) ; (1 - \sqrt{3})^2 = 2(2 - \sqrt{3}).$$

(E) a donc deux solutions opposées : z' et z'' .

$$z' = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$$

$$z'' = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i = -z'$$

On remarque que : $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 0$; $-\frac{1 - \sqrt{3}}{2} > 0$; $\cos(\frac{\pi}{12}) > 0$; $\sin(\frac{\pi}{12}) > 0$;

on en déduit que : $z' = z_0$ et $z'' = z_1$

$$\text{donc : } \cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\frac{\pi}{12}) = -\frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Exemple introductif 2

Réolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$.

Remarquons d'une part, que 0 n'est pas solution de l'équation (E), d'autre part, que la forme trigonométrique donne une résolution facile de cette équation, ce qui n'est pas le cas avec la forme algébrique.

Forme trigonométrique de $4\sqrt{2}(-1 + i)$ et de l'inconnue z

$$\text{On a : } 4\sqrt{2}(-1 + i) = 8(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad [r \in \mathbb{R}^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}] \\ z^6 = r^6(\cos 6\alpha + i\sin 6\alpha). \end{cases}$$

Utilisation de la forme trigonométrique

Forme trigonométrique de $\sqrt{3} + i$ et de l'inconnue z

$$\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) revient donc à déterminer tous les nombres réels r et α tels que :

$$r > 0 \text{ et } r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}).$$

On obtient successivement :

$$\begin{cases} r^2 = 2 \text{ et } r > 0 \\ 2\alpha = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \\ r = \sqrt{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres complexes z_k de la forme :

$$z_k = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{12} + k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{12} + k\pi)], [k \in \mathbb{Z}]$$

On obtient deux solutions opposées :

$$z_0 = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})]$$

$$z_1 = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{12} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \pi)] = -z_0$$

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) revient donc à déterminer tous les nombres réels r et α tels que :

$$r > 0 \text{ et } r^6(\cos 6\alpha + i \sin 6\alpha) = 8(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}).$$

On obtient successivement :
$$\begin{cases} r^6 = 8 \text{ et } r > 0 \\ 6\alpha = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = \sqrt[6]{8} \\ \alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{6} \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (E) sont donc les nombres complexes z_k de la forme suivante :

$$z_k = \sqrt[6]{8} [\cos(\frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{6})] \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

- Vérifier que l'équation (E) admet exactement six solutions $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ qui correspondent respectivement aux valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 de k .

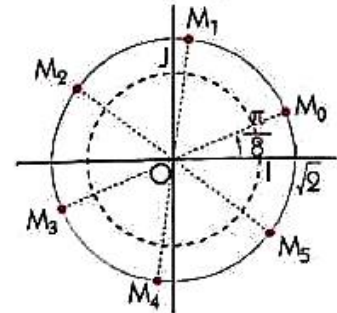
Représentation géométrique des solutions de (E)

Désignons par $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ les points-images des nombres complexes $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$.

$$\text{MES}(\vec{OI}, \vec{OM}_0) = \frac{\pi}{8} ;$$

$$\text{MES}(\vec{OM}_1, \vec{OM}_2) = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{3} ;$$

$$\text{MES}(\vec{OM}_2, \vec{OM}_3) = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{3} ; \text{ etc.}$$



Les points $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

Définition

n étant un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe, on appelle racine n^{e} de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

Recherche des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

n étant un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe, rechercher les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe Z revient à résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^n = Z$.

- Supposons $Z = 0$; 0 est alors l'unique solution de (E).
- Supposons $Z \neq 0$;

Forme trigonométrique de Z et de l'inconnue z

On a : $Z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad [\rho \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}]$

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad [r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}]$$

d'où : $z^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$.

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) revient donc à déterminer tous les nombres réels r et α tels que :

$$r > 0 \text{ et } r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) ;$$

on obtient successivement :
$$\begin{cases} r^n = \rho \text{ et } r > 0 \\ n\alpha = \theta + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres complexes z_k de la forme :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) \right) \quad [k \in \mathbb{Z}].$$

En donnant à k les valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$, n , $n+1$, on vérifie que : $z_n = z_0$; $z_{n+1} = z_1$, ...

Propriétés

n étant un nombre entier naturel non nul,

- 0 est la seule racine n^e de 0,
- tout nombre complexe non nul de forme trigonométrique $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ admet n racines n^e qui sont les différentes valeurs de :

$$\sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) \right) \quad [k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}].$$

Le plan étant muni du repère orthonormé direct (O, I, J) , les points-images des n racines n^e sont sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$.

- Lorsque $n = 2$, les points-images des deux racines carrées sont diamétralement opposés sur $(\mathcal{C})$.
- Lorsque $n > 2$, les points-images des n racines n^e sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$.

Racines cubiques de l'unité

■ Présentation

Calculons et représentons géométriquement les racines cubiques de 1.

On sait que 1 admet trois racines cubiques qui sont solutions de l'équation (E) $z^3 = 1$.
On vérifie que : $|z| = 1$.

Formes trigonométriques de 1 et de l'inconnue z

On a : $1 = \cos 0 + i\sin 0$;
 $z = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad [\alpha \in \mathbb{R}]$.
d'où : $z^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$.

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

Les trois racines cubiques de 1 sont de la forme : $z_k = \left(\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right) \right) \quad [k \in \{0, 1, 2\}]$

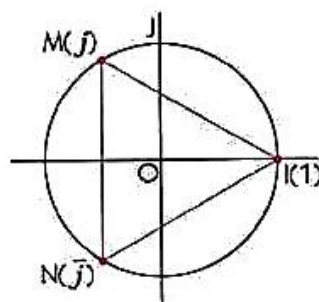
donc : $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

on note : $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$

Les racines cubiques de 1 sont donc : $1, j, \bar{j}$.
On vérifie que : $\bar{j} = j^2$ et $1 + j + \bar{j} = 0$.



■ Exemple

Calculons les racines cubiques de $8i$.

On vérifie que : $-2i$ est une racine cubique de $8i$: $(-2i)^3 = 8i$

or : $z^3 = 8i \Leftrightarrow \left(\frac{z}{-2i}\right)^3 = 1$

donc : z est une racine cubique de $8i \Leftrightarrow \frac{z}{-2i}$ est une racine cubique de 1.

Les racines cubiques de $8i$ sont donc : $-2i$; $-2i \times j$; $-2i \times \bar{j}$.

Exercices

3.a Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 1$.

- | | | | |
|-----|-----------------|-----|-----------|
| (1) | $1 + i$ | (2) | $-4i$ |
| (3) | $1 - i\sqrt{3}$ | (4) | $7 + 24i$ |

3.b Quel est le nombre complexe z dont le carré est égal à son inverse ?

3.d Déterminer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

3.c Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- | | | | |
|-----|-----------------|-----|-----------|
| (1) | $1 + i$ | (2) | $-4i$ |
| (3) | $1 - i\sqrt{3}$ | (4) | $7 + 24i$ |

3.2. Résolution de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Étude du cas général

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) du second degré associé au polynôme $P(z)$, de discriminant Δ :

$$(E) \quad az^2 + bz + c = 0 \quad ; \quad P(z) = az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad ; \quad \Delta = b^2 - 4ac$$



Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, on peut procéder comme suit,

- On calcule le discriminant Δ
- On détermine les racines carrées de Δ suivant que Δ est réel ou non,
- On calcule les solutions.

Plus généralement, on obtient les résultats consignés dans le tableau récapitulatif suivant :

TABEAU RÉCAPITULATIF

	$\Delta \in \mathbb{R}$			$\Delta \notin \mathbb{R}$	Nature de Δ
	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta \neq 0$	
(E) $az^2 + bz + c = 0$ $a \neq 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$	Δ admet une seule racine carrée 0	Δ admet deux racines carrées opposées : $\sqrt{\Delta} ; -\sqrt{\Delta}$	Δ admet deux racines carrées opposées : $i\sqrt{\Delta} ; -i\sqrt{\Delta}$	Δ admet deux racines carrées opposées : $\delta ; -\delta$	Racines carrées de Δ
	(E) admet une solution double : $-\frac{b}{2a}$	(E) admet deux solutions : $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	(E) admet deux solutions : $\frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$	(E) admet deux solutions : $\frac{-b - \delta}{2a}$ $\frac{-b + \delta}{2a}$	Solutions de (E)

Exemples

Réolvons dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes : (1) $z^2 + 4 = 0$; (2) $z^2 + (2 + 3i)z - 2(1 - 2i) = 0$.

• Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1)

Factorisation du premier membre

$$(1) \quad z^2 + 4 = 0$$

$$(z - 2i)(z + 2i) = 0$$

Détermination des solutions

$$z_1 = 2i ; z_2 = -2i$$

• Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (2)

Calcul du discriminant Δ

$$\Delta = 3 - 4i$$

Calcul des racines carrées du discriminant

Le discriminant est un nombre complexe non nul, il admet donc deux racines carrées, solutions de l'équation : (E) $\delta^2 = 3 - 4i$

On pose : $\delta = x + iy$ $[(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$

$$\text{d'où : } \delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i$$

$$\text{or : } |\delta^2| = |3 - 4i| = 5 = x^2 + y^2$$

Résoudre l'équation (E) revient à résoudre dans

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ le système : } (\Sigma) \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

$$(\Sigma) \text{ est équivalent au système : } (\Sigma') \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

donc : $x = 2$ et $y = -1$; $x = -2$ et $y = 1$.

Les deux racines carrées du discriminant sont :

$$(2 - i) ; -(2 - i).$$

Calcul des solutions de l'équation (2)

$$z_1 = \frac{-(2 + 3i) + (2 - i)}{2} = -2i$$

$$z_2 = \frac{-(2 + 3i) - (2 - i)}{2} = -2 - i$$

Exercices

3.d Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(1) \quad z^2 - 5z + 9 = 0 \quad (2) \quad z^2 - z - 2 = 0$$

$$(3) \quad z^2 - 6z + 9 = 0 \quad (4) \quad z^2 + iz + 1 + 3i = 0$$

3.e Calculer $(1 - i)^2$. En déduire la factorisation de $z^2 + 2i$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2i = 0$.

TP Formules d'Euler et calcul trigonométrique

Dans le cours, nous avons utilisé les formules d'Euler pour linéariser certaines expressions trigonométriques, c'est-à-dire transformer un produit du type $\cos^p x \sin^q x$, (avec p et q éléments de $\mathbb{N}$) en une somme de termes du type : $a \cos \alpha x$ ou $b \sin \beta x$.

Ce TP a pour objectif de présenter des exemples d'utilisation des formules d'Euler à d'autres calculs trigonométriques.

■ Exercice commenté 1

n est un nombre entier naturel supérieur à 1.

On pose :

$$S_n = 1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \left(\frac{2(n-1)\pi}{n} \right)$$

$$S'_n = \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \left(\frac{2(n-1)\pi}{n} \right)$$

Calculer S_n et S'_n .

Les termes des sommes S_n et S'_n suggèrent de calculer l'expression $S_n + iS'_n$ pour faire apparaître des expressions du type e^{ix} .

On a : $S_n + iS'_n = 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + \dots + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$

posons : $q = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

d'où : $S_n + iS'_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$

$S_n + iS'_n$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique (complexe) de premier terme 1 et de raison q différent de 1.

donc : $S_n + iS'_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0.$

Pour tout nombre entier naturel n supérieur à 1 :

$$1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \left(\frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = 0$$

$$\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \left(\frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = 0$$

Application

– Examiner les résultats obtenus avec S_n et S'_n en donnant à n les valeurs 2, 3, 4, ...
En déduire des formules trigonométriques.

– Pour $n = 5$,
on pourra exprimer les termes de la somme S_5 en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ et conclure.

De même, exprimer les termes de la somme S'_5 en fonction de $\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5}$ et conclure.

Exercices commentés

α est un nombre réel élément de $]0; \pi[$.
Déterminer le module et un argument de :

$$1 - e^{i\alpha} ; \quad 1 + e^{i\alpha}.$$

En déduire le module et un argument de :

$$\frac{1 - e^{i\alpha}}{1 + e^{i\alpha}} ; \quad (1 - e^{i\alpha})(1 + e^{i\alpha}).$$

On a vu que la mise en facteur de $e^{\frac{i\alpha}{2}}$ dans l'expression $1 - e^{i\alpha}$ utilise les formules d'Euler.

Factorisation de $1 - e^{i\alpha}$ et de $1 + e^{i\alpha}$

Soit α un nombre réel,

$$1 - e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}} \left(e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}} \right) = -2ie^{\frac{i\alpha}{2}} \times \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{2i}$$

$$1 + e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}} \left(e^{-\frac{i\alpha}{2}} + e^{\frac{i\alpha}{2}} \right) = 2e^{\frac{i\alpha}{2}} \times \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}} + e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{2}$$

Par conséquent,

Pour tout nombre réel α ,

$$1 - e^{i\alpha} = -2ie^{\frac{i\alpha}{2}} \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 + e^{i\alpha} = 2e^{\frac{i\alpha}{2}} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Calcul du module

$$\text{On a : } |1 - e^{i\alpha}| = |-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)| \times |i| \times |e^{\frac{i\alpha}{2}}| = 2$$

$$|1 + e^{i\alpha}| = |2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)| \times |e^{\frac{i\alpha}{2}}| = 2$$

Par conséquent,

$$\left| \frac{1 - e^{i\alpha}}{1 + e^{i\alpha}} \right| = 1 ; \quad |(1 - e^{i\alpha})(1 + e^{i\alpha})| = 4.$$

Détermination d'un argument

$$\arg(1 - e^{i\alpha}) = \arg\left[-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] + \arg(i) + \arg\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\right) + k2\pi$$

$$[k \in \mathbb{Z}]$$

$$\arg(1 + e^{i\alpha}) = \arg\left[2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] + \arg\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\right) + k2\pi$$

$$[k \in \mathbb{Z}].$$

$\frac{\alpha}{2}$ est un élément de $]0; \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\arg(1 - e^{i\alpha}) = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} + k \times 2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\arg(1 + e^{i\alpha}) = 0 + \frac{\alpha}{2} + k \times 2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}].$$

Par conséquent,

$$\arg(1 - e^{i\alpha}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} + k \times 2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\arg(1 + e^{i\alpha}) = \frac{\alpha}{2} + k \times 2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

x est un nombre réel différent de $k \times 2\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$],
 n est un nombre entier naturel supérieur à 1.

On pose :

$$S_n = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$$

$$S'_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$$

Factoriser S_n et S'_n .

Calcul de $S_n + iS'_n$

$$\text{On a : } S_n + iS'_n = 1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{inx}$$

$$\text{or : } e^{ix} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\text{d'où : } S_n + iS'_n = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

Pour déterminer la valeur de S_n et celle de S'_n à partir de cette égalité, il faut écrire $\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$ sous forme algébrique.

- Une première méthode consiste à multiplier numérateur et dénominateur de ce quotient par le conjugué du dénominateur.

Ici cette méthode paraît fastidieuse !

- Une deuxième méthode consiste à factoriser directement le numérateur et le dénominateur de ce quotient puis à procéder à une simplification d'écriture.

Simplification d'écriture de $S_n + iS'_n$

On obtient :

$$\begin{aligned} S_n + iS'_n &= \frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \left(e^{-\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \right)}{e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}} \right)} \\ &= e^{\frac{inx}{2}} \times \frac{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} \times \frac{2i}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} \\ &= \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Conclusion

Pour tout nombre entier naturel n supérieur à 1,
pour tout nombre réel x différent de $k2\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$],

$$\begin{aligned} 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx &= \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx &= \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Nombre complexe – Forme algébrique

Somme – produit

1 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous :

$$(1) (2-i)(3+i) \quad (2) (4+3i)(2-5i)$$

$$(3) 3i(5-2i) \quad (4) (2+i)^2$$

2 Donner la forme algébrique de chacun des nombres suivants :

$$(1) z + z' \quad (2) z - z'$$

$$(3) 4z - 3z' \quad (4) zz'$$

sachant que : $z = 2 - 5i$ et $z' = -3 + 4i$.

3 Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes définis ci-dessous :

$$z_1 = (2 + i\sqrt{3})(1+i) \quad z_7 = \left(\frac{1}{2} - i\right)(12+i)$$

$$z_2 = (2-5i)^2 \quad z_8 = \left(\frac{5}{3}i - 7\right)(1-2i)$$

$$z_3 = \left(\frac{1}{2} - 3i\right)^2 \quad z_9 = (i-2)^2 + (3+4i)$$

$$z_4 = (3+4i)(3-4i) \quad z_{10} = \sqrt{2} + i + 2\sqrt{2} - 3i^2$$

$$z_5 = (1-i)(5+8i)(1-i) \quad z_{11} = (1+3i) + (2-i)$$

$$z_6 = (4+3i)3 \quad z_{12} = (5-i)(7+4i)$$

4 On donne $z_1 = \frac{5-i}{3+2i}$ et $z_2 = \frac{5+i}{3-2i}$.
Vérifier que $z_1 + z_2$ est réel, et $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

Module – conjugué

5 Déterminer le module de chacun des nombres complexes définis ci-dessous.

$$(1) 1-3i \quad (2) 3+4i \quad (3) 1-7i \quad (4) 5+3i$$

$$(5) 1-5i \quad (6) 3+4i \quad (7) -1+i\sqrt{2}$$

6 Dans chacun des cas suivants, déterminer, puis construire, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

$$(1) |z-2| = |z+i| \quad (2) |iz+3| = |z+4+i|$$

$$(3) \left|\bar{z} + \frac{1}{3}i\right| = 3 \quad (4) |1+iz| = 2.$$

7 Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer le module et le conjugué.

$$(1) (\sqrt{2} + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i\sqrt{5})(\sqrt{2} + i\sqrt{5})$$

$$(2) \frac{1+i}{1-i} \quad (3) \frac{3-2i}{2-3i} \quad (4) \frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}$$

Inverse – Quotient

8 Écrire sous forme algébrique l'inverse de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1-i \quad z_2 = \sqrt{3}+2i$$

$$z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_4 = 2-7i$$

10 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous :

$$(1) \frac{1+i}{1-i} \quad (2) \frac{2+3i}{5+3i} (2-3i)$$

11 On donne $z_1 = 2-3i$ et $z_2 = 5+i$.
Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$(1) z_1 - z_2^2 \quad (2) \frac{z_1}{z_2} \quad (3) \frac{z_2}{z_1} \quad (4) \frac{z_1-1}{z_2-4i}$$

12 Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes donnés :

$$z_1 = \frac{8i-1}{2-3i} \quad z_2 = 2i - \frac{5}{i}$$

$$z_3 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 \quad z_4 = \frac{4-i}{2+3i} - \frac{i}{3+i}$$

Nombre complexe et représentation géométrique

13 Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) . A est le point d'affixe z_A et OAB est un triangle isocèle de sommet O, tel que :

$$\arg(\vec{OA}, \vec{OB}) = \theta + k2\pi, [k \in \mathbb{Z}].$$

Faire la figure et déterminer l'affixe de B dans chacun des cas suivants :

$$(1) z_A = 3+2i, \theta = \frac{5\pi}{6} \quad (2) z_A = 5, \theta = -\frac{7\pi}{3}$$

$$(3) z_A = 4i-5, \theta = \frac{13\pi}{3} \quad (4) z_A = 1-i, \theta = \frac{7\pi}{2}$$

14 On considère les points A, B et C d'affixes définies ci-dessous :

$$z_A = 1+i, z_B = 2-i \text{ et } z_C = 2-2i.$$

Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

15 On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1; -3)$, $(4; 5)$ et $(-3; 2)$.

1. Quelles sont les affixes des points A, B et C et des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$?

2. On définit les points D et E par :

$$\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC} \text{ et } 3\vec{BE} = \vec{BC}.$$

Déterminer l'affixe de chacun des points D et E.

3. Démontrer que A, D et E sont alignés.

16 1. Dans le plan complexe, placer les points A, B, C et D d'affixes définies ci-dessous :

$$z_A = \frac{3}{2}i, z_B = 2 + \frac{1}{2}i, z_C = 1 - \frac{3}{2}i, z_D = -1 - \frac{1}{2}i.$$

2. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

17 Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z pour que :

$$(1) z - \frac{9}{z} \in \mathbb{R} \quad (2) \frac{z+4}{z-i} + 2 \in \mathbb{R}$$

$$(3) \frac{z+2}{z-5} - 3 \in \mathbb{R} \quad (4) z + \bar{z} - 1 = |z|$$

$$(5) z + \bar{z} = |z|^2 - 1 \quad (6) |z|^2 + z + \bar{z} = 8.$$

(7) Les points d'affixes i , z et iz sont alignés.

$$(8) |z-2| = |4-3i| \quad (9) \frac{|z-12|}{|z-8i|} = \frac{5}{3}$$

Forme trigonométrique - notation exponentielle

Argument

18 Déterminer un argument de chacun des nombres complexes définis par :

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i & z_2 &= i \\ z_3 &= \sqrt{6} - i\sqrt{2} & z_4 &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_5 &= (2 - 2i)(1 - i) & z_6 &= i(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) \end{aligned}$$

19 Déterminer un argument de chacun des nombres complexes définis par :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{3} + i}{2i} & z_2 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \\ z_3 &= (-1 - i)^4 & z_4 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{1 + i}\right)^4 \end{aligned}$$

20 α est un nombre réel tel que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. On donne le nombre complexe X défini par : $X = \sin 2\alpha - 2i \sin^2 \alpha$.

- Déterminer le module de X .
- Déterminer un argument de X si possible.

Forme trigonométrique

21 Écrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants et représenter dans le plan complexe les points images.

$$\begin{aligned} (1) & -4 + 4i & (2) & 1 - i\sqrt{3} & (3) & -3 - i\sqrt{3} \\ (4) & -7i - 10 & (5) & 1 + i & (6) & 2 - \sqrt{3} - i \\ (7) & (1 - i)(\sqrt{3} + i) & (8) & (\sqrt{3} + i)^3 \end{aligned}$$

22 On donne $z = (1 + i)(1 - i\sqrt{3})$. Calculer z . Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$(1) \quad 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}) \quad (2) \quad \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}$$

23 On donne $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calculer z^{10} .

24 Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2, z définie par :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} ; \quad z_2 = 1 - i ; \quad z = \frac{z_1}{z_2}$$

En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

25 On pose : $a = \sqrt{2}(1 + i)$, $b = \sqrt{3} + i$, $c = a^2 b$.

- Déterminer le module et un argument pour chacun des nombres complexes a et b . En déduire le module et un argument de c .
- Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

D'après BAC D Maur 98

26 On donne les deux nombres complexes définis ci-dessous :

$$z_1 = -1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Écrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
- En déduire le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
- Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

Forme exponentielle

27 Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes définis ci-dessous :

$$\begin{aligned} z_1 &= 5 - 5i & z_2 &= 2 + 2i\sqrt{3} \\ z_3 &= (\sqrt{3} + i)(-1 + \sqrt{3}) & z_4 &= (-1 - i)i \end{aligned}$$

28 On donne $z = \sqrt{3} + i$.

Écrire z sous forme exponentielle. En déduire z^{1998} .

29 On considère les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 définis ci-dessous

$$z_1 = -\sqrt{2}, \quad z_2 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_3 = 1 - i$$

- Déterminer un nombre réel θ tel que $z_2 = e^{i\theta} z_1$. Interpréter géométriquement ce résultat.
- a) Calculer $z_2 - z_1$ et $z_3 - z_1$ en fonction de z_1 et $e^{i\theta}$.
b) Donner le module et un argument du nombre réel X

$$\text{défini par : } X = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

Nombre complexe et trigonométrie

30 Écrire $f(x)$ sous forme de produit dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned} (1) & f(x) = \sin^2 2x - \sin^2 3x \\ (2) & f(x) = \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(2x + \pi) \\ (3) & f(x) = \cos^2 x - \sin^2 4x \\ (4) & f(x) = 1 - \cos 3x + 2\sin \frac{3x}{2} \\ (5) & f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x \\ (6) & f(x) = \sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x \end{aligned}$$

31 Linéariser chacune des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} (1) & \cos^4 x & (2) & \sin^5 x & (3) & \cos^3 2x \\ (4) & \sin^3 \frac{x}{2} & (5) & \cos^2 x + \sin^3 x & (6) & \cos^3 x \sin^3 x \end{aligned}$$

32 Développer : $(\cos x + i \sin x)^3$. En déduire les expressions de $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

33 Calculer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ pour tout nombre réel x :

$$(1) \cos 4x \quad (2) \sin 7x \quad (3) \sin 4x \quad (4) \cos 6x$$

Résolution d'équations

34 Quel est le nombre complexe dont le carré est égal à son inverse ?

35 1. Vérifier que $(1 + i)^8$ est un nombre réel.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (1) & 2iz - 3 = z + i \\ (2) & 3z(z + i) = -iz \\ (3) & 3z - 5 + 2iz = 2i - 3z + 4iz \\ (4) & -i(1 + 5i)z + (z - 1)(i - 2) - 2 = 3z - i \end{aligned}$$

36 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$$(1) -z^2 + 4z - 53 = 0 \quad (2) z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

37 Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, les équations suivantes d'inconnue z :

$$\begin{aligned} (1) & 2\bar{z} = i - 4 & (2) & \bar{z} - 2i = 2 - 3i \\ (3) & -2z + i\bar{z} = 3 & (4) & (3z + i)(\bar{z} - 1 + 2i) = 0 \end{aligned}$$

38 On considère l'équation :

$$(E) (6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i) = 0.$$

Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle.

Résoudre l'équation (E).

39 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z + 3i - 1 = 0.$$

Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure. Soit z_0 cette solution.

Résoudre l'équation (E).

40 a est un élément de $[0; \pi]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) z^2 - 2z \sin^2 a + \sin^2 a = 0.$$

2. Préciser le module et un argument (lorsqu'il en existe) des solutions de (E).

41 1. Déterminer, sous forme algébrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : (E) $z^2 + z + 1 = 0$.

2. On note j la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive. Vérifier que : $j^2 = -j - 1$.

3. Vérifier que $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$ et que $j^3 = 1$.

42 a un réel appartenant à $[-\pi; \pi]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z \sin a + 4 = 0$.

Désignons par z_1 et z_2 les deux solutions de cette équation. Calculer le module et un argument de chacune d'elles.

2. Calculer : $S = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ et $S' = z_1^4 + z_2^4$.

Bac D, Poitiers 1981

43 On considère l'équation :

$$(E) z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0.$$

1. Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (on notera z_3 la troisième solution).

3. Démontrer que les points images des solutions de l'équation (E) sont alignés.

44 On donne les nombres complexes z et u définis par :

$$z = -8\sqrt{3} + 8i$$

$$u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

1. Écrire le nombre complexe z sous forme trigonométrique.

Déterminer les racines carrées de z sous la forme trigonométrique.

2. Calculer u^2 .

Utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de z sous leur forme algébrique.

En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$.

45 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$-\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) - 13 = 0.$$

(On posera $Z = \frac{z-3i}{z+2}$ et on résoudra $-Z^2 + 6Z - 13 = 0$.)

46 Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 - 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right) - 2 = 0.$$

47 On considère l'équation :

$$(E) z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z = 16.$$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout nombre complexe z ,

$$z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16 = (z^2 + 4)(z^2 + az + b).$$

2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

48 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$(1) \begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ -2z_1 + 3iz_2 = 17 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} iz_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = -1 \\ 2z_1 + z_2 = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

49 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes suivants :

$$(1) \begin{cases} z_1 z_2 = 17 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2z_1 z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 z_2 = \frac{37}{4} \end{cases}$$

PROBLÈMES

50 On considère une suite géométrique de nombres réels dont le premier terme est 1 et la raison est q ($q \neq 1$).

1. Calculer la somme $1 + q + q^2 + q^3 + q^4$.

2. a) z étant un nombre complexe différent de 1, calculer la somme $Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

b) On suppose dans cette question que :

$$z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}.$$

Déduire les valeurs de :

$$X = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$$

et

$$Y = \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5}.$$

51 Calculer : $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{1999}$

et $S' = 1 - i + i^2 + \dots + (-i)^{1999}$.

52 On considère le nombre complexe :

$$z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1).$$

1. Déterminer le module et un argument de z^2 .

En déduire le module et un argument de z .

2. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) (\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{2}.$$

Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

53 On considère le nombre complexe z défini par :

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}.$$

Calculer de deux façons différentes z .

En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

54 1. On donne les points B et C d'affixes définies ci-dessous.

$$z_B = 2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_C = 2 - 2i\sqrt{3}.$$

Vérifier que B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

2. On considère le point A d'affixe définie par :

$$z_A = \frac{z_C - z_B}{2}.$$

Calculer z_A .

3. Déterminer la nature du triangle ABC.

55 z est un nombre complexe différent de 1.
1. Calculer le nombre complexe Z défini par :

$$Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4.$$

2. On suppose maintenant que :

$$z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}.$$

Déduire les valeurs des nombres ci-dessous :

$$X = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}.$$

$$Y = \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5}.$$

56 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes ci-dessous :

a) $(1 + i\sqrt{3})^{10}$ b) $(1 - i)^{12} (\sqrt{3} - 3i)$.

(3) $\left(\frac{3 - 2i}{-2 - 3i}\right)^{12}$ (4) $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}\right)^{20}$

57 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\bar{z} = 0$.
2. Le plan étant rapporté au repère orthonormé (O, I, J) , O, A, B, C sont les images des solutions obtenues. Représenter O, A, B, C et montrer que A, B, C sont situés sur un cercle.

D'après Bac

58 On considère le nombre complexe a défini par :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} (1 + i).$$

1. Déterminer le module du nombre complexe $a - 1$.
2. On considère la suite (z_n) définie par : $z_0 = 1$, et pour tout nombre entier n strictement supérieur à 0, $z_n = a^n$.

On désigne par M_n le point d'affixe z_n .
Placer dans le plan complexe les points $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$ (unité : 5 cm).

3. Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = |z_n - z_{n-1}|.$$

Vérifier que : $u_n = |a|^{n-1} |a - 1|$.

Démontrer que la suite (u_n) de terme général u_n est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_1 et la raison.

4. a) Calculer la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ notée S_n .

59 1. Vérifier que $(1 + i)^2 = 2i$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 2i$.

2. Déterminer toutes les suites géométriques (u_n) telles

que : $u_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u_4 = -\sqrt{3} + i$.

On considère celle de ces suites dont la raison a une partie réelle positive. Calculer u_{10} donner son module, un arguments et sa forme algébrique.

60 1. Linéariser : $\sin^2 3\theta \cos^2 \theta$.

2. Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta \cos^2 \theta d\theta$.

D'après Bac

61 1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution.

b) Donner un argument et le module de chacune des solutions z_1 et z_2 , puis écrire ces deux nombres sous forme algébrique.

2. a) Placer dans le plan complexe les points A, B, A' et B' d'affixes respectives :

$$1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}, -2 + 2i\sqrt{3} \text{ et } -2 - 2i\sqrt{3}.$$

b) Déterminer la nature du quadrilatère $AA'B'B$.

c) Montrer que le triangle $AA'B'$ est rectangle et qu'il en est de même du triangle $BB'A'$.

62 1. Le polynôme P est tel que : pour tout z ,

$$P(z) = z^3 + (-9 + 4\sqrt{3})z^2 + (43 - 24\sqrt{3})z - 75 + 36\sqrt{3}.$$

a) Vérifier que : $P(3) = 0$.

b) Déterminer les nombres réels α et β tels que :

$$\text{pour tout } z \text{ de } \mathbb{C} : P(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta).$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. On désigne par U, V et W les points du plan complexe d'affixes définies respectivement par :

$$U = 3 - 2\sqrt{3} + 2i, V = 3 - 2\sqrt{3} - 2i, W = 3.$$

a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{V - W}{U - W}$.

b) En déduire la nature du triangle UVW .

D'après Bac

63 On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8.$$

1. Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$, $\bar{z}$ étant le conjugué de z et $\overline{P(z)}$ le conjugué de $P(z)$.

Calculer $P(i)$.

En déduire une, puis deux solutions de l'équation :

$$(E) P(z) = 0.$$

2. Mettre $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficient réels.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Calculer la somme et le produit des solutions de l'équation (E).

D'après Bac

64 Déterminer les nombres complexes z tels que les points A, A' et A'' d'affixes respectives $z, \frac{1}{z}$ et $z - 1$ soient sur un même cercle de centre O .

65 z est un nombre complexe différent de 1. On considère le nombre complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z - 2}{2z - 1}.$$

1. a) Déterminer la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe Z en fonction de la partie réelle x et de la partie imaginaire y du nombre complexe z .

b) Dans le plan complexe, construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

Z soit un nombre réel ;

Z soit un nombre imaginaire pur.

2. a) Démontrer que, si le module de z est égal à 1, alors les modules des nombres $z - 2$ et $2z - 1$ sont égaux.

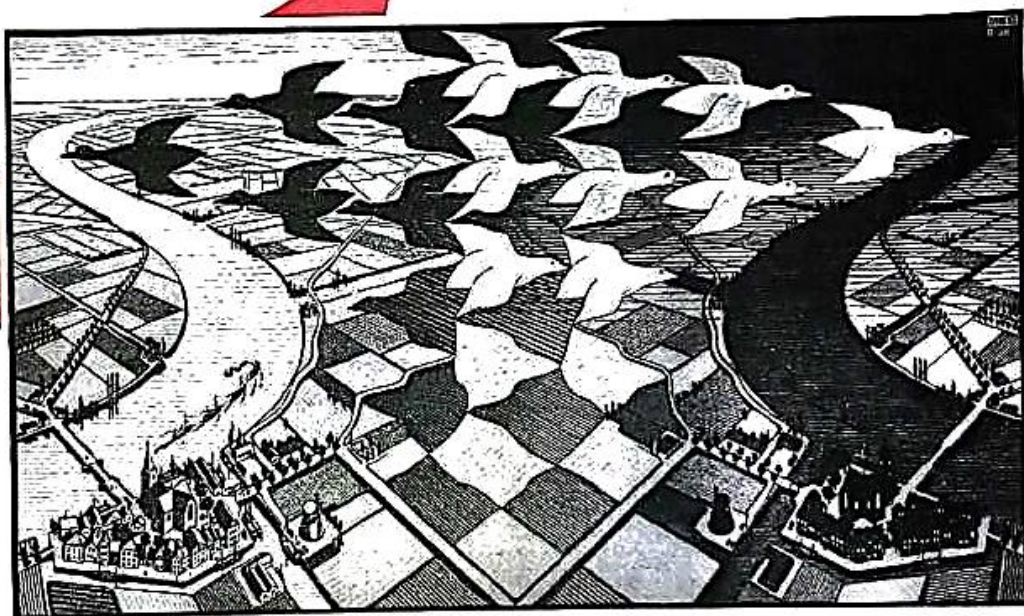
b) Dans la suite on suppose que le module de z est égal à 1. θ et ϕ désignent argument respectifs de z et Z .

Calculer $\cos \phi$ et $\sin \phi$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Nombres complexes et géométrie

Ce beau tableau d'Escher présente l'envol d'oiseaux blancs et d'oiseaux noirs issus, par des transformations successives, de carrés blancs et de carrés noirs.

Ces transformations du plan peuvent-elles être associées à des bijections dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes ?



Day and night, par Escher.

SOMMAIRE

1. Nombres complexes et configurations du plan 230
2. Nombres complexes et transformations du plan 232

1

Nombres complexes et configurations du plan

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J)

1.1. Vecteurs du plan – Angle orienté de vecteurs

Vecteurs du plan

- A et B sont deux points du plan.

Les points A et B sont repérés par :

- leurs coordonnées : $(x_A; y_A); (x_B; y_B)$
- leurs affixes : $z_A; z_B$

Le vecteur $\vec{AB}$ est repéré par :

- ses coordonnées : $(x_B - x_A; y_B - y_A)$
- son affixe : $z_{\vec{AB}}$

de plus on a : $AB = \|\vec{AB}\| = |z_{\vec{AB}}|$

; donc

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A; AB = |z_B - z_A|$$

- A et B étant deux points du plan, il existe un unique point M tel que : $\vec{AB} = \vec{OM}$

donc : $(\vec{OI}, \vec{AB}) = (\vec{OI}, \vec{OM})$

$$\begin{aligned} \text{mes}(\vec{OI}, \vec{AB}) &= \text{mes}(\vec{OI}, \vec{OM}) + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \\ &= \arg(z_M) + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{aligned}$$

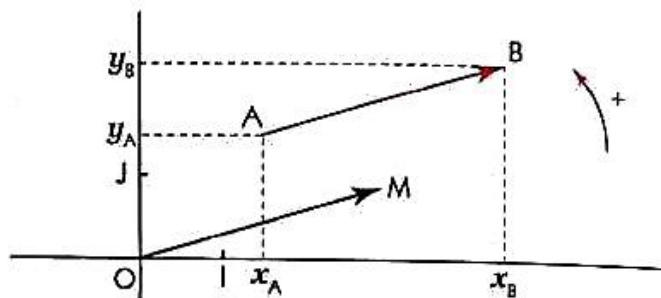
or :

$$z_M = z_{\vec{OM}} = z_{\vec{AB}}$$

donc :

$$\text{mes}(\vec{OI}, \vec{AB}) = \arg(z_{\vec{AB}}) + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\text{mes}(\vec{OI}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$



Angle orienté de vecteurs

A, B, C, D sont quatre points du plan.

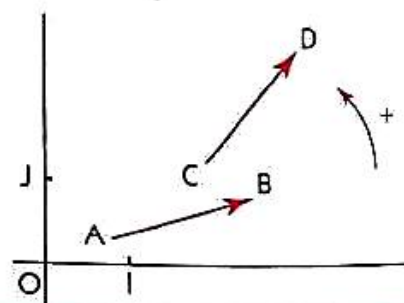
On a : $(\vec{AB}, \vec{CD}) = (\vec{OI}, \vec{CD}) - (\vec{OI}, \vec{AB})$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \text{mes}(\vec{AB}, \vec{CD}) &= \text{mes}(\vec{OI}, \vec{CD}) - \text{mes}(\vec{OI}, \vec{AB}) + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \\ &= \arg(z_{\vec{CD}}) - \arg(z_{\vec{AB}}) + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{aligned}$$

donc :

$$\text{mes}(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg \frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}} + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\text{mes}(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$



Exemple

A, B, C, D étant des points d'affixes respectives : $\sqrt{3} + 2i$; $\sqrt{3} + i$; $-2i$; $1 - i$,
calculons $\text{mes}(\vec{AB}, \vec{CD})$.

$$\text{On a : } \frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}} = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{1 + i}{-i} = -1 + i$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \text{mes}(\vec{AB}, \vec{CD}) &= \arg(1 - i) + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \\ &= -\frac{\pi}{4} + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]. \end{aligned}$$

1.2. Quelques configurations de base

■ Égalité de vecteurs

A, B, C, D étant des points du plan,

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow z_{\vec{AB}} = z_{\vec{CD}}$$

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C$$

Exemple

A, B, C, D étant des points d'affixes respectives $-\sqrt{3} + 3i$; $2i$; $-i$; $\sqrt{3} - 2i$.

Démontrons que ABCD est un parallélogramme.

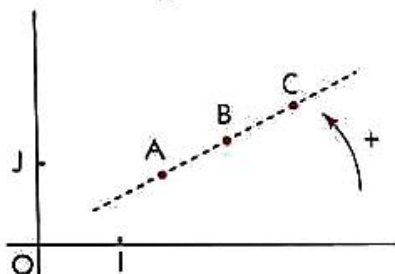
On a : $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = 2i - (-\sqrt{3} + 3i) = \sqrt{3} - i$

$z_{\vec{CD}} = z_D - z_C = (\sqrt{3} - 2i) - (-i) = \sqrt{3} - i$

donc : $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{CD}}$

d'où : $\vec{AB} = \vec{DC}$.

■ Alignement de trois points



$$\left[\begin{array}{l} \text{Trois points} \\ \text{distincts} \\ A, B, C \\ \text{sont alignés} \end{array} \right] \Leftrightarrow \text{mes}(\vec{AB}, \vec{AC}) = k\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_{\vec{AC}}}{z_{\vec{AB}}} = k\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Trois points distincts} \\ A, B, C \text{ sont alignés} \end{array} \right] \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$$

Exemple

A, B, C étant des points d'affixes respectives $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$, démontrons que les points A, B, C sont alignés.

On a : $\frac{z_{\vec{AC}}}{z_{\vec{AB}}} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-9 - 12i}{3 + 4i} = -3$

■ Égalité de distances

A, B, C, D étant des points du plan,

$$AB = CD \Leftrightarrow |z_{\vec{AB}}| = |z_{\vec{CD}}|$$

$$AB = CD \Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_D - z_C|$$

Exemple

A, B, C étant des points d'affixes respectives $-i$; $1 + i$; $1 - 3i$, démontrons que le triangle ABC est isocèle en A.

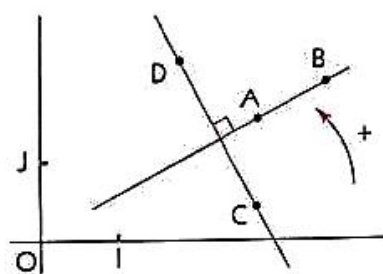
On a : $AB = |z_B - z_A| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$

$AC = |z_C - z_A| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$

donc : $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$

d'où : $AB = CD$.

■ Orthogonalité de deux droites



$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \text{mes}(\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_{\vec{CD}}}{z_{\vec{AB}}} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

Exemple

A, B, C étant des points d'affixes respectives $-1 - i$; $4 + i$; $-2 + 1,5i$, démontrons que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

On a : $\frac{z_{\vec{AC}}}{z_{\vec{AB}}} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 + 2,5i}{5 + 2i} = \frac{14,5}{29} i$

Exercices

- 1.a Le plan est muni du repère (O, I, J). On considère deux points A et B d'affixes respectives $1 + i$ et $-1 + i\sqrt{3}$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z_M tel que les points A, B, M soient alignés.

- 1.b Le plan est muni du repère (O, I, J). On considère deux points A et B d'affixes respectives $1 + 2i$ et $4 + 5i$.

Déterminer l'affixe z_C du point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A.

- 1.c A, B, C étant des points d'affixes respectives $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$; $2i$, démontrons que A, B, C sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

2

Nombres complexes et transformations du plan

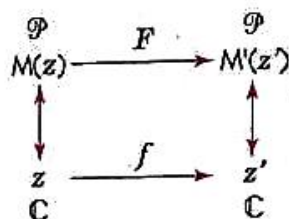
Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) .

2.1. Transformations élémentaires du plan

Transformations du plan et bijection de $\mathbb{C}$

On sait que l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{C}$ qui à un point fait correspondre son affixe est une bijection.

On en déduit les schémas ci-contre et le vocabulaire suivant.



Vocabulaire

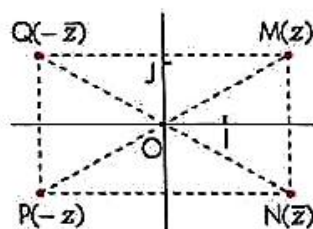
On dit que la transformation $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$
 $M(z) \mapsto M'(z')$

ou $\begin{cases} \text{a pour bijection complexe associée } f: & \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ & z \mapsto z' \\ \text{a pour écriture complexe} & z' = f(z) \end{cases}$

Transformations élémentaires du plan

Symétries

Par simple lecture du graphique ci-contre, M et M' sont des points d'affixes respectives z et z' sur lequel on obtient les résultats suivants :



La symétrie d'axe (OI) a pour écriture complexe : $z' = \bar{z}$
La symétrie de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$
La symétrie d'axe (OJ) a pour écriture complexe : $z' = -\bar{z}$

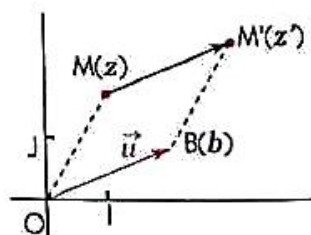
Translation

$t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

M et M' sont des points du plan d'affixes respectives z et z'.

On a : $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \vec{MM'} = \vec{u}$.

La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b a pour écriture complexe : $z' = z + b$



Exemples

La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2 + i$ a pour écriture complexe : $z' = z - 2 + i$.
 $z' = z + 3 - 2i$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $3 - 2i$.

Rotation de centre O

$r_{(O, \theta)}$ est la rotation de centre O et d'angle orienté θ .

M et M' sont des points du plan d'affixes respectives z et z'.

– On a : $r_{(O, \theta)}(O) = O$.

– Supposons $M \neq O$ ($z \neq 0$)

On a : $M' = r_{(O, \theta)}(M) \Leftrightarrow OM' = OM$ et $\text{mes}(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \theta + k2\pi$ [$k \in \mathbb{Z}$]

