

d'où : $M' = r_{(O,\theta)}(M) \Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \arg(z') - \arg(z) = \theta + k2\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$
 $\Leftrightarrow |z| = |z'| \text{ et } \arg(z') = \arg(z) + \theta + k2\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$
 $\Leftrightarrow z' = (\cos\theta + i\sin\theta)z$

La rotation de centre O et d'angle orienté $\hat{\theta}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\theta}z$.

Exemples

La rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$ a pour écriture complexe :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z \text{ ou } z' = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)z.$$

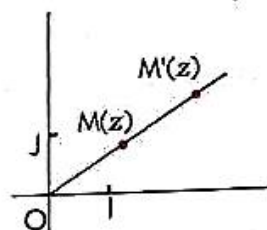
■ Homothétie de centre O

$h_{(O,\alpha)}$ est l'homothétie de centre O et de rapport α .

M et M' sont des points du plan d'affixes respectives z et z'.

On a : $M' = h_{(O,\alpha)}(M) \Leftrightarrow \vec{OM'} = \alpha \vec{OM}$

L'homothétie de centre O et de rapport α a pour notation complexe $z' = \alpha z$.



Exemples

- L'homothétie de centre O et de rapport 0,5 a pour écriture complexe : $z' = 0,5z$.
- $z' = -2z$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport -2 .

Tableau récapitulatif

Transformation du plan	Caractérisation géométrique / Écriture complexe	Bijection complexe associée
Translation de vecteur $\vec{u}(b)$ 	$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \vec{OM'} = \vec{u}$ $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow z' = z + b$	 $b \in \mathbb{C}$
Rotation de centre O et d'angle orienté $\hat{\theta}$ 	- On a : $r_{(O,\theta)}(O) = O$ - Pour $M \neq O$ $M' = r_{(O,\theta)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ \text{mes}(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \theta + k2\pi \ [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$ $M' = r_{(O,\theta)}(M) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}z$	 $\theta \in \mathbb{R}$
Homothétie de centre O et de rapport α 	$M' = h_{(O,\alpha)}(M) \Leftrightarrow \vec{OM'} = \alpha \vec{OM}$ $M' = h_{(O,\alpha)}(M) \Leftrightarrow z' = \alpha z$	 $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercices

- 2.a** Le plan est muni du repère (O, I, J).
 On donne un vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + i$, A est un point d'affixe $2 - 3i$ et M un point d'affixe z.
 Construire les points I', J', A' et M' images respectives des points I, J, A et M par la translation de vecteur $\vec{u}$.
 Déterminer par le calcul l'affixe de chacun des points I', J', A' et M'.

- 2.b** Le plan est muni du repère (O, I, J).
 On donne un point A d'affixe $(-3 - i)$ et M un point d'affixe z.
 Construire les points I', J', A' et M' images respectives des points I, J, A et M par la rotation r de centre O et d'angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{3}$.
 Déterminer par le calcul l'affixe de chacun des points I', J', A' et M'.

2.2. Transformations usuelles du plan

Composées de transformations du plan et bijections complexes

On démontre et nous admettons la propriété suivante :

Propriété

Si f et g sont des bijections complexes associées respectivement aux transformations du plan F et G , alors $f \circ g$ est la bijection complexe associée à la transformation du plan $F \circ G$.

Exemple 1

r est une rotation d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point A d'affixe $2i$,

h une homothétie de rapport -2 et de centre le point B d'affixe $-i$.

Désignons par F la transformation $h \circ r$ du plan. Déterminons la bijection complexe f associée à F .

- Désignons par f_1, f_2 et f les bijections complexes associées respectivement à r, h et F .

Soit z un nombre complexe.

On a : $f_1(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} z + b_1$ et $f_1(2i) = 2i$ (1)

$f_2(z) = -2z + b_2$ et $f_2(-i) = -i$ (2)

$f = f_2 \circ f_1$ (3)

Des égalités (1) on obtient : $b_1 = \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i$;

des égalités (2) on obtient : $b_2 = -3i$;

et de l'égalité (3) on obtient : $f(z) = -2e^{i\frac{\pi}{4}} z - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 7)i$.

Conclusion

La bijection complexe f associée à la composée d'une homothétie et d'une rotation est définie par :

$$f(z) = az + b \quad [a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}].$$

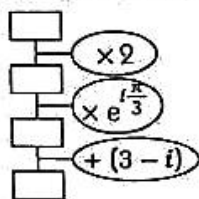
Exemple 2

Déterminons la transformation F du plan associée à la bijection complexe f définie par :

$$f(z) = (1 + i\sqrt{3})z + 3 - i.$$

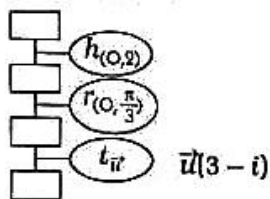
- La bijection complexe f est définie par : $f(z) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} z + 3 - i$.

Schéma de calcul de $f(z)$



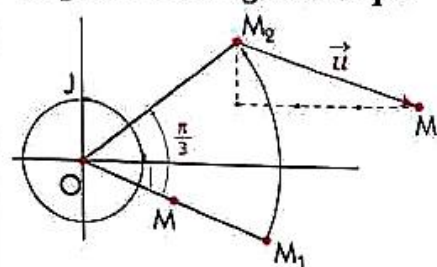
$$f(z) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} z + 3 - i$$

Schéma de F



$$F = t_{\vec{u}} \circ r_{(O,\frac{\pi}{3})} \circ h_{(O,2)}, \text{ avec } \vec{u}(3-i)$$

Représentation géométrique



Conclusion

La transformation F du plan associée à la bijection complexe f définie par $f(z) = az + b$ est la composée d'une translation, d'une rotation de centre O et d'une homothétie de centre O .

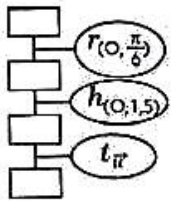
Exemple 3

$r_{(O,\frac{\pi}{6})}$ est une rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$; $h_{(O,1,5)}$ est une homothétie de centre O et de rapport $1,5$; $t_{\vec{u}}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-1 + i$.

Déterminons la bijection complexe f associée à $t_{\vec{u}} \circ h_{(O,1,5)} \circ r_{(O,\frac{\pi}{6})}$.

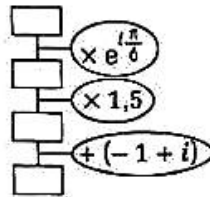
On désigne par F la transformation du plan $t_{\vec{u}} \circ h_{(0;1,5)} \circ r_{(0, \frac{\pi}{6})}$.

Schéma de F



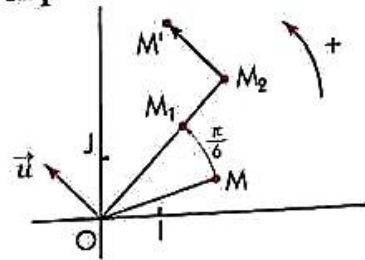
$$F = t_{\vec{u}} \circ h_{(0;1,5)} \circ r_{(0, \frac{\pi}{6})}$$

Schéma de calcul de $f(z)$



$$f(z) = 1,5e^{i\frac{\pi}{6}}z - 1 + i$$

Représentation géométrique



La bijection complexe f associée à $t_{\vec{u}} \circ h_{(0;1,5)} \circ r_{(0, \frac{\pi}{6})}$ est de la forme $f(z) = az + b$, [$a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$].

Rotations de centre quelconque

Bijection complexe associée à une rotation de centre quelconque

θ étant un nombre réel et ω un nombre complexe, pour déterminer la bijection complexe f associée à une rotation d'angle orienté de mesure θ et de centre le point Ω d'affixe ω , on peut traduire à l'aide de bijections complexes la décomposition de cette rotation.

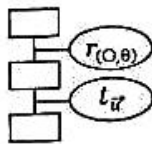
On sait que toute rotation d'angle orienté $\hat{\theta}$ est la composée d'une translation et d'une rotation de centre O et d'angle orienté θ (et réciproquement), d'où la proposition suivante :

Propriété

θ est un nombre réel et ω un nombre complexe. La bijection complexe f associée à la rotation d'angle orienté $\hat{\theta}$ et de centre le point Ω d'affixe ω est de la forme :

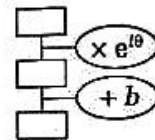
$$f : z \mapsto e^{i\theta}z + b, \text{ avec } f(\omega) = \omega.$$

Décomposition de $r_{(\omega, \theta)}$



$$r_{(\omega, \theta)} = t_{\vec{u}} \circ r_{(0, \theta)} = r_{(0, \theta)} \circ t_{\vec{u}}$$

Schéma de calcul de $f(z)$



$$f(z) = e^{i\theta}z + b, \text{ avec } f(\omega) = \omega$$

Exemples

Déterminons la bijection complexe f associée à la rotation r d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point Ω d'affixe $1 - i$.

La bijection complexe f associée à $r_{(\Omega, \frac{\pi}{6})}$ est définie par :

$$f(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}z + b \text{ avec } f(1 - i) = 1 - i$$

$$\text{d'où : } f(1 - i) = e^{i\frac{\pi}{6}}(1 - i) + b = 1 - i$$

$$b = (1 - i)(1 - e^{i\frac{\pi}{6}})$$

$$\text{donc : } f(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}z + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \frac{3 - \sqrt{3}}{2}i$$

$$f(z) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \frac{3 - \sqrt{3}}{2}i$$

Déterminons la transformation F du plan associée à la bijection complexe f définie par :

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z - i.$$

On peut encore écrire : $f(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}}z - i$
 F est une rotation d'angle orienté de mesure $-\frac{\pi}{4}$.

Désignons son centre par le point Ω d'affixe ω .

$$\text{On a : } F(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow f(\omega) = \omega$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\omega - i = \omega$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 2)i}{2(2 - \sqrt{2})}$$

F est la rotation d'angle orienté de mesure $-\frac{\pi}{4}$ et de centre le point d'affixe $\frac{-\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 2)i}{2(2 - \sqrt{2})}$.

Homothétie de centre quelconque

Bijection complexe associée à une homothétie de centre quelconque

α étant un nombre réel et ω un nombre complexe, pour déterminer la bijection complexe f associée à une homothétie de rapport α et de centre le point Ω d'affixe ω , on peut traduire à l'aide de bijections complexes la décomposition de cette homothétie.

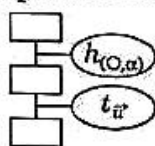
On sait que toute homothétie de rapport α est la composée d'une translation et d'une homothétie de centre O et de rapport α (et réciproquement), d'où la propriété suivante :

Propriété

α est un nombre réel et ω un nombre complexe. La bijection complexe f associée à l'homothétie de rapport α et de centre le point Ω d'affixe ω est de la forme :

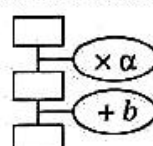
$$f : z \mapsto \alpha z + b, \text{ avec } f(\omega) = \omega.$$

Décomposition de $h_{(\Omega, \alpha)}$



$$h_{(\Omega, \alpha)} = t_{\vec{u}} \circ h_{(O, \alpha)} = h_{(O, \alpha)} \circ t_{\vec{u}}$$

Schéma de calcul de $f(z)$



$$f(z) = \alpha z + b, \text{ avec } f(\omega) = \omega$$

Exemples

Déterminons la bijection complexe f associée à l'homothétie h de rapport -3 et de centre le point Ω d'affixe $2 + i$.

Déterminons la transformation F du plan associée à la bijection complexe f définie par :

$$f(z) = 2z - 3 + i.$$

La bijection complexe f associée à $h_{(\Omega, -3)}$ est définie par :

$$f(z) = -3z + b, \text{ avec } f(2 + i) = 2 + i$$

$$\text{d'où : } -3(2 + i) + b = 2 + i$$

$$b = 4(2 + i)$$

$$\text{donc : } f(z) = -3z + 4(2 + i)$$

F est l'homothétie de rapport 2 .

Désignons son centre par le point Ω d'affixe ω .

$$\text{On a : } F(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow f(\omega) = \omega$$

$$\Leftrightarrow 2\omega - 3 + i = \omega$$

$$\Leftrightarrow \omega = 3 - i$$

F est l'homothétie de rapport 2 et de centre le point Ω d'affixe $3 - i$.

Remarque

Le TP p. 239 présente une méthode qui permet de déterminer l'écriture complexe d'une rotation et d'une homothétie à partir des caractérisations géométriques de ces transformations du plan.

Exercices

2.c On désigne par F la transformation du plan $t_{\vec{u}} \circ h_{(O, 1,5)} \circ r_{(O, \frac{\pi}{6})}$ et f la bijection complexe associée à F . Déterminer f ; donner le schéma de F et le schéma de calcul de $f(z)$.

2.d Le plan est muni du repère (O, I, J) . Déterminer la transformation F du plan associée à la bijection définie ci-dessous.

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)z.$$

Construire l'image par F du point A d'affixe $3 - i$.

2.e r est une rotation d'angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $2 - 2i$. Déterminer la bijection complexe associée à r .

2.3. Similitudes directes du plan

Définition et propriété fondamentale

TABEAU RÉCAPITULATIF

① Similitude

- α est un nombre réel strictement positif.

On appelle *similitude* de rapport α toute transformation du plan telle que :

pour tous points M et N d'images respectives M' et N', $M'N' = \alpha MN$.

Toute similitude de rapport α est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport α .

- α est un nombre réel.

Toute composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport α est une similitude de rapport $|\alpha|$.

② Similitude directe

α est un nombre réel strictement positif.

- On appelle *similitude directe* de rapport α toute similitude qui conserve l'orientation des angles.

- Toute similitude directe de rapport α est :

ou $\left\{ \begin{array}{l} - \text{une translation ;} \\ - \text{une rotation ;} \\ - \text{une homothétie de rapport } \alpha ; \\ - \text{la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport } \alpha. \end{array} \right.$

- Toute similitude directe de rapport α est aussi la composée de l'homothétie de centre O et de rapport α , d'une rotation de centre O et d'une translation.

③ Similitude indirecte

α est un nombre réel strictement positif.

On appelle *similitude indirecte* de rapport α toute similitude qui ne conserve pas l'orientation des angles.

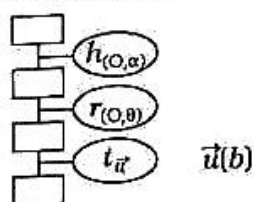
La décomposition fondamentale d'une similitude directe donne la propriété suivante :

Propriété

- Toute similitude directe de rapport α est associée à une bijection complexe f définie par :
 $f(z) = az + b$ [$a \in \mathbb{C}^*$, $|a| = \alpha$ et $b \in \mathbb{C}$]

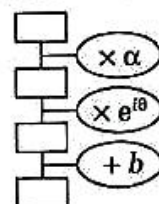
- Réciproquement, toute bijection complexe f définie par : $f(z) = az + b$ [$a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$]
est associée à une similitude directe S de rapport $|a|$.

Schéma de S



$$S = t_{\vec{u}} \circ r_{(O, \theta)} \circ h_{(O, \alpha)}$$

Schéma de calcul associé à f



$$f(z) = az + b, \text{ avec } a = \alpha e^{i\theta}$$

Caractérisation géométrique d'une similitude directe

Centre, angle orienté, rapport

Propriété

– α étant un nombre réel strictement positif, toute similitude directe S de rapport α qui n'est pas une translation admet un unique point invariant Ω et S s'écrit de manière unique sous la forme :

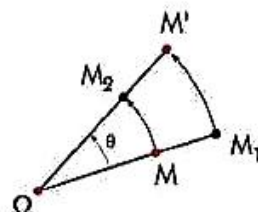
$$S = h_{(\Omega, \alpha)} \circ r_{(\Omega, \theta)} = r_{(\Omega, \theta)} \circ h_{(\Omega, \alpha)}$$

– Cette forme est appelée *décomposition canonique* de S .

– Le point Ω est appelé le centre de S , α son rapport, $(\hat{\theta})$ son angle orienté.

S est caractérisé par : Ω , α et $(\hat{\theta})$

On peut écrire : $S_{(\Omega, \alpha, \theta)}$



Démonstration guidée

Détermination de la bijection complexe associée à S

S étant une similitude directe de rapport α , il existe un angle orienté $(\hat{\theta})$ et un nombre complexe b tel que : $S = t_{\vec{u}} \circ h_{(\Omega, \alpha)} \circ r_{(\Omega, \theta)}$ avec $\vec{u}(b)$

S est donc associée à une bijection complexe f définie par $f(z) = \alpha e^{i\theta} z + b$ (On pose $a = \alpha e^{i\theta}$).

Recherche de l'ensemble des points invariants de S

Déterminer la décomposition canonique.

Considérons la similitude directe $S' : S' = h_{(\Omega, \alpha)} \circ r_{(\Omega, \theta)}$.

Désignons par f' la bijection complexe associée à S' .

Démontrer que S et S' sont associées à la même bijection de $\mathbb{C}$; en déduire qu'elles sont égales.

Exemples

S est une similitude directe associée à la bijection complexe f définie par : $f(z) = (1 + i)z + 3 - i$.

Déterminons le centre Ω de S , son angle orienté $(\hat{\theta})$ et son rapport α .

Détermination du rapport et de l'angle orienté

La bijection complexe f associée à S est définie par :

$$f(z) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z + 3 - i$$

S a donc pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle orienté $\frac{\pi}{4}$.

Détermination du centre

$$\begin{aligned} S(M) = M &\Leftrightarrow f(z) = z \\ &\Leftrightarrow (1 + i)z + 3 - i = z \\ &\Leftrightarrow -iz = 3 - i \\ &\Leftrightarrow z = 1 + 3i \end{aligned}$$

Le centre de S est le point Ω d'affixe $1 + 3i$.

Similitude directe et bijection complexe associée

S est la similitude directe de rapport α [$\alpha \in \mathbb{R}^*$] d'angle orienté $(\hat{\theta})$ et de centre le point Ω d'affixe ω ;

f est la bijection complexe définie par : $f(z) = az + b$ [$a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$] ;

$$S \text{ et } f \text{ sont associées} \Leftrightarrow a = \alpha e^{i\theta} \text{ et } f(\omega) = \omega.$$

Exercices

2.f Quelle est la bijection complexe associée à la similitude directe d'angle orienté $(-\frac{\pi}{6})$, de rapport 3 et de centre le point Ω d'affixe $(2 - 3i)$?

2.g r est une rotation d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $2 - 2i$. Déterminer la bijection complexe associée à r . En déduire la représentation analytique de r .

TP Caractérisation géométrique et écriture complexe d'une rotation et d'une homothétie

■ Présentation

Ω est un point du plan d'affixe ω , θ un nombre réel non nul, α un nombre réel non nul différent de 1. $r_{(\Omega, \theta)}$ est la rotation de centre Ω et d'angle orienté $\widehat{\theta}$, $h_{(\Omega, \alpha)}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport α . On veut déterminer l'écriture complexe de $h_{(\Omega, \alpha)}$ et celle de $r_{(\Omega, \theta)}$ à partir de leurs caractérisations géométriques.

Soient M et M' des points du plan d'affixes respectives z et z' .

Écriture complexe de $h_{(\Omega, \alpha)}$

On a : $M' = h_{(\Omega, \alpha)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = \alpha \overrightarrow{\Omega M}$

d'où : $M' = h_{(\Omega, \alpha)}(M) \Leftrightarrow z' - \omega = \alpha(z - \omega).$

Écriture complexe de $r_{(\Omega, \theta)}$

On a : • $r_{(\Omega, \theta)}(\Omega) = \Omega$

• pour $M \neq \Omega$

$$M' = r_{(\Omega, \theta)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{et} \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|z' - \omega\| = \|z - \omega\| \\ \text{et} \\ \arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \theta + k2\pi \quad [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$$

d'où : $M' = r_{(\Omega, \theta)}(M) \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

■ Exemple

On veut déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre A d'affixe $2 + i$ et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$.

On a : $z' - (2 + i) = e^{i\frac{\pi}{6}}[z - (2 + i)]$

d'où : $z' = \frac{\sqrt{3} + i}{2} z + \frac{5 - 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{2}.$

On veut déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B d'affixe $1 - i$ et de rapport -3 .

On a : $z' - (1 - i) = -3[z - (1 - i)]$

d'où : $z' = -3z + 4 - 4i.$

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) .

Nombres complexes et configurations du plan

Vecteurs du plan, angles orientés de vecteur

1 Dans chacun des cas suivants, A, B, C, D sont des points d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D définis ci-dessous.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

- (1) $z_A = \sqrt{2} + 5i$; $z_B = \sqrt{2} + 3i$
 $z_C = 6i$; $z_D = \sqrt{3} + 5i$
 (2) $z_A = 2i$; $z_B = \sqrt{3} + 3i$
 $z_C = 5 - 2i$; $z_D = 7 - 2i$

Quelques configurations de base

2 On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D définie par :

$z_A = -1 - 5i$; $z_B = 4 - 3i$; $z_C = 3 + 3i$ et $z_D = -2 + i$.

1. a) Justifier que ABCD est un parallélogramme.
 b) Déterminer l'affixe du point A', symétrique de A par rapport au point B.

c) Déterminer l'affixe du point A'' vérifiant :

$$\overrightarrow{DA''} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$$

2. Quelle est la nature du quadrilatère A''BC'D ?

Nombres complexes et transformations du plan

3 Dans chaque cas ci-dessous, reconnaître l'application dont l'écriture complexe est :

- (1) $z' = z + 2i + 1$ (2) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z$ (3) $z' = -z$
 (4) $z' = z - 3i$ (5) $z' = iz$ (6) $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)z$

4 A(2 - i) et B(1 - 3i) sont deux points du plan. Quelle est la translation t qui applique A sur B. Quelle est l'écriture complexe de t ?

5 Quelle est la transformation F du plan dont l'écriture complexe est $z' = z + 2 - 3i$. Quelle est l'image par F de la droite d'équation : $y = 2x - 1$.

6 $\vec{v}$ est un vecteur d'affixe $-3 - i$, A est le point d'affixe $2 + i$. t est la translation de vecteur $\vec{v}$; r est la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$. Déterminer $t(A)$ et $r(A)$. Comparer ces deux nombres complexes. Tracer la figure.

7 On considère le vecteur $\vec{v}$ d'affixe $(1 + i)$, le point A d'affixe $(1 - i)$ et un point M quelconque du plan d'affixe z .

1. Construire les points I', J', A' et M', image respectives des points I, J, A et M par la translation t de vecteur $\vec{v}$.
 2. Déterminer l'affixe de chacun des points I', J', A' et M' et de chacun des vecteurs $\overrightarrow{I'A'}$ et $\overrightarrow{J'M'}$.

3. Donner une mesure de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM})$ et $(\overrightarrow{I'A'}, \overrightarrow{I'M'})$, comparer ces angles.

8 On considère le point A d'affixe $(1 + i)$ et M un point quelconque d'affixe z .

1. Construire les points I', J', A' et M', image respectives des points I, J, A et M par l'homothétie h de centre O et de rapport 2.

2. Déterminer l'affixe de chacun des points I', J', A' et M' et de chacun des vecteurs $\overrightarrow{I'A'}$ et $\overrightarrow{J'M'}$.

3. Donner une mesure de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM})$ et $(\overrightarrow{I'A'}, \overrightarrow{I'M'})$, comparer ces angles.

9 On considère le point A d'affixe $(-1 - 3i)$ et M un point quelconque d'affixe z .

1. Construire les points I', J', A' et M', image respectives des points I, J, A et M par la rotation r de centre O et d'angle orienté $\frac{2\pi}{3}$.

2. Déterminer l'affixe de chacun des points I', J', A' et M' et de chacun des vecteurs $\overrightarrow{I'A'}$ et $\overrightarrow{J'M'}$.

3. Donner une mesure de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM})$ et $(\overrightarrow{I'A'}, \overrightarrow{I'M'})$, comparer ces angles.

10 On donne les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B définies par :

$$z_A = 6 + 3i \text{ et } z_B = 2 + 4i.$$

1. Déterminer la nature du triangle OAB.
 2. Déterminer l'affixe du point B' image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et celle de A' image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Tracer la figure.

4. Calculer l'affixe du point M, milieu de [A'B].
 5. Vérifier que les droites (OM) et (AB) sont perpendiculaires.

Que représente la droite (OI) pour le triangle OAB ?

11 1. Déterminer l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) d'équation $y = x$.

2. Déterminer l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre A d'affixe $1 + i$.

12 Quelle est la transformation F du plan dont l'écriture complexe est $z' = \frac{1}{2}(1 + i)z$. Quelle est l'image par F de la droite d'équation $y = x$?

13 Dans chacun des cas suivants, déterminer la transformation du plan qui a pour écriture complexe :

- (1) $z' = z + 3i$ (3) $z' = z - 3i$
 (2) $z' = 2z + 3i$ (4) $z' = 2iz - 6i$
 (5) $z' = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} z$ (6) $z' = iz + 5$
 (7) $z' = -2iz + 3i$ (8) $z' = -iz + 1$

14 A(1 + i) et B(-1 + i√3) sont deux points du plan.

1. Vérifier que les points O, A et B sont alignés.
 2. Déterminer le rapport et l'angle orienté de la similitude directe S de centre O qui transforme A en B.
 3. Quelle est l'écriture complexe de S ?

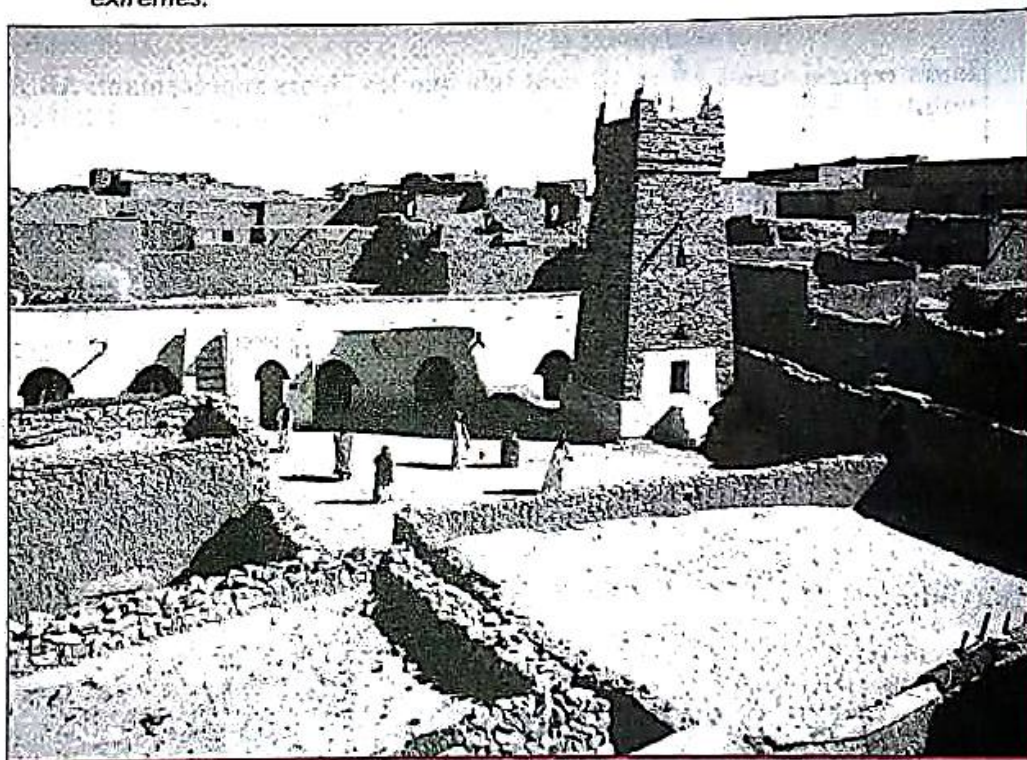
Géométrie dans l'espace

Chinguetti (déclarée patrimoine mondial par l'UNESCO).

Ville de la Mauritanie construite vers le XII^e siècle, Chinguetti voit son prestige religieux et culturel s'étendre jusqu'à La Mecque.

La mosquée ancienne, dont l'imposant minaret constitue le repère spatial et culturel, est d'apparence sobre et s'harmonise avec le paysage.

L'architecture obéit aux règles de la culture arabo-musulmane, à celles de la défense dans le désert ainsi qu'à celle des climats extrêmes.



© M. Huet, HOAGUI

Mosquée ancienne de Chinguetti, Mauritanie.

SOMMAIRE

1. Vecteurs et points de l'espace	242
2. Produit scalaire	244
3. Produit vectoriel	251

1.1. Vecteurs de l'espace

En classe de première SE, nous avons admis que l'on peut étendre à l'espace la notion de vecteur d'un plan. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace, $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan et $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

① Vecteurs colinéaires – Vecteurs coplanaires

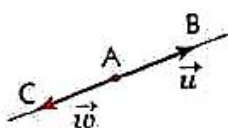
– Des vecteurs non nuls sont dits *colinéaires* lorsqu'ils ont la même direction.

– On convient de dire que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

– Deux vecteurs sont colinéaires
si et seulement si

leurs représentants $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont tels que les points A, B et C sont alignés.

$$\vec{w} = x\vec{u} \quad [x \in \mathbb{R}]$$



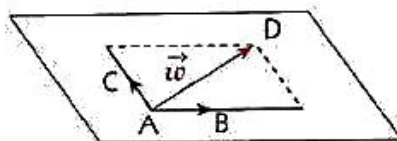
– Trois vecteurs sont dits *coplanaires* lorsque l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres.

– On remarque que trois vecteurs sont coplanaires lorsque deux d'entre eux sont colinéaires.

– Trois vecteurs sont coplanaires
si et seulement si

leurs représentants $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont tels que les points A, B, C et D sont coplanaires.

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \quad [(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$$



② Caractérisation vectorielle d'une droite et d'un plan

A et B sont deux points de $\mathcal{E}$.

Pour tout point M,

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \vec{AM} = x\vec{AB} \quad [x \in \mathbb{R}]$$

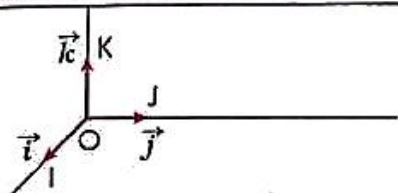
A, B et C sont trois points de $\mathcal{E}$.

Pour tout point M,

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \quad [(x; y) \in \mathbb{R}^2]$$

③ Base $\mathcal{W}$ – Repère de $\mathcal{E}$

On appelle *base* de $\mathcal{W}$ tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$.



On appelle *repère* de $\mathcal{E}$ tout quadruplet (O, I, J, K) de points non coplanaires de $\mathcal{E}$.

$$\left[\begin{array}{c} (O, I, J, K) \\ \text{est un repère} \\ \text{de } \mathcal{E} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} (\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK}) \\ \text{est une base} \\ \text{de } \mathcal{W} \end{array} \right]$$

④ Coordonnées d'un point – Coordonnées d'un vecteur

(O, I, J, K) est un repère de $\mathcal{E}$.

– Pour tout point M de $\mathcal{E}$, il existe un triplet unique de nombres réels $(x; y; z)$ tel que :

$$\vec{OM} = x\vec{OI} + y\vec{OJ} + z\vec{OK}$$

– $(x; y; z)$ est appelé le triplet de coordonnées $\left\{ \begin{array}{l} \text{du point M, dans le repère } (O, I, J) \\ \text{du vecteur } \vec{OM}, \text{ dans la base } (\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK}) \end{array} \right.$

1.2. Barycentre

■ Définition et propriétés

Nous étendons à l'espace la définition et les propriétés du barycentre de points pondérés, tout en généralisant à n points ce qui a été fait en classe de Première.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

① Propriétés – Définition

$A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n points de l'espace $\mathcal{E}$; $a_1, a_2, \dots, a_n$, n nombres réels de somme non nulle.

– Il existe un unique point G tel que : $\sum_{i=1}^n a_i \vec{MA}_i = \vec{0}$.

– Ce point G est appelé *barycentre des n points pondérés* : $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$.

② Propriété caractéristique

$a_1, a_2, \dots, a_n$, sont des nombres réels de somme non nulle.

G est le barycentre des points pondérés : $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$

si et seulement si pour tout point M de $\mathcal{E}$, $\sum_{i=1}^n a_i \vec{MA}_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \vec{MG}$.

③ Homogénéité

G est le barycentre des points pondérés : $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$.

Si k est un nombre réel non nul, alors G est le barycentre de $(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \dots, (A_n, ka_n)$.

④ Propriété des barycentres partiels

On ne change pas le barycentre de plusieurs points pondérés en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme non nulle des coefficients correspondants.

■ Exemple d'utilisation du barycentre

$ABCD$ est un tétraèdre ; I et J sont respectivement les milieux de $[AC]$ et $[DB]$; P, Q, R et S des points tels que : (1) $\vec{AB} = 3\vec{AP}$; (2) $\vec{AD} = 3\vec{AQ}$; (3) $\vec{CB} = 3\vec{CR}$; (4) $\vec{CD} = 3\vec{CS}$.

Démontrons que les droites (PS) , (QR) et (IJ) sont concourantes.

On déduit de l'énoncé que :

I est l'isobarycentre de A et C

J est l'isobarycentre de D et B .

Les égalités vectorielles (1), (2), (3), (4) permettent de considérer :

P comme barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$

Q comme barycentre de $(A, 2)$ et $(D, 1)$

R comme barycentre de $(C, 2)$ et $(B, 1)$

S comme barycentre de $(C, 2)$ et $(D, 1)$

Désignons par G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$ et $(D, 1)$.

On peut déterminer le barycentre G en utilisant les barycentres partiels

P, Q, R, S, I, J . On obtient :

$$\underbrace{\underbrace{(A,2) \quad (B,1)}_{(P,3)} \quad \underbrace{(C,2) \quad (D,1)}_{(S,3)}}_{(G)}$$

$$\underbrace{\underbrace{(A,2) \quad (D,1)}_{(Q,3)} \quad \underbrace{(C,2) \quad (B,1)}_{(R,3)}}_{(G)}$$

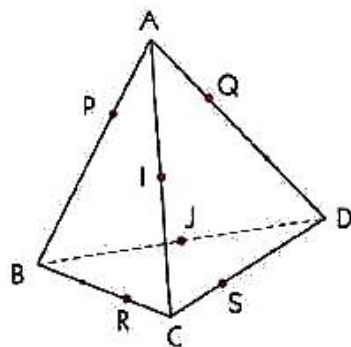
$$\underbrace{\underbrace{(A,2) \quad (C,2)}_{(I,4)} \quad \underbrace{(B,1) \quad (D,1)}_{(J,2)}}_{(G)}$$

d'où : $G \in (PS)$

; $G \in (QR)$

; $G \in (IJ)$

Par conséquent, les droites (PS) , (QR) et (IJ) sont concourantes en G .



2.1. Définition – Propriétés

Puisque deux vecteurs de $\mathcal{W}$ sont nécessairement coplanaires, on étend à $\mathcal{W}$ la définition du produit scalaire dans $\mathcal{V}$, ainsi que toutes ses propriétés qui ne font intervenir qu'un ou deux vecteurs.

On examinera les propriétés qui font intervenir trois vecteurs, car ceux-ci peuvent être non coplanaires.

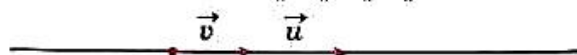
On démontre et nous admettons que le produit scalaire de deux vecteurs ne dépend pas de ses représentants choisis.

Expressions du produit scalaire

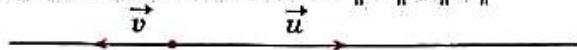
Produits scalaires remarquables

- Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires,

– de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$



– de sens contraires : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

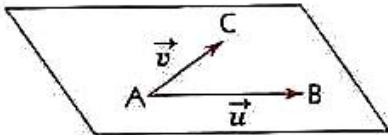
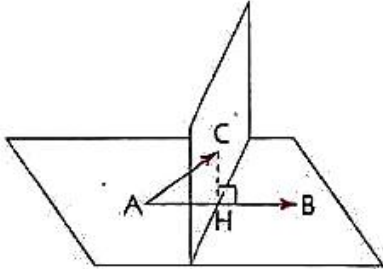
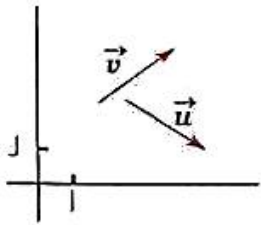


- Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire**, et noté : $\vec{u}^2$

- Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Différentes expressions du produit scalaire

TABLEAU RÉCAPITULATIF

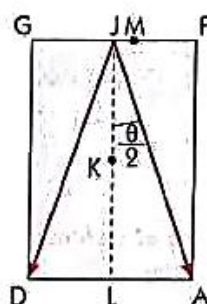
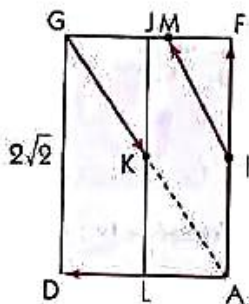
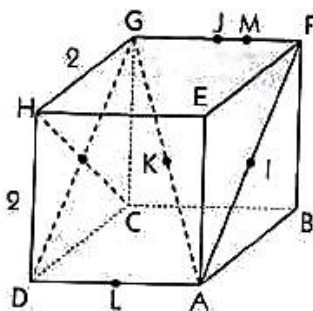
① Expression trigonométrique (normes et angle des vecteurs)	② Expression vectorielle (projection orthogonale d'un vecteur)	③ Expression analytique (dans une base orthonormée)
		
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$	Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u} = \vec{AB}$; $\vec{v} = \vec{AC}$ H le projeté orthogonal de C sur (AB). alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$	Si $(x ; y ; z)$ et $(x' ; y' ; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Exemple

ABCDEFGH est un cube de côté 2. On désigne par I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AF], [FG], [GA], [AD] et par M un point quelconque de [JF].

Calculons les produits scalaires suivants : $\vec{AF} \cdot \vec{IM}$; $\vec{AD} \cdot \vec{GK}$; $\vec{JA} \cdot \vec{JD}$.

Ces produits scalaires peuvent se calculer dans le plan (AFG).



AFGD est un rectangle.

On a :

$$AD = 2$$

$$AF = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$$

$$JA = JD = \sqrt{8 + 1} = 3$$

Utilisation de l'expression vectorielle

$$\begin{aligned} 1) \vec{AF} \cdot \vec{IM} &= \vec{AF} \cdot \vec{IF} \\ &= AF \times IF \\ &= 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \end{aligned}$$

car F est le projeté orthogonal de M sur (AF),

$\vec{AF}$ et $\vec{IF}$ sont colinéaires et de même sens.

$$\begin{aligned} 2) \vec{AD} \cdot \vec{GK} &= \vec{AD} \cdot \vec{DL} \\ &= -AD \times DL \\ &= -2 \times 1 = -2 \end{aligned}$$

car D et L sont respectivement les projetés orthogonaux sur (AD) de G et K.

$\vec{AD}$ et $\vec{DL}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Utilisation de l'expression trigonométrique

$$3) \vec{JA} \cdot \vec{JD} = JA \times JD \times \cos(\widehat{AJD})$$

Désignons par θ la mesure de l'angle $\widehat{AJD}$ et calculons $\cos \frac{\theta}{2}$ dans le triangle rectangle AJL.

$$\text{On a : } \cos \frac{\theta}{2} = \frac{JL}{JA} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Or : } \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$\text{donc : } \cos \theta = 2 \times \frac{8}{9} - 1 = \frac{7}{9}$$

$$\vec{JA} \cdot \vec{JD} = 9 \times \frac{7}{9} = 7.$$

Vecteurs orthogonaux

TABLEAU RÉCAPITULATIF

① Vocabulaire

- On convient de dire que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.
- Deux vecteurs non nuls de l'espace sont dits orthogonaux lorsque leurs directions sont orthogonales.

② Caractérisation des vecteurs orthogonaux

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont des vecteurs orthogonaux} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

■ Exemple 1

L'espace est muni du repère orthonormé (O, I, J, K).

Les points A, B, C ont respectivement pour coordonnées $(-2; 1; 3)$, $(1; -2; 4)$, $(a; 5; 3)$.

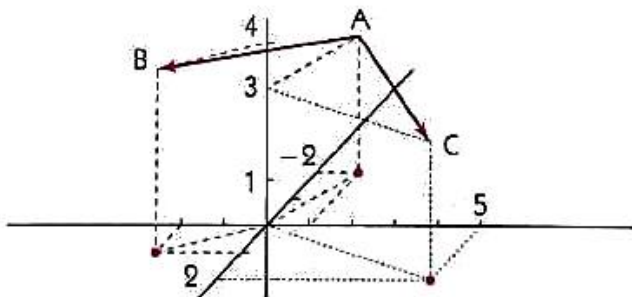
Déterminer le nombre réel a pour que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ soient orthogonaux. Faire une figure.

$\vec{AB}$ a pour coordonnées $(3; -3; 1)$

$\vec{AC}$ a pour coordonnées $(a+2; 4; 0)$

$$\text{donc : } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3(a+2) - 12 = 3a - 6.$$

$$\text{d'où : } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$



■ Exemple 2

ABCDEFGH est un cube de côté 1. P et Q sont les points vérifiant : $\vec{AP} = 2\vec{AB}$; $\vec{AQ} = 3\vec{AD}$.

On désigne par K le projeté orthogonal de A sur le plan (EPQ).

Démontrer que le point K est l'orthocentre du triangle EPQ.

Choisissons un repère orthonormé et calculons les coordonnées $(x; y; z)$ de K

(A, B, D, E) est un repère orthonormé.

$\vec{AK}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{EK}$, $\vec{PK}$ et $\vec{QK}$.

Par conséquent :

(1) $\vec{AK} \cdot \vec{EK} = 0$; (2) $\vec{AK} \cdot \vec{PK} = 0$; (3) $\vec{AK} \cdot \vec{QK} = 0$.

On obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z(z-1) = 0 & (1) \\ x(x-2) + y^2 + z^2 = 0 & (2) \\ x^2 + y(y-3) + z^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

ou encore : $x^2 + y^2 + z^2 = z = 2x = 3y$

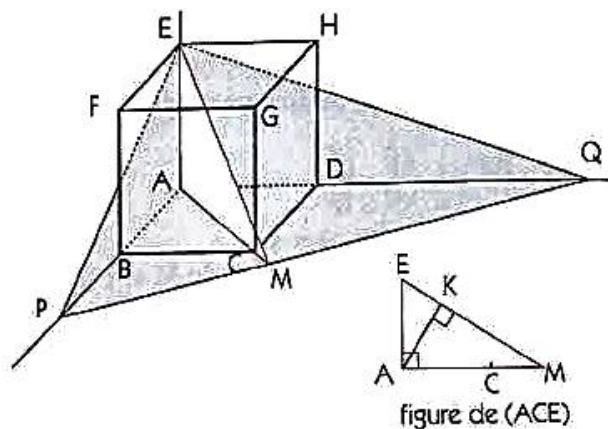
d'où : $x = \frac{z}{2}$; $y = \frac{z}{3}$; $z = (\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1)z^2$

z étant non nul, on en déduit : $K(\frac{18}{49} ; \frac{12}{49} ; \frac{36}{49})$.

Démontrons que K est l'orthocentre du triangle EPQ

À l'aide des coordonnées des vecteurs, on obtient : $\vec{EP} \cdot \vec{QK} = 0$; $\vec{EQ} \cdot \vec{PK} = 0$; $\vec{PQ} \cdot \vec{EK} = 0$.

• Donner une autre démonstration géométrique.



■ Propriétés algébriques

■ Règles de calcul

Les propriétés algébriques suivantes donnent les règles de calcul du produit scalaire.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, pour tout nombre réel α ,

$$(1) \quad \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

$$(3) \quad (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(2) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(4) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Démonstration guidée

– Les propriétés (1), (2) et (3) concernent des vecteurs coplanaires ; elles sont vraies dans $\mathcal{V}$ donc aussi dans $\mathcal{W}$.

– Pour démontrer la propriété (4), on pourrait utiliser les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ pour calculer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, puis comparer ces nombres réels.

■ Exemple 1

ABCDEFGH est un cube de côté 2 (voir 1^{er} exemple du 2.1, p. 244).

Calculons les produits scalaires suivants : $(2\vec{AD}) \cdot (-3\vec{GK})$; $\vec{AB} \cdot \vec{EH}$; $\vec{AF} \cdot \vec{BM}$.

$$(1) \quad (2\vec{AD}) \cdot (-3\vec{GK}) = -6(\vec{AD} \cdot \vec{GK})$$

or : $(\vec{AD} \cdot \vec{GK}) = -2$ (voir 1^{er} exemple du 2.1)

donc : $(2\vec{AD}) \cdot (-3\vec{GK}) = 12$.

$$\begin{aligned} (2) \quad \vec{AB} \cdot \vec{EF} &= \vec{EF} \cdot \vec{EF} \\ &= \|\vec{EF}\|^2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \vec{AF} \cdot \vec{BM} &= \vec{AF} \cdot (\vec{IM} - \vec{IB}) \\ &= \vec{AF} \cdot \vec{IM} - \vec{AF} \cdot \vec{IB} \end{aligned}$$

or : $\vec{AF} \perp \vec{IB}$

$\vec{AF} \cdot \vec{IM} = 4$ (voir 1^{er} exemple du 2.1)

donc : $\vec{AF} \cdot \vec{BM} = 4$

■ Exemple 2

**ABCD est un tétraèdre régulier de côté a . Calculer $\vec{AD} \cdot \vec{AB}$; $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$; $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$.
En déduire les positions relatives des supports des côtés d'un tétraèdre régulier.**

Les faces d'un tétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux.

Par conséquent,

$$\vec{AD} \cdot \vec{AB} = AD \times AB \times \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$$

(AD) et (BC) n'appartiennent pas à la même face.

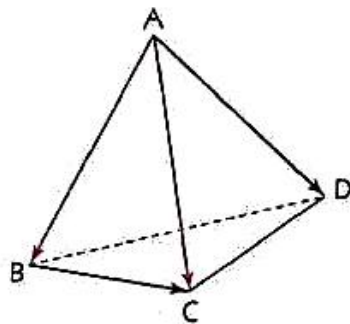
Pour calculer $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$, décomposons l'un de ces vecteurs.

$$\vec{AD} \cdot \vec{BC} = \vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$$

$$= \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0$$

donc : $\vec{AD} \perp \vec{BC}$

On démontre de la même manière que les supports des côtés opposés d'un tétraèdre régulier sont orthogonaux.



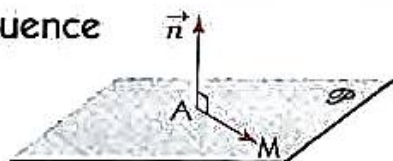
■■■■ Vecteur normal à un plan

■ Définition et conséquence immédiate

Définition

On appelle vecteur normal à un plan tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan.

Conséquence



A étant un point de l'espace $\mathcal{E}$, $\vec{n}$ un vecteur non nul, l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ vérifiant : $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

■ Exemple

ABCDEFGH est un cube. Démontrons que le vecteur $\vec{BC}$ est normal au plan (ABE) et le vecteur $\vec{AH}$ est normal au plan (BCE).

– La droite (BC) est orthogonale à (BH) et à (AB), d'où : $(BC) \perp (ABE)$

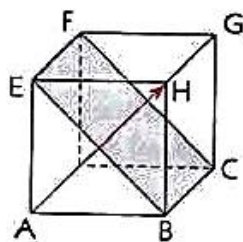
donc : $\vec{BC}$ est normal à (ABE), par suite (BC) est orthogonale à toute droite du plan (ABE),

d'où : $(BC) \perp (AH)$.

– On sait que (AH) est orthogonale à (BE) (diagonale du carré ABHE) par suite (AH) est orthogonale à (BC) et à (BE)

donc : $\vec{AH}$ est normal à (BCE).

– Remarquons que (BCE) est le plan médiateur du segment [AH].



Exercices

- 2.a ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que : $AB = 6$; $AD = 3$; $AE = 4$.
On désigne par I, J, K les milieux respectifs de [FC], [CD], [DF].
Calculer : $\vec{EF} \cdot \vec{ID}$; $\vec{IJ} \cdot \vec{FC}$; $\vec{KE} \cdot \vec{KF}$.

- 2.b ABCDS est une pyramide régulière à base carrée et de sommet S tel que :
 $AB = SA = 2$.
Calculer : $\vec{SA} \cdot \vec{SB}$; $\vec{SA} \cdot \vec{SC}$; $\vec{SA} \cdot \vec{AC}$.

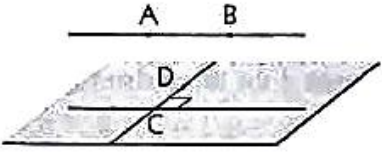
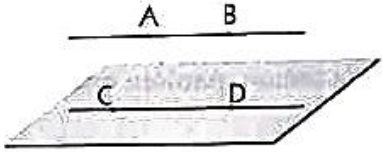
2.2. Utilisations du produit scalaire

Orthogonalité et parallélisme dans l'espace

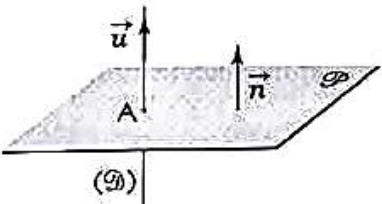
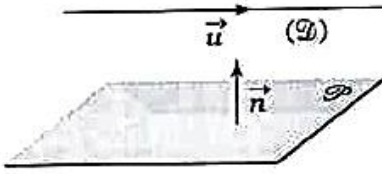
Les propriétés suivantes proviennent des vecteurs orthogonaux et des vecteurs colinéaires. Ce sont des interprétations vectorielles de l'orthogonalité et du parallélisme dans l'espace.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

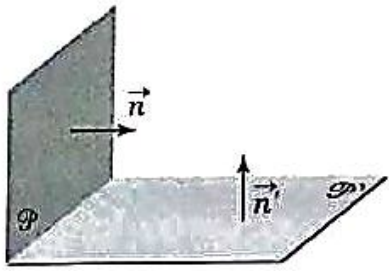
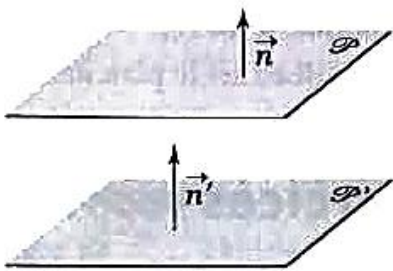
① Droites orthogonales – Droites parallèles

Deux droites sont orthogonales <i>si et seulement si</i> leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux	Deux droites sont parallèles <i>si et seulement si</i> leurs vecteurs directeurs sont colinéaires
	
$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$	$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \vec{AB} = \alpha \vec{CD} \quad [\alpha \in \mathbb{R}^*]$

② Droite et plan perpendiculaires – Droites et plan parallèles

Une droite est perpendiculaire à un plan <i>si et seulement si</i> un vecteur directeur de la droite est un vecteur normal au plan	Une droite est parallèle à un plan <i>si et seulement si</i> un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal au plan
	
$(D) \perp \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha \vec{n} \quad [\alpha \in \mathbb{R}^*]$	$(D) \parallel \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

③ Plans perpendiculaires – Plans parallèles

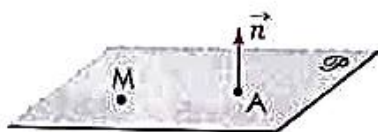
Deux plans sont perpendiculaires <i>si et seulement si</i> un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan	Deux plans sont parallèles <i>si et seulement si</i> un vecteur normal à l'un des plans est colinéaire à un vecteur normal à l'autre plan
	
$\mathcal{P} \perp \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$	$\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n} = \alpha \vec{n}' \quad [\alpha \in \mathbb{R}^*]$

Équations d'un plan

L'espace est muni d'un repère.

Détermination d'une équation du plan

- $\mathcal{P}$ est un plan.



A est un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$.
 $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ de coordonnées $(a; b; c)$.
 Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque de l'espace,

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

avec $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

- $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant :
 (1) $ax + by + cz + d = 0$ $[(a; b; c) \neq (0; 0; 0)]$.

Supposons $a \neq 0$

Peut-on trouver un point A de $\mathcal{Q}$ de coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$? C'est-à-dire, peut-on trouver x_0, y_0, z_0 tels que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$?

Il suffit de poser par exemple :

$$y_0 = z_0 = 0 \text{ et } x_0 = -\frac{d}{a}$$

(1) devient : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Désignons par $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(a; b; c)$

(1) se traduit par : $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

d'où : $M \in \mathcal{P}$.

Propriétés

- $\vec{n}$ est un vecteur non nul de coordonnées $(a; b; c)$.

Tout plan normal au vecteur $\vec{n}$ a pour équation : $ax + by + cz + d = 0$ $[d \in \mathbb{R}]$.

- Réciproquement, a, b, c étant des nombres réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

M

Pour déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$, passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$, on peut procéder de l'une des deux manières suivantes.

1^{re} méthode

- écrire qu'une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$
- déterminer d sachant que : $A \in \mathcal{P}$

2^e méthode

- traduire analytiquement que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$$

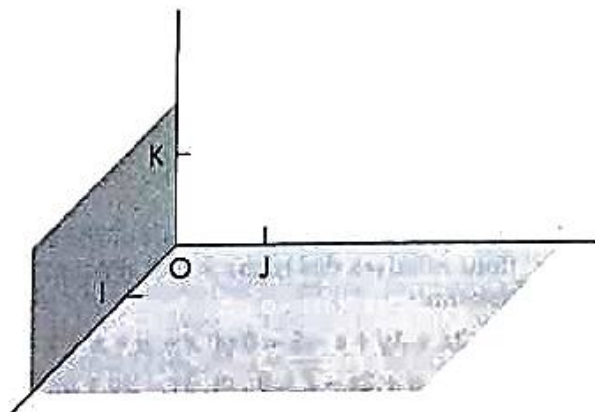
Cas particuliers

L'espace est muni du repère (O, I, J, K).

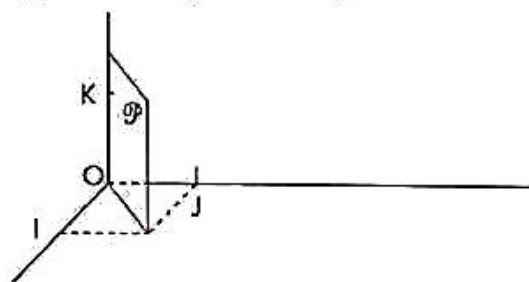
$z = 0$ est une équation du plan (OIJ)

$x = 0$ est une équation du plan (OJK)

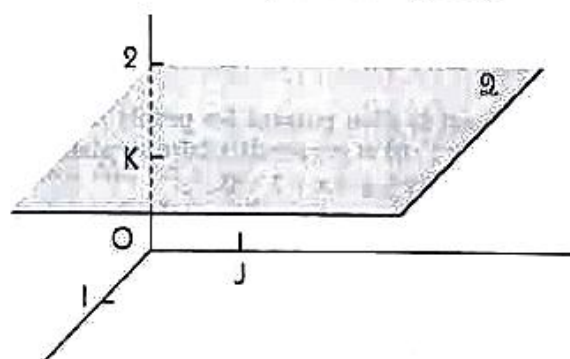
$y = 0$ est une équation du plan (OKI)



$x = y$ est une équation du plan $\mathcal{P}$



$z = 2$ est une équation du plan $\mathcal{Q}$



■ Exemple 1

Déterminons une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1; 2; -3)$ et perpendiculaire à la droite passant par les points $B(3; -5; 1)$ et $C(-1; 1; 3)$.

On a : $\vec{BC}(-4; 6; 2)$, le vecteur $\vec{n}(-2; 3; 1)$ est colinéaire à $\vec{BC}$, il est donc normal à $\mathcal{P}$.

1^{re} méthode

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x-1) + 3(y-2) + (z+3) = 0.$$

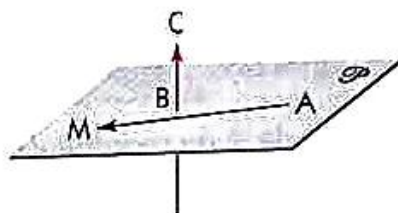
Une équation de $\mathcal{P}$ est donc : $-2x + 3y + z - 1 = 0$.

2^e méthode

$\vec{n}(-2; 3; 1)$ étant un vecteur normal à $\mathcal{P}$, une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme : $-2x + 3y + z + d = 0$.

$A(1; 2; -3)$ étant un point de $\mathcal{P}$, on obtient : $-2 \times 1 + 3 \times 2 - 3 + d = 0$ ou encore $d = -1$.

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc : $-2x + 3y + z - 1 = 0$.



■ Exemple 2

$\mathcal{P}$ est le plan d'équation : $2x - 3y + z - 4 = 0$.

Donner deux points de $\mathcal{P}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

- Les points $A(0; 0; 4)$ et $B(1; 1; 5)$ appartiennent à $\mathcal{P}$.
- Le vecteur $\vec{n}(2; -3; 1)$ est normal à $\mathcal{P}$.

Équation d'une sphère

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

■ Détermination d'une équation de sphère

On vérifie aisément les résultats suivants :

- La sphère de centre Ω et de rayon r ($r \in \mathbb{R}_+^*$) est l'ensemble des points M de l'espace, tels que : $\Omega M^2 = r^2$.
- La sphère de diamètre $[AB]$ ($A \neq B$) est l'ensemble des points M de l'espace, tels que : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

■ Exemple

$M(x; y; z)$ est un point de l'espace.

- S est la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon r ($r \in \mathbb{R}_+^*$).

$$M \in S \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$$

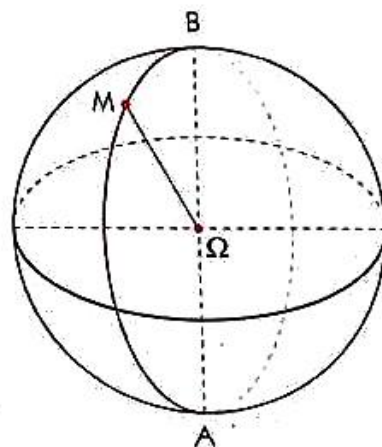
$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

- S' est la sphère de diamètre $[AB]$ avec $A(3; 1; 1)$ et $B(1; 2; 3)$

$$M \in S' \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-x)(1-x) + (1-y)(2-y) + (1-z)(3-z) = 0.$$

- Vérifier que S' est la sphère de centre $\Omega(2; 1,5; 2)$ et de rayon 3.



Exercices

- 2.c $\mathcal{P}$ est le plan passant les points $A(1; 0; 0)$ et $B(0; 1; 0)$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{Q}$ d'équation : $2x - y + z - 1 = 0$.

Donner un vecteur $\vec{u}$ normal à $\mathcal{Q}$.

Déterminer des nombres réels a, b, c pour que le vecteur $\vec{v}(a, b, c)$ soit normal à $\mathcal{P}$.

(On pourra calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \vec{AB}$.)

Écrire une équation du plan $\mathcal{P}$.

- 2.d Dans chacun des cas suivants, étudier les positions relatives des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations ci-dessous :

(1) $2x + 3y + z - 5 = 0$ et $x + y + z - 1 = 0$

(2) $x - y + 2z - 2 = 0$ et $3x - 3y + 6z - 6 = 0$

(3) $x - 2y + 3z - 2 = 0$ et $-3x - 5y - 9z - 5 = 0$

(4) $x + y + z - 4 = 0$ et $x - 2y + z - 3 = 0$

3.1. Orientation de l'espace

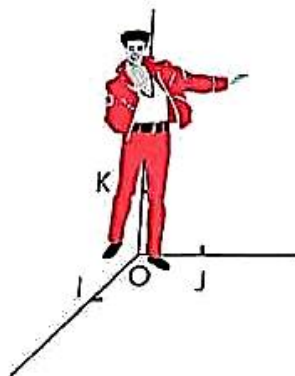
Repères de $\mathcal{E}$ – Base de $\mathcal{W}$

■ Orienter l'espace, c'est distinguer deux types de repères de $\mathcal{E}$

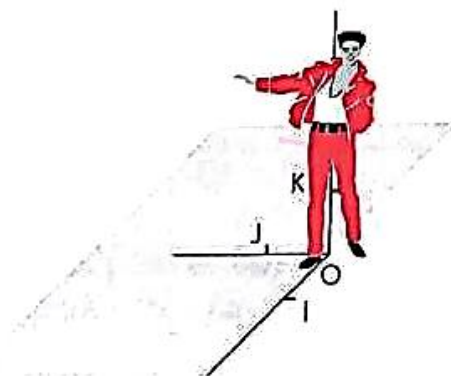
Cette classification peut se faire de la manière suivante :

(O, I, J, K) étant un repère de l'espace, on imagine un observateur, appelé **observateur d'Ampère**, ayant les pieds vers O , la tête vers K et regardant I .

– Si J est à gauche de l'observateur d'Ampère, le repère (O, I, J, K) est dit **direct**.



– Si J est à droite de l'observateur d'Ampère, le repère (O, I, J, K) est dit **indirect**.



■ Orienter l'espace revient aussi à distinguer deux types de bases de $\mathcal{W}$

En effet, (O, I, J, K) étant un repère de $\mathcal{E}$,

on sait que $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ est une base de $\mathcal{W}$ et (O, I, J) un repère du plan (OIJ) .

On admet que :

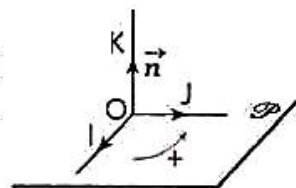
$$[(O, I, J, K) \text{ est un repère direct de } \mathcal{E}] \Leftrightarrow [(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK}) \text{ est une base directe de } \mathcal{W}]$$

Orientation d'un plan

$\mathcal{P}$ étant un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$, (O, I, J) un repère de $\mathcal{P}$,

$$[(O, I, J) \text{ est un repère direct de } \mathcal{P}] \Leftrightarrow [(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{n}) \text{ est une base directe de } \mathcal{W}]$$

Un plan dans l'espace orienté ne peut être orienté que par le choix d'un vecteur normal à ce plan.



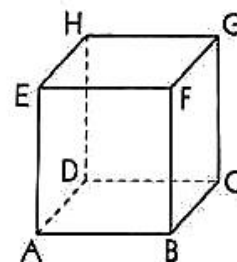
Exemples

ABCDEFGH est un cube.

– Les repères (D, A, C, H) , (F, B, E, G) et (A, D, E, B) sont directs.

– Les bases $(\vec{CD}, \vec{CB}, \vec{CG})$, $(\vec{HG}, \vec{HE}, \vec{HD})$ et $(\vec{EA}, \vec{EH}, \vec{EF})$ sont directes.

Le plan (ABC) étant orienté par le choix de son vecteur normal $\vec{AE}$, on a :



$$\text{MES}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{4} ; \text{MES}(\vec{DC}, \vec{DA}) = -\frac{\pi}{2}.$$

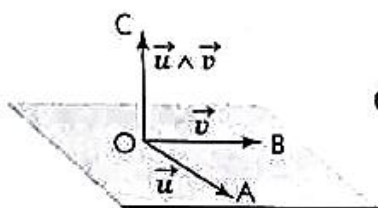
3.2. Produit vectoriel

Présentation du produit vectoriel

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs de l'espace, on appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini de la manière suivante :

- lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,
 $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe
 $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$



$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{OC} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} \vec{OC} \text{ est un vecteur normal à } (OAB) \\ (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) \text{ est une base directe} \\ \|\vec{OC}\| = OA \times OB \sin \widehat{AOB} \end{cases}$$

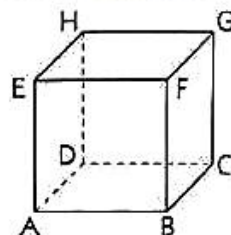
Exemple

ABCDEFGH est un cube de côté 1 de l'espace orienté.
 Calculer : $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$; $\vec{BA} \wedge \vec{BC}$; $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$; $\vec{AC} \wedge \vec{BD}$.

On constate que tous les vecteurs qui interviennent dans ces produits vectoriels ont des représentants dans le plan (ABC).

De plus $\vec{AE}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

On pourra donc exprimer chacun de ces produits vectoriels en fonction de $\vec{AE}$.



(1) on a : $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| = AB \times AD \times \sin \frac{\pi}{2} = 1$
 $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est une base directe
 donc : $\vec{AB} \wedge \vec{AD} = \vec{AE}$

(2) on a : $\|\vec{BA} \wedge \vec{BC}\| = BA \times BC \times \sin \frac{\pi}{2} = 1$
 $(\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BF})$ est une base indirecte
 donc : $\vec{BA} \wedge \vec{BC} = -\vec{AE}$

(3) on a : $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = AB \times AC \times \sin \frac{\pi}{4}$
 $= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$
 $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE})$ est une base directe
 donc : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{AE}$

(4) on a : $\|\vec{AC} \wedge \vec{BD}\| = AC \times BD \times \sin \frac{\pi}{2}$
 $= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1 = 2$
 $(\vec{AC}, \vec{BD}, \vec{AE})$ est une base directe
 donc : $\vec{AC} \wedge \vec{BD} = 2\vec{AE}$

Vecteurs colinéaires – Propriétés algébriques

Vecteurs colinéaires

La propriété suivante concernant la colinéarité des vecteurs est une conséquence immédiate de la définition du produit vectoriel. De cette propriété résulte celle concernant l'alignement des points.

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs de $\mathcal{W}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

■ Règles de calcul

Les propriétés algébriques suivantes que nous admettons sont les règles de calcul du produit vectoriel.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace, pour tout nombre réel k ,

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= -\vec{v} \wedge \vec{u} \\ (k\vec{u}) \wedge \vec{v} &= k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}\end{aligned}$$

■ Exemples

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs de $\mathcal{W}$, on a :

$$(\vec{u} + 3\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + 3\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs de $\mathcal{W}$, on a :

$$\begin{aligned}2\vec{u} \wedge (5\vec{u} - 3\vec{v}) &= (2\vec{u}) \wedge (5\vec{u}) + (2\vec{u}) \wedge (-3\vec{v}) \\ &= -6(\vec{u} \wedge \vec{v})\end{aligned}$$

■ Expression analytique d'un produit vectoriel dans une base orthonormée

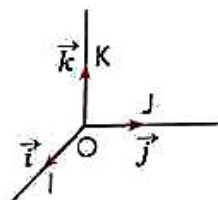
■ Produit vectoriel des vecteurs d'une base orthonormée

(O, I, J, K) est un repère orthonormé direct.

On pose : $\vec{OI} = \vec{i}$; $\vec{OJ} = \vec{j}$; $\vec{OK} = \vec{k}$.

D'après la définition du produit vectoriel, on obtient :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$



■ Coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormée

Activité

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe.

On veut déterminer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

(1) $\vec{u}(1; 5; -2)$ et $\vec{v}(0; 3; 0)$

(2) $\vec{u}(-3; 5; 1)$ et $\vec{v}(2; -4; -1)$

(3) $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ x, y, z, x', y', z' étant des nombres réels.

Pour cela, on pourra exprimer chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Propriété

Dans une base orthonormée directe,

si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$,

alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx')$.

■ Disposition pratique pour calculer les coordonnées d'un produit vectoriel

On donne $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$.

Pour calculer les coordonnées (p, q, r) de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on peut utiliser la disposition pratique suivante :

	(1)	(2)	(3)		
x	y	z	x	y	z
x'	y'	z'	x'	y'	z'
	↓	↓	↓		
	$p = yz' - zy'$		$q = zx' - xz'$		$r = xy' - yx'$

(p, q, r) sont les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

■ Exemple

Calculons les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ avec : $\vec{u}(-2; -1; 3)$ et $\vec{v}(4; 7; 1)$.

$$\begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 3 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 4 & 7 & 1 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & p & & q & & r \end{array}$$

$$p = -1 - 21 = -22$$

$$q = 12 + 2 = 14$$

$$r = -14 + 4 = -10$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v}(-22; 14; -10)$$

■ Exemples d'utilisations du produit vectoriel

■ Propriétés géométriques

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace. Ils définissent donc le plan (ABC). De plus, on sait que :

$$\text{aire du triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$$

$$\text{aire du parallélogramme construit sur [AB] et [AC]} = 2 \text{ aires du triangle ABC}$$

Il en résulte les propriétés géométriques suivantes du produit vectoriel :

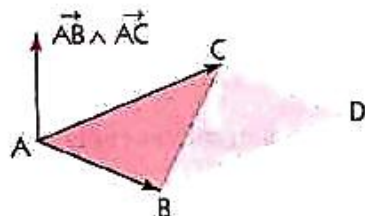
Propriétés

A, B, C sont des points de l'espace orienté.

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

L'aire du parallélogramme construit sur [AB] et [AC] est $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$



ABDC étant le parallélogramme construit sur [AB], [AC],

$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AB} \wedge \vec{AC})$ est une base directe,

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \text{Aire de ABDC.}$$

■ Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

On donne les points : A(-1; 5; 3), B(2; -2; 1), C(0; 4; 7)

Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

Quelle est l'aire du triangle ABC ? Déterminer une équation du plan (ABC).

Calcul de $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$

On a : $\vec{AB}(3; -7; -2)$; $\vec{AC}(1; -1; 4)$; $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(-30; -14; 4)$.

Aire du triangle ABC

Les points A, B et C ne sont pas alignés car $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est non nul, ils déterminent un plan (ABC) et :

$$\text{Aire de ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-30)^2 + 4^2 + (-14)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1112}$$

Équation du plan (ABC)

Le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est normal au plan (ABC) ; il en est de même du vecteur $\vec{n}(-15; -7; 2)$.

On obtient : $-15x + 2y - 7z + 14 = 0$.

TP Corps commutatif – Espace vectoriel

Ce TP a pour objet de regrouper, par des concepts unificateurs, des ensembles de référence muni « d'opérations » étudiés tout le long du secondaire.

Ce sont d'une part : $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$, d'autre part : $(\mathcal{V}, +, \bullet)$ et $(\mathcal{W}, +, \bullet)$.

Notion de corps commutatif

Loi de composition interne

Définition

L'addition des nombres réels, notée $+$, est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on dit que c'est une loi de composition interne définie dans $\mathbb{R}$.

Exemples

– L'addition des nombres complexes, des vecteurs du plan, des vecteurs de l'espace, sont des lois de composition interne définies respectivement dans $\mathbb{C}$, dans $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{W}$.

add +

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$	$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$	$\mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$
$(x; y) \mapsto x + y$	$(z; t) \mapsto z + t$	$(\vec{u}; \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$	$(\vec{u}; \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$

– La multiplication des nombres réels, des nombres complexes, notée $\times$, est une loi de composition interne définie respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

mul $\times$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
$(x; y) \mapsto x \times y$	$(z; t) \mapsto z \times t$

Notion de groupe commutatif

• L'addition possède les mêmes propriétés dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$, dans $\mathcal{V}$, dans $\mathcal{W}$.

	a, b et c sont des éléments de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$)	$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des éléments de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$)
(1) L'addition est commutative	$a + b = b + a$	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
(2) L'addition est associative	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(3) L'addition admet un élément neutre	$a + 0 = a$	$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
(4) Tout élément admet un opposé	$a + (-a) = 0$	$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

On résume les propriétés (1), (2), (3) et (4) en disant que $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathcal{V}, +)$, $(\mathcal{W}, +)$ sont des groupes commutatifs.

• La multiplication possède les mêmes propriétés dans $\mathbb{R}^*$, dans $\mathbb{C}^*$.

	a, b et c sont des éléments de $\mathbb{R}^*$ (resp. de $\mathbb{C}^*$)
(5) La multiplication est commutative	$a \times b = b \times a$
(6) La multiplication est associative	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
(7) La multiplication admet un élément unitaire	$a \times 1 = a$
(8) Tout élément admet un inverse	$a \times \frac{1}{a} = 1$

On résume les propriétés (5), (6), (7) et (8) (qui sont analogues aux propriétés (1), (2), (3) et (4)) en disant que $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.

■ Notion de corps commutatif

- Propriété concernant la multiplication et l'addition des nombres réels (respectivement des nombres complexes)

	a et b sont des éléments de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$)
(9) La multiplication est distributive par rapport à l'addition	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

On résume les propriétés (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) et (9) en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps commutatifs.

■ Notion d'espace vectoriel

■ Loi de composition externe

Définition

La multiplication d'un vecteur du plan par un nombre réel, notée $\bullet$, est une application de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$. On dit que c'est une loi de composition externe définie dans $\mathcal{V}$ et à scalaires dans $\mathbb{R}$.

Exemple

La multiplication d'un vecteur de l'espace par un nombre réel est une loi de composition externe définie dans $\mathcal{W}$ et à scalaires dans $\mathbb{R}$.

mul •	$\mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$	$\mathbb{R} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$
	$(a; \vec{u}) \mapsto a\vec{u}$	$(a; \vec{u}) \mapsto a\vec{u}$

■ Notion d'espace vectoriel

La multiplication d'un vecteur par un nombre réel possède les mêmes propriétés dans $\mathcal{V}$ et dans $\mathcal{W}$.

a et b sont des nombres réels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de $\mathcal{V}$ (respectivement de $\mathcal{W}$)	
(10)	$1 \vec{u} = \vec{u}$
(11)	$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
(12)	$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
(13)	$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

On résume les propriétés (1), (2), (3), (4), (10), (11), (12) et (13) en disant que $(\mathcal{V}, +, \bullet)$ et $(\mathcal{W}, +, \bullet)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Vecteurs et points de l'espace

Vecteurs de l'espace

1 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Démontrer que les vecteurs :

$$\frac{5}{2}\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{et} \quad -\frac{5}{3}\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

sont colinéaires.

2 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base. Dans chacun des cas suivants, on donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- (1) $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(a; 5; 0)$
 (2) $\vec{u}(1; 5; 3)$ et $\vec{v}(2 + a; 2a + 1; a)$
 (3) $\vec{u}(2a - 5; 19 - 4a; -3)$ et $\vec{v}(6; 15; -6(\frac{a}{7} + 2))$

Peut-on déterminer a pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires ?

3 Dans chacun des cas suivants, dire s'il existe un nombre réel λ tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Préciser cette valeur.

- (1) $\vec{u}(1; -2; 5)$ et $\vec{v}(\lambda; 1; 0)$
 (2) $\vec{u}(5; 1; 3)$ et $\vec{v}(4 + \lambda; \lambda; 2\lambda + 1)$
 (3) $\vec{u}(7; 0; 4)$ et $\vec{v}(\lambda; 2\lambda; 1)$
 (4) $\vec{u}(\lambda; 1; 4)$ et $\vec{v}(8; 2; \lambda)$

4 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Dans chacun des cas suivants, trouver les nombres réels λ et μ pour lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- (1) $\vec{u}(1; 3; \lambda)$ et $\vec{v}(2; \mu; 5)$
 (2) $\vec{u}(\lambda; +2;)$ et $\vec{v}(-1; 3; 2)$

5 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base.
Dans chacun des cas suivants, trouver les nombres a et b pour lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

- (1) $\vec{u}(-3; 2; a)$ et $\vec{v}(1; b; 1)$
 (2) $\vec{u}(a; (a-1); b)$ et $\vec{v}(-2; -3; 1)$

6 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne quatre points A, B, C et D de l'espace $\mathcal{E}$, tels que :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} & \vec{AC} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{AD} &= \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \end{aligned}$$

Déterminer les points P tels que (DP) appartienne au plan (OAB) et $\vec{AP}$ soit un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{AD}$.

7 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base.
Dans chacun des cas suivants, trouver le nombre réel a pour lequel les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

- (1) $\vec{u}(-1; -1; 1)$ $\vec{v}(1; -1; 1)$ $\vec{w}(-1; 0; a)$
 (2) $\vec{u}(1; -1; 1)$ $\vec{v}(1; 1; -1)$ $\vec{w}(2; 1 + a; -3)$

Barycentre

8 Dans l'espace $\mathcal{E}$, on donne un triangle ABC. On désigne par A', B', C', les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].
Démontrer que pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$,
 $MA + MB + MC = MA' + MB' + MC'$

Produit scalaire

9 L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé. On donne les points :

$$A(-1; 1; -1), B(0; 1; 0), C(2; 1; 1).$$

1. Calculer les produits scalaires :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} ; \vec{BA} \cdot \vec{BC} ; \vec{CA} \cdot \vec{CB}.$$

2. Déterminer une valeur approchée, en degré, des angles : $\widehat{BAC}$; $\widehat{CBA}$; $\widehat{ACB}$.

10 L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J, K).

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D tels que AJOIBCKD soit un cube.
 2. Déterminer le centre Ω de ce cube.
 3. Calculer le produit scalaire $\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega B}$.
 4. Déterminer une valeur approchée, en degré, de l'angle $\widehat{AOB}$.

11 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{W}$. Donner une expression plus simple de chacun des nombres réels suivants :

- (1) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ (3) $\|\vec{u}\|^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2$
 (2) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ (4) $\|\vec{u} + 2\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

12 Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan P :

- (1) P : $2x + y - 4z = 0$
 (2) P : $3x - 5y + 2z - 1 = 0$
 (3) P : $x + y = 0$
 (4) P : $x - z + 1 = 0$
 (5) P : $x = -1$

13 Dans chacun des cas suivants, établir une équation du plan P passant par le point A, dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.

- (1) A(1; 1; 0) ; $\vec{n}(-1; 1; 1)$
 (2) A(2; 1; -1) ; $\vec{n}(1; 0; 0)$
 (3) A(1; 0; 1) ; $\vec{n}(0; 1; -1)$

14 On donne les points A(1; 2; -1) et B(0; 1; 3).
Établir une équation du plan médiateur de segment [AB].

15 On donne le point A(1; 2; 3) et le vecteur $\vec{u}(1; 2; -1)$.
Déterminer une équation de l'ensemble des points M tels que : $\vec{u} \cdot \vec{AM} = 2$.
Quelle est la nature de cet ensemble ?

16 L'espace $\mathcal{E}$ est muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :
 $A(1; 2; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $C(4; 5; 1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.
2. Trouver les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
 $\vec{u}$ soit unitaire, colinéaire à $\vec{AB}$ et de même sens que $\vec{AB}$;
 $\vec{v}$ soit unitaire, colinéaire à $\vec{AC}$ et de même sens que $\vec{AC}$.
3. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe.
 Déterminer le point D tel que $\vec{AD} = \vec{w}$.
 Placer dans l'espace $\mathcal{E}$ les points A, B, C et D.

17 L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.
 1. Trouver un vecteur normal au plan déterminé par les points : $A(1; -1; 2)$, $B(2; 0; -1)$, $C(0; 2; 1)$.
 2. Calculer l'aire du triangle ABC.

18 L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J, K) .
 On considère les points :
 $A(1; 2; 1)$, $B(2; 3; 2)$, $C(2; 0; 2)$.

1. Vérifier que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.
2. Trouver les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
 $\vec{u}$ soit unitaire, colinéaire à $\vec{AB}$ et de même sens que $\vec{AB}$;
 $\vec{v}$ soit unitaire, colinéaire à $\vec{AC}$ et de même sens que $\vec{AC}$.
3. Trouver le vecteur unitaire $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe.
 Quel est l'extrémité du représentant d'origine A de $\vec{w}$.
 Quelle est l'extrémité D du représentant d'origine A de $\vec{w}$?
4. Placer les points A, B, C, D.

19 L'espace $\mathcal{E}$ est muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 Déterminer un vecteur normal au plan déterminé par les points : $A(2; -1; 1)$; $B(1; 0; -2)$; $C(3; 4; 1)$.
 Trouver l'aire du triangle ABC.
 Faire une figure.

20 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les vecteurs $\vec{u}(0; 3; 2)$ et $\vec{v}(5; 0; 2)$.

1. Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
2. Déterminer un vecteur non nul $\vec{n}$ qui soit orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Montrer qu'un vecteur $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si, il est colinéaire à $\vec{n}$.

21 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans chacun des cas suivants, trouver le nombre réel λ pour lequel les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

- (1) $\vec{u}(-1; -1; 1)$, $\vec{v}(1; -1; 1)$ et $\vec{w}(-1; 0; \lambda)$
- (2) $\vec{u}(1; -1; 1)$, $\vec{v}(1; 1; -1)$ et $\vec{w}(2; 1 + \lambda; -3)$

Produit vectoriel

22 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Dans chacun des cas suivants, calculer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| (1) $\vec{u}(1; 5; 3)$ | et $\vec{v}(0; 4; -1)$ |
| (2) $\vec{u}(7; 9; 0)$ | et $\vec{v}(-1; 2; -4)$ |
| (3) $\vec{u}(-2; -2; -1)$ | et $\vec{v}(3; 5; 7)$ |
| (4) $\vec{u}(5; 0; 1)$ | et $\vec{v}(-2; 8; 0)$ |

23 Dans un espace $\mathcal{E}$, on donne deux parallélogrammes ABCD et tels que les droites (AP), (BQ), (CR) et (DS) soient parallèles.

On désigne par $\vec{n}$ un vecteur directeur unitaire de la droite (PP').

On pose : $\vec{u} = \vec{AB}$; $\vec{v} = \vec{AD}$; $\vec{u}' = \vec{PQ}$; $\vec{v}' = \vec{PS}$.

1. Faire la figure et démontrer que :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{n} = (\vec{u}' \wedge \vec{v}') \wedge \vec{n}.$$

2. Donner une interprétation géométrique de l'égalité précédente.

24 L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.

On donne trois points $P(1; 2; -1)$, $Q(3; -1; 4)$ et $R(2; 6; 2)$.

S est un point de $\mathcal{E}$ tel que PQRS est un parallélogramme.

1. Construire le parallélogramme PQRS.

2. Trouver les coordonnées du point S.

3. Trouver l'aire du parallélogramme PQRS.

25 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Trouver un vecteur unitaire orthogonal aux vecteurs $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{j} + \vec{k}$.

26 L'espace $\mathcal{E}$ est muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne trois points :

$$A(1; 1; 2), B(2; 1; 3) \text{ et } C(0; 2; 1).$$

D est un point de $\mathcal{E}$ tel que ABCD soit un parallélogramme.

1. Construire le parallélogramme ABCD.
2. Trouver les coordonnées du point D.
3. Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

27 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base orthonormée directe.

On donne les vecteurs :

$$\vec{u}(4; 8; 1), \vec{v}(2; 1; -2) \text{ et } \vec{w}(3; -4; 12).$$

1. Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v}$.

2. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ puis $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

3. Calculer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Comparer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

28 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne le vecteur $\vec{n}(1; -3; 2)$.

1. Déterminer deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ qui soient orthogonaux à $\vec{n}$.

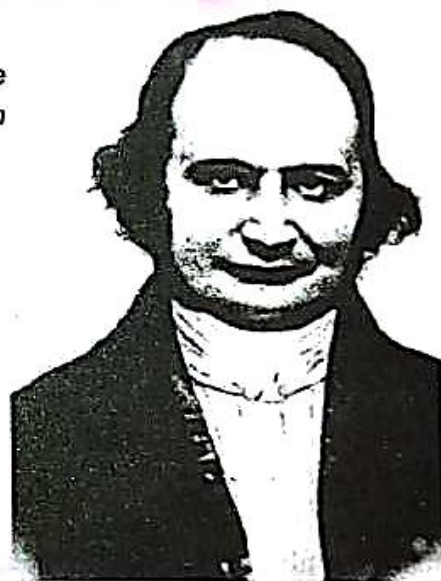
2. Démontrer qu'un vecteur $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ est orthogonal à $\vec{n}$ si et seulement si, il est coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La méthode de pivot due à Gauss, longtemps délaissée, fut réhabilitée, aidée en cela par son caractère de calcul automatique parfaitement adapté à l'utilisation de l'informatique.

Cependant, l'étude des systèmes linéaires a débuté avant l'utilisation des vecteurs.

Ils étaient résolus par la méthode des déterminants auxquels le mathématicien allemand Carl Jacobi donna leur forme définitive.

Jacobi fut reconnu comme le plus grand calculateur de son temps.



© Pôlais de la Découverte, Paris

Carl Jacobi
mathématicien allemand – 1804-1851.

SOMMAIRE

1. Résolution d'un système linéaire
par la méthode de Gauss 260
2. Résolution de problèmes 266

1

Résolution d'un système linéaire par la méthode de Gauss

1.1. Principe de la méthode de Gauss

Exemple introductif

Réolvons le système linéaire suivant d'inconnue $(x; y; z)$: $(\Sigma) \begin{cases} 2x + y + z = 0 & (E_1) \\ -x + 3y + z = 1 & (E_2) \\ 4x - 2y + 5z = 2 & (E_3) \end{cases}$

Transformons le système (Σ) en un système triangulaire équivalent.

Élimination de x dans (E_2) et dans (E_3)

On remplace : (E_2) par $(E_1) + 2(E_2)$
 (E_3) par $-2(E_1) + (E_3)$

On obtient le système équivalent suivant :

$$(\Sigma') \begin{cases} 2x + y + z = 0 & (E_1) \\ 7y + 3z = 2 & (E_2') \\ -4y + 3z = 2 & (E_3') \end{cases}$$

Élimination de y dans (E_3')

On remplace : (E_3') par $4(E_2') + 7(E_3')$.

On obtient le système triangulaire équivalent suivant :

$$(\Sigma'') \begin{cases} 2x + y + z = 0 & (E_1) \\ 7y + 3z = 2 & (E_2') \\ 33z = 22 & (E_3'') \end{cases}$$

(Σ'') admet une seule solution : $(-\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3})$.

Principe de la méthode de Gauss

Vocabulaire

- Les équations d'un système sont appelées les **lignes** de ce système et sont notées : $L_1, L_2, \dots$
- Comme le montre l'exemple introductif, des opérations élémentaires sur les lignes permettent de transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent.

Opérations élémentaires	Codage
Échange de deux lignes L_i et L_j	$L_i \leftrightarrow L_j$
Remplacement de la ligne L_i par la combinaison λL_i obtenue en multipliant chaque coefficient de L_i par le nombre réel λ supposé non nul.	$L_i \leftarrow \lambda L_i$
Remplacement de la ligne L_i par la combinaison $\alpha L_i + \beta L_j$ obtenue en additionnant membre à membre les lignes αL_i et βL_j , α étant un nombre réel non nul et β un nombre réel quelconque.	$L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$

Exemple

Chacun des systèmes obtenus est équivalent au système donné.

Systèmes donnés	Systèmes obtenus	Opérations élémentaires effectuées
$\begin{cases} 3x + y - z - u = 2 & L_1 \\ 2x - 2y + z + u = -2 & L_2 \\ 2x - 2y + 4z + 6u = 4 & L_3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 2y + z + u = -2 \\ 3x + y - z - u = 2 \\ 2x - 2y + 4z + 6u = 4 \end{cases}$	$L_1 \leftrightarrow L_2$
	$\begin{cases} 3x + y - z - u = 2 \\ 2x - 2y + z + u = -2 \\ x - y + 2z + 3u = 2 \end{cases}$	$L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$
	$\begin{cases} 3x + y - z - u = 2 \\ 8y - 5z - 5u = 10 \\ 2x - 2y + 4z + 6u = 4 \end{cases}$	$L_2 \leftarrow 2L_1 - 3L_2$

■ Méthode de GAUSS

La méthode de Gauss consiste à transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent en exécutant des opérations élémentaires sur les lignes.

M

Pour résoudre un système linéaire par la méthode de GAUSS, on procède comme suit :

- on vérifie que, dans la ligne L_1 , le coefficient de la première inconnue est non nul, sinon on échange L_1 avec une ligne dont le coefficient de la première inconnue est non nul ;
- à l'aide de l'opération élémentaire $[L_i \leftarrow \lambda L_i + \beta L_1]$ on annule tous les coefficients de la première inconnue dans les autres lignes ;
- on recommence le procédé pour la deuxième inconnue, la troisième inconnue, ..., jusqu'à obtention d'un système triangulaire.

■ Exemple

Réolvons le système linéaire suivant d'inconnue $(x ; y ; z ; t) : (\Sigma)$

$$\begin{cases} y + z - 2t = 1 \\ x - y + z + t = 1 \\ 3x + 3y - z - t = 3 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 4 \end{cases}$$

	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Le 1 ^{er} coefficient de L_1 est nul Échange de L_1 et L_2	$L_1 \leftrightarrow L_2$	$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y + z - 2t = 1 \\ 3x + 3y - z - t = 3 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 4 \end{cases}$
Élimination de x dans la ligne L_3 Élimination de x dans la ligne L_4	$L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3$ $L_4 \leftarrow -2L_1 + L_4$	$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y + z - 2t = 1 \\ 6y - 4z - 4t = 0 \\ -y + t = 2 \end{cases}$
Élimination de y dans la ligne L_3 Élimination de y dans la ligne L_4	$L_3 \leftarrow -6L_2 + L_3$ $L_4 \leftarrow L_2 + L_4$	$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y + z - 2t = 1 \\ -10z + 8t = -6 \\ z - t = 3 \end{cases}$
Élimination de z dans la ligne L_4	$L_4 \leftarrow L_3 + 10L_4$	$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y + z - 2t = 1 \\ -10z - 8t = -6 \\ -2t = 4 \end{cases}$

Le système triangulaire obtenu conduit à la solution unique : $(-\frac{32}{5} ; -\frac{36}{5} ; \frac{11}{5} ; -2)$.

Remarque

Dans le cas d'un système linéaire d'inconnue $(x ; y ; z)$, l'étude faite dans le chapitre précédent sur les positions relatives des plans permet de donner une interprétation géométrique d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^3$.

Exercices

1.a Le triplet $(1 ; 1 ; 1)$ est-il solution du système :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x + 3z = 2 \end{cases} \quad ?$$

1.b Dans chacun des cas suivants, dire si les systèmes (Σ) et (Σ') sont équivalents :

$$(1) \quad (\Sigma) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases} \quad (\Sigma') \begin{cases} L_2 \\ L_2 - L_3 \\ L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$(2) \quad (\Sigma) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases} \quad (\Sigma') \begin{cases} L_1 \\ L_1 + L_3 \\ L_3 \end{cases}$$

$$(3) \quad (\Sigma) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases} \quad (\Sigma') \begin{cases} L_2 \\ L_1 + L_3 \\ L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$(4) \quad (\Sigma) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases} \quad (\Sigma') \begin{cases} L_2 \\ L_1 - L_3 \\ L_2 + L_3 \end{cases}$$

1.2. Exemples de résolution de systèmes

Dans ce paragraphe, l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Exemple 1

Réolvons le système linéaire suivant, d'inconnue $(x; y; z)$: $(\Sigma) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = -2 \end{cases}$

Résolution

Choisissons l'une des trois inconnues, par exemple z comme paramètre. On ramène le système (Σ) à un système (Σ') de deux équations à deux inconnues : $(\Sigma') \begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ -x + y = -2 - 2z \end{cases}$

La résolution de (Σ') conduit à la solution définie par : $x = 1 + \lambda$; $y = -1 - \lambda$; $z = \lambda$ [$\lambda \in \mathbb{R}$].

Le système (Σ) a donc une infinité de solutions constituées des triplets $(1 + \lambda; -1 - \lambda; \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Interprétation géométrique

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont les plans d'équations respectives :

$$2x + y - z - 1 = 0$$

$$-x + y + 2z + 2 = 0$$

$\vec{n}(2; 1; -1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}_1$

$\vec{n}'(-1; 1; 2)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}_2$

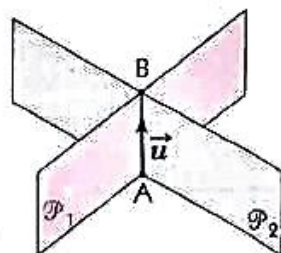
$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas coplanaires, ce qui justifie que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

Tout point commun à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ a pour coordonnées $(1 + \lambda; -1 - \lambda; \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécantes suivant la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(1, -1, 0)$

(et le point $B(0; 0; -1)$) et de vecteur directeur $\vec{u}(1; -1; 1)$.

Illustration graphique



Exemple 2

Réolvons le système linéaire suivant, d'inconnue $(x; y; z)$: $(\Sigma) \begin{cases} 2x + y - z = 1 & (L_1) \\ -x + y + 2z = -2 & (L_2) \\ x + 2y + z = -1 & (L_3) \end{cases}$

Résolution

	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Conservation de L_1 Élimination de x dans L_2 Élimination de x dans L_3	$L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2$ $L_3 \leftarrow -L_1 + 2L_3$	$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \\ 3y + 3z = -3 \end{cases}$
Élimination de y dans L_3	$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$	$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$

– Le dernier système obtenu est équivalent au système suivant de deux équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \end{cases}$$

– Choisissons l'une des trois inconnues, par exemple z comme paramètre. On ramène (Σ) au système suivant de deux équations linéaires à deux inconnues : $\begin{cases} 2x + y = z + 1 \\ 3y = -3z - 3 \end{cases}$

La résolution de ce système conduit à la solution $(z + 1, -z - 1, z)$.

– Le système (Σ) admet donc une infinité de solutions : les triplets de la forme $(z + 1; -z - 1; z)$, avec $z \in \mathbb{R}$.

Interprétation géométrique

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans d'équations respectives :

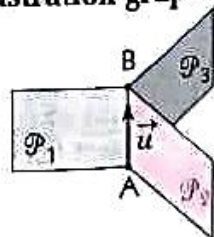
$$2x + y - z - 1 = 0$$

$$-x + y + 2z + 2 = 0$$

$$x + 2y + z + 1 = 0$$

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants suivants la droite passant par le point $A(1; -1; 0)$ (et le point $B(0; 0; -1)$) et de vecteur directeur $\vec{u}(1, -1, 1)$.

Illustration graphique



Exemple 3

Réolvons le système linéaire suivant, d'inconnue $(x; y; z) : (\Sigma)$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

Résolution	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Conservation de L_1 Élimination de x dans L_2 Élimination de x dans L_3	$L_2 \leftarrow -3L_1 + 2L_2$ $L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$	$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 3y + z = 1 \\ 3y + z = 2 \end{cases}$
Élimination de y dans L_3	$L_3 \leftarrow -L_2 + L_3$	$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + z = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$

Le système triangulaire obtenu n'admet pas de solution ; donc le système (Σ) n'a pas de solution.

Interprétation géométrique

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans d'équations respectives :

$$2x + y - z - 1 = 0$$

$$3x + 3y - z - 2 = 0$$

$$2x + 4y - 3 = 0$$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ n'ont aucun point commun.

Étudions leurs positions relatives

$\vec{n}_1(2; 1; -1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

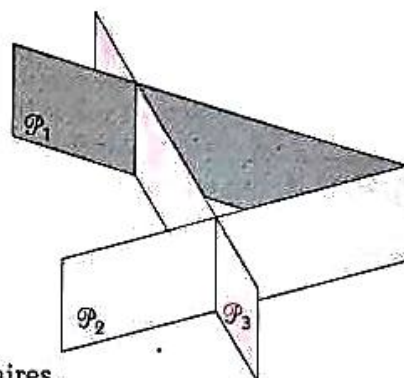
$\vec{n}_2(3; 3; -1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$

$\vec{n}_3(2; 4; 0)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$

Parmi les vecteurs $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$, il n'en existe pas deux qui soient colinéaires.

Donc parmi les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$, il n'en existe pas deux qui soient parallèles.

Illustration graphique



Exemple 4

Réolvons le système linéaire suivant, d'inconnue $(x; y; z) : (\Sigma)$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ -6x + 3y + 3z = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

Résolution	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Conservation de L_1 Élimination de x dans L_2 Élimination de x dans L_3	$L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2$ $L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3$	$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 0 = 7 \\ -3y - z = 8 \end{cases}$

Le système obtenu n'admet pas de solution ; donc le système (Σ) n'a pas de solution.

Interprétation géométrique

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans d'équations respectives :

$$2x - y - z - 2 = 0$$

$$-6x + 3y + 3z - 1 = 0$$

$$x + y + 3 = 0$$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ n'ont aucun point commun.

Étudions leurs positions relatives

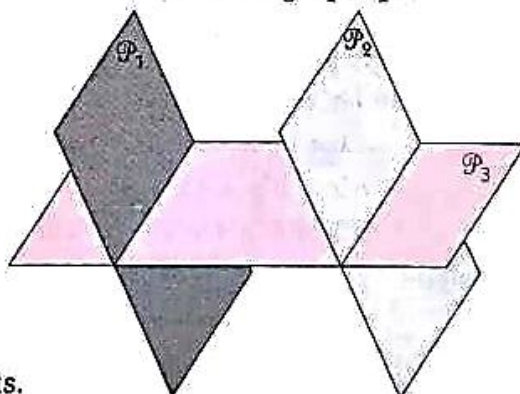
$\vec{n}_1(2; -1; -1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

$\vec{n}_2(-6; 3; 3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$

$\vec{n}_3(1; 1; 0)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$

On en déduit que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants.

Illustration graphique



Exemple 5

Réolvons le système linéaire suivant d'inconnue $(x; y; z)$: (Σ)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ -x + 3y - 2z = 7 \\ 5x - 2y - z = -8 \end{cases}$$

Résolution	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Conservation de L_1 Élimination de x dans L_2 Élimination de x dans L_3	$L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2$ $L_3 \leftarrow -5L_1 + 2L_3$	$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 5y - 3z = 19 \\ y - 7z = -41 \end{cases}$
Élimination de y dans L_3	$L_3 \leftarrow L_2 - 5L_3$	$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 5y - 3z = 19 \\ 32z = 224 \end{cases}$

La résolution du système triangulaire conduit à la solution unique : $(3; 8; 7)$.

Interprétation géométrique

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans d'équations respectives :

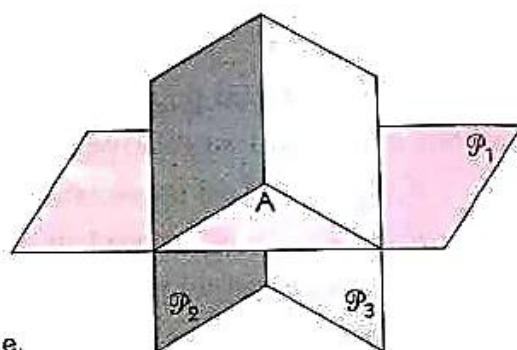
$$2x - y + z - 5 = 0$$

$$-x + 3y - 2z - 7 = 0$$

$$5x - 2y - z - 8 = 0$$

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ont en commun l'unique point A $(3; 8; 7)$.

Illustration graphique



• Les systèmes ci-dessous admettent chacun une solution unique. Résoudre ces systèmes par la méthode de Gauss.

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + y + z = -1 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

$$(\Sigma_3) \begin{cases} -3x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$(\Sigma_4) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x + 3z = 2 \end{cases}$$

Interprétations géométriques d'un système dans $\mathbb{R}^3$

– L'interprétation géométrique de l'exemple 1, fournit un cas de positions relatives de deux plans non parallèles.

– Les interprétations géométriques des exemples 2, 3, 4 et 5 fournissent des cas de positions relatives de trois plans non parallèles.

• Compléter ces exemples afin qu'ils fournissent tous les cas possibles traduisant les positions relatives de deux plans, de trois plans.

Le tableau récapitulatif suivant décrit le cas général :

$(a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c''$ et d'' sont des nombres réels tels que (a, b, c) , (a', b', c') et (a'', b'', c'') sont différents de $(0, 0, 0)$.

On a considéré les équations :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad L_1 ;$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad L_2 ;$$

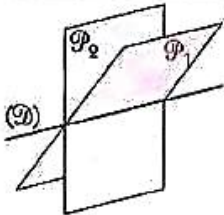
$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \quad L_3.$$

On a désigné par $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les plans d'équations respectives L_1 , L_2 , L_3 ;
par (Σ) le système L_1 et L_2 ,
par (Σ') le système L_1 et L_2 et L_3 .

TABLEAU RÉCAPITULATIF

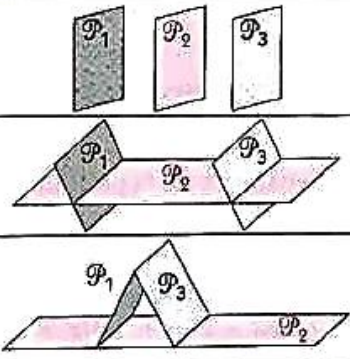
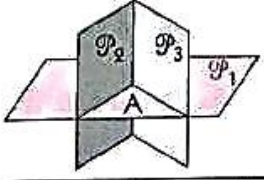
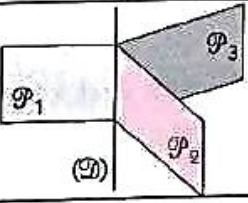
① Système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

L'ensemble S des solutions de (Σ) est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Positions relatives de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$	Illustration graphique	Ensemble S des solutions de (Σ)
$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$		(Σ) a un infinité de solutions ; S est l'ensemble des triplets $(x ; y ; z)$ tels que : $ax + by + cz = d$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$		(Σ) n'a pas de solution ; $S = \emptyset$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\mathcal{D})$		(Σ) a un infinité de solutions ; S est l'ensemble des triplets de coordonnées $(x ; y ; z)$ des points de $(\mathcal{D})$

② Système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

L'ensemble S' des solutions de (Σ') est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

Positions relatives de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$	Illustration graphique	Ensemble S' des solutions de (Σ')
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$		(Σ') n'a pas de solution ; $S' = \emptyset$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{A\}$		(Σ') a une seule solution : $(x_A ; y_A ; z_A)$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = (\mathcal{D})$		(Σ') a un infinité de solutions ; S' est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $(\mathcal{D})$
$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$		(Σ') a un infinité de solutions ; S' est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $\mathcal{P}_1$

2

Résolution de problèmes

Exemple 1

Déterminons la fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant les conditions :
 $P(-1) = -2$; $P(2) = 7$ et $P'(1) = 4$.

Choix des inconnues

Désignons par a, b, c les coefficients de la fonction polynôme P définie par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Mise en équation

On a : $P'(x) = 2ax + b$

Les conditions $P(-1) = -2$; $P(2) = 7$; $P'(1) = 4$ donnent le système : $(\Sigma) \begin{cases} a - b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$

La résolution du système (Σ) permet d'obtenir : $a = 1$; $b = 2$; $c = -1$.

Solution

La fonction polynôme P est définie par : $P(x) = x^2 + 2x - 1$.

Exemple 2

Un potier fabrique trois types différents A, B, C de canaris.

Pour fabriquer un canari du type A, le potier a besoin de : 40 kg d'argile, 60 litres d'eau et 15 kg de bois de chauffage.

Pour fabriquer un canari du type B, le potier a besoin de : 18 kg d'argile, 20 litres d'eau et 7 kg de bois de chauffage.

Pour fabriquer un canari du type C, le potier a besoin de : 70 kg d'argile, 110 litres d'eau, 35 kg de bois de chauffage.

En une semaine, le potier utilise pour la fabrication de ces canaris : 3 656 kg d'argile, 5 040 litres d'eau et 1 494 kg de bois de chauffage.

Déterminer le nombre de canaris de chaque type que ce potier fabrique ainsi en une semaine.

Choix des inconnues

Soit x le nombre de canaris de type A, y le nombre de canaris de type B et z le nombre de canaris du type C fabriqués en une semaine.

Mise en équation

La traduction de l'énoncé conduit au système : $(\Sigma) \begin{cases} 40x + 18y + 70z = 3\,656 \\ 60x + 20y + 110z = 5\,040 \\ 15x + 7y + 35z = 1\,494 \end{cases}$

La résolution du système (Σ) permet d'obtenir : $x = 38$; $y = 72$; $z = 12$.

Solution

En une semaine, le potier fabrique 38 canaris de type A, 72 canaris de type B et 12 canaris de type C.

Exemple 3

Déterminer une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant les conditions :
 $f(0) = 0$; pour tout nombre réel x , $f(x) = x + f(x-2)$.

Choix des inconnues

Désignons par a, b, c, d les nombres réels tels que la fonction polynôme f est définie par :
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Mise en équation

– La condition (1) : $f(0) = 0$ se traduit par (1') : $d = 0$.

– La condition (2) : pour tout nombre réel x , $f(x) = x + f(x-2)$

se traduit par (2') : pour tout nombre réel x , $a[x^3 - (x-2)^3] + b[x^2 - (x-2)^2] + 2c = x$.

Pour déterminer les nombres réels a, b, c formons trois équations contenant ces trois inconnues. Il suffit pour cela d'attribuer dans (2') au nombre réel x trois valeurs : $x = 2$; $x = 3$; $x = 4$.

On obtient le système : $(\Sigma) \begin{cases} 8a + 4b + 2c = 2 \\ 26a + 8b + 2c = 3 \\ 56a + 12b + 2c = 4 \end{cases}$

La résolution du système (Σ) permet d'obtenir : $a = 0$; $b = \frac{1}{4}$; $c = \frac{1}{2}$.

Solution

La fonction polynôme f est définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$.

Exemple 4

Une usine fabrique trois produits différents A, B et C. La fabrication d'une unité de produit nécessite 5 heures de travail pour A, 3 heures pour B et $\frac{1}{3}$ heure pour C.

L'usine fabrique 100 unités de ces produits pendant 100 heures de travail, le nombre d'unités du produit B étant le tiers du nombre d'unités de A. Parmi ces 100 unités, combien d'unités de chaque produit l'usine fabrique-t-elle ?

■ Choix des inconnues et mise en équation

Désignons par :

a le nombre d'unités du produit A fabriquées en 100 heures de travail

b le nombre d'unités du produit B fabriquées en 100 heures de travail

c le nombre d'unités du produit C fabriquées en 100 heures de travail

Contrainte sur le temps

Temps de fabrication, en heures du produit A : $5a$

Temps de fabrication, en heures du produit B : $3b$

Temps de fabrication, en heures du produit C : $\frac{1}{3}c$

On a : $5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100$

Contrainte sur la production

Production totale de l'usine en 100 heures de travail : $a + b + c = 100$

La production de B est le tiers de la production de A : $a = 3b$

Système de contrainte

Les nombres réels a, b et c sont solutions du système d'équations :

$$(\Sigma) \begin{cases} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ a + b + c = 100 \\ a - 3b = 0 \end{cases}$$

■ Résolution

	Opérations élémentaires	Systèmes équivalents obtenus
Élimination de a dans L_2 Élimination de a dans L_3	$L_2 \leftarrow -L_1 + 5L_2$ $L_3 \leftarrow -L_1 + 5L_3$	$\begin{cases} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ 2b + \frac{14}{3}c = 400 \\ -18b - \frac{1}{3}c = -100 \end{cases}$
Élimination de b dans L_3	$L_3 \leftarrow 9L_2 + L_3$	$\begin{cases} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ 2b + \frac{14}{3}c = 400 \\ \frac{125}{3}c = 3\,500 \end{cases}$

Le système triangulaire obtenu admet une seule solution : $(12 ; 4 ; 84)$.

■ Solution du problème

L'usine fabrique 12 unités du produit A, 4 unités du produit B et 84 unités du produit C en 100 heures de travail.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

1 L'espace est muni d'un repère orthonormé. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants et donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4y + 6z = 3 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x + 2\sqrt{3}y - z = 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x + 2y + \frac{\sqrt{3}}{3}z = 9 \end{cases}$$

2 L'espace est muni d'un repère orthonormé. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants et donner une interprétation géométrique des résultats obtenus. (On utilisera la méthode de Gauss.)

$$(1) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 3x - 3y - 5z = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 5x - y + z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 3z = -3 \\ -2x - 3y + 4z = -4 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 7 \\ -x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 2x - y + 3z = -2 \\ 2x - 2y + 4z = -3 \\ -4x + 3y - 7z = 1 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 3x - 6y - 3z = 3 \\ -2x + 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes linéaires d'inconnue $(x; y)$ suivants :

$$(1) \begin{cases} 2\ln x - \ln y = 0 \\ 4\ln x + \ln y = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \ln x - 2\ln y = 3 \\ 3\ln x - \ln y = 1 \end{cases}$$

4 On considère dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes linéaires suivants :

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + 2y = m \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 2 \\ x - y = m \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

Déterminer m pour que chacun de ces systèmes linéaires admettent au moins une solution.

5 Déterminez les valeurs du nombre réel m telles que chacun des systèmes suivants ait une seule solution, puis aucune solution, enfin plusieurs solutions.

$$(1) \begin{cases} mx + y + z = 3 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ 3x + 4y + 2z = m \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

6 Une section d'un jardin Zoologique contient des rhinocéros, des antilopes et des serpents. On compte 13 têtes, 14 cornes et 32 pattes. Combien de bêtes de chaque espèce y a-t-il ?

7 On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Dans l'ensemble des solutions de ce système existe-t-il :
a) des solutions dont les deux premières composantes sont égales ?

b) des solutions dont les premières composantes sont égales à la troisième ?

c) des solutions dont les trois composantes sont positives ?

8 Déterminer des nombres réels a et b tels que : pour tout nombre réel x différent de 2,

$$\frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2}$$

9 Déterminer trois réels a , b et c tels que : pour tout nombre réel x différent de -1,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = a + \frac{bx}{1+x} + \frac{cx}{(1+x)^2}$$

10 Déterminer une fonction polynôme P du troisième degré tel que :

$$P(1) = P(2) = P'(1) = -1 \quad \text{et} \quad P(3) = 8.$$

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-1}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique.

Déterminer les nombres réels a , b et c tels que $f'(3) = \frac{1}{2}$ et que $(\mathcal{C})$ admette pour asymptote la droite (D) d'équation $y = x + 1$.

12 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points $A(-1; 2)$, $B(2; 4)$ et $C(4; 2)$.

1. Déterminer les nombres réels a , b et c pour que le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

soit circonscrit au triangle ABC .

2. Préciser le centre de ce cercle.

La corrélation entre deux variables statistiques a une très grande importance car son utilisation permet de mettre à jour les liens cachés de causalité dans certains domaines comme la génétique, l'épistémologie, l'offre et la demande...

Un domaine privilégié d'application des séries statistiques à deux variables est celui où l'une des variables est le temps. On obtient ainsi des séries chronologiques dont l'importance est considérable en économie.

Deux variables statistiques étant en corrélation linéaire, on utilise plusieurs méthodes d'ajustement.

La méthode d'ajustement par moindres carrés est attribuée à Carl Friedrich Gauss et au mathématicien français Adrien Marie Le Gendre.



Carl Fiedrich Gauss
mathématicien, physicien
et astronome allemand – 1777-1855.



Adrien Marie Le Gendre
mathématicien français –
1752-1833.

SOMMAIRE

1. Séries statistiques doubles – Nuage de points 270
2. Ajustement et corrélation linéaire 277

1

Séries statistiques doubles Nuage de points

1.1. Séries statistiques doubles

L'étude des séries statistiques à un seul caractère s'avère insuffisante lorsqu'il s'agit de certains phénomènes aléatoires dépendant d'au moins deux caractères. Dans ces cas, on est contraint de considérer simultanément les caractères mis en exergue.

Toutefois, dans le cadre du programme de la terminale SE, nous allons cibler notre étude sur les séries statistiques à deux caractères quantitatifs appelés **variables statistiques**. Ces couples de variables statistiques sont représentés sous forme de tableaux statistiques à deux dimensions souvent dénommés tableaux à double entrée.

Donnons deux types de représentation de séries statistiques à deux caractères ou **séries statistiques doubles**.

■ Série statistique double (cas discret)

Exemple 1

On considère les notes obtenues en Mathématiques et en Physique par 25 candidats au concours d'admission en première année de BTS Électrotechnique Appliquée.

■ Tableaux linéaires

Le dépouillement et la mise en ordre des données nous fournissent une première représentation de la série statistique à deux caractères sous forme de **tableaux linéaires**.

TABLEAU I

Candidat	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Note de maths	6	9	13	9	10	11	9	11	12	14	16	11	14	7	9	12	14	16	11	12	12	10	8	9	12
Note de physique	11	13	12	13	9	10	13	10	9	7	8	13	9	4	13	11	14	8	13	16	11	9	17	13	11

2 candidats ont 10 en mathématiques et 9 en physique

Désignons par :

- $\mathcal{P}$ la population étudiée c'est-à-dire l'ensemble des 25 candidats.
- X le caractère « note obtenue en Mathématiques »
- Y le caractère « note obtenue en Physique »
- M_X l'ensemble des modalités du caractère X
- M_Y l'ensemble des modalités du caractère Y

On a alors :

- $M_X = \{6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 16\}$; $M_Y = \{4 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 16 ; 17\}$
- $X(B) = 9$; $X(F) = 11$; $Y(A) = 11$; $Y(C) = 12$
- l'effectif de la modalité 9 du caractère X est 5
- la distribution ou série statistique associée au caractère Y est définie par le tableau ci-dessous.

Candidat	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Note de physique	11	13	12	13	9	10	13	10	9	7	8	13	9	4	13	11	14	8	13	16	11	9	17	13	11

• Déterminer :

- $X(H)$; $X(T)$; $Y(L)$; $Y(O)$
- l'effectif de la modalité 16 du caractère Y .
- la distribution statistique associée au caractère X .

■ Tableau à double entrée

Le tableau linéaire I suggère un deuxième type de représentation de la série statistique à deux caractères par un tableau à double entrée qui supprime l'identité des candidats c'est-à-dire des éléments de la population étudiée.

TABLEAU II

$M_y \backslash M_x$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16
4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0
10	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	5	0	2	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
16	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
17	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

2 candidats ont 10 en mathématiques et 9 en physique

■ Interprétation du tableau à double entrée

Point de vue algébrique

– Dans le langage des ensembles, le tableau II représente le produit cartésien $M_X \times M_Y$ des deux ensembles M_X et M_Y .

– Dans le langage fonctionnel, l'application $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\alpha \mapsto (X(\alpha); Y(\alpha))$$

génère le tableau II qui représente l'image de $\mathcal{P}$ par l'application φ c'est-à-dire $\varphi(\mathcal{P})$.

Point de vue statistique

Dans chaque case du tableau à double entrée est inscrit le nombre d'antécédents du couple correspondant, par l'application φ . En statistique, ce nombre d'antécédents est appelé l'effectif du couple considéré.

- l'effectif du couple (10 ; 9) est 2
- l'effectif du couple (16, 17) est nul
- l'effectif du couple (9, 13) est 5
- l'effectif du couple (11, 13) est 2.

Remarque

Les tableaux linéaires I ont permis d'obtenir le tableau à double entrée II. Réciproquement, nous verrons plus loin que l'on peut déduire du tableau II, à double entrée, la série statistique associée au caractère X et celle associée au caractère Y.

■ Séries statistiques marginales

À partir du tableau II, on déduit par simple lecture que :

- le nombre de couples ayant pour premier élément 10 est 2, ce qui signifie que l'effectif de la modalité 10 du caractère X est 2.
- le nombre de couples ayant pour second élément 13 est 7, ce qui signifie que l'effectif de la modalité 13 du caractère Y est 7.

Il est donc possible, à partir du tableau à double entrée II, de reconstituer les séries associées respectivement aux caractères X et Y.

Il nous suffit de compléter le tableau à double entrée II en mettant en évidence d'une part les effectifs des modalités du caractère X, d'autre part, les effectifs des modalités du caractère Y.

On obtient le tableau III d'où l'on pourra déduire la distribution statistique associée à X et celle associée à Y.

Ces séries sont appelées respectivement **série marginale associée à X** ou de caractère X et **série marginale associée à Y** ou de caractère Y.

TABLEAU III

$M_y \backslash M_x$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	
4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	4
10	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	3
11	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	5
12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
13	0	0	0	5	0	2	0	0	0	0	7
14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
16	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
17	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	1	1	1	6	2	4	5	2	3	1	

Tableau linéaire associé à X

x_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16
n_i	1	1	1	6	2	4	5	2	3	1

Tableau linéaire associé à Y

y_i	4	7	8	9	10	11	12	13	14	16	17
n_i	2	1	1	4	3	4	1	7	1	1	1

■ Série statistique double (cas du regroupement en classes)

Exemple 2

Le service du personnel d'une entreprise a fourni la répartition suivant l'âge et la rémunération mensuelle en FCFA de ses employés en janvier 1990.

On désigne par X le caractère « âge » et par Y le caractère « rémunération mensuelle ».

■ Tableau à double entrée (avec regroupement en classes)

Les résultats sont regroupés :

- en classes d'amplitude 5 ans pour l'âge ;
- en classes d'amplitude 10 000 F CFA pour la rémunération mensuelle.

Ces résultats sont alors représentés dans le tableau à double entrée ci-dessous.

TABLEAU IV

$M_y \backslash M_x$	[20 ; 24[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[
[70 000 ; 80 000[	207	121	38	17	10	2	7	3
[80 000 ; 90 000[	302	461	513	103	86	6	10	2
[90 000 ; 100 000[	18	526	682	567	613	431	105	60
[100 000 ; 110 000[	0	111	342	298	416	480	226	37
[110 000 ; 120 000[	0	1	3	182	227	263	98	18
[120 000 ; 130 000[	0	0	0	18	22	13	12	5
[130 000 ; 140 000[	0	0	0	1	14	6	7	5

■ Séries statistiques marginales

En indiquant par une colonne et une ligne supplémentaires le centre de chaque classe et en procédant comme précédemment, on obtient le tableau V.

TABLEAU V

centre de chaque classe →		22	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5	52,5	57,5	
	M_y \ M_x	[20 ; 24[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	
75 000	[70 000 ; 80 000[	207	121	38	17	10	2	7	3	405
85 000	[80 000 ; 90 000[	302	461	513	103	86	6	10	2	1483
95 000	[90 000 ; 100 000[	18	526	682	567	613	431	105	60	3002
105 000	[100 000 ; 110 000[	0	111	342	298	416	480	226	37	1910
115 000	[110 000 ; 120 000[	0	1	3	182	227	263	98	18	792
125 000	[120 000 ; 130 000[	0	0	0	18	22	13	12	5	70
135 000	[130 000 ; 140 000[	0	0	0	1	14	6	7	5	33
		527	1220	1578	1186	1388	1201	465	130	

Ce tableau donne les deux séries statistiques marginales :

- Série statistique marginale associée au caractère X (en tramé couleur clair)
- Série statistique marginale associée au caractère Y (en tramé couleur foncé)

Définition

$\mathcal{P}$ est une population d'effectif N , sur laquelle sont définis deux caractères X et Y ,
 $\{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_p\}$ l'ensemble des modalités du caractère X , noté M_X ,
 $\{y_1 ; y_2 ; \dots ; y_m\}$ l'ensemble des modalités du caractère Y , noté M_Y ,
 φ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\alpha) = (X(\alpha) ; Y(\alpha))$,
 x_i et y_j deux modalités respectives de X et Y .

On appelle *effectif du couple* $(x_i ; y_j)$ le nombre d'antécédents de ce couple par l'application φ . Cet effectif est noté n_{ij} .

On appelle *série statistique double* de caractère $(X ; Y)$ l'ensemble des triplets $(x_i ; y_j ; n_{ij})$.

Exercice

1. a) Au cours du dernier trimestre 1998, un supermarché d'une capitale d'Afrique a dénombré les téléviseurs de marque A et de marque B qu'il a vendus dans six secteurs de la ville.

Les résultats obtenus sont consignés dans les tableaux linéaires ci-dessous :

Numéro du secteur	1	2	3	4	5	6
Nombre de téléviseurs de marque A vendus x_i	6 000	3 000	9 000	4 500	4 500	9 000
Nombre de téléviseurs de marque B vendus y_i	3 600	1 800	4 500	2 250	1 800	4 050

- a) Écrire l'ensemble des modalités du caractère X noté M_X .
- b) Écrire l'ensemble des modalités du caractère Y noté M_Y .
- a) Déterminer la série marginale associée au caractère X .
- b) Déterminer la série marginale associée au caractère Y .
- Écrire la série double de caractère $(X ; Y)$, chaque couple de modalités ayant pour effectif 1.
- Donner la représentation statistique double dans laquelle figurent les séries statistiques marginales associées à X et à Y .
- Calculer la moyenne $\bar{X}$ de X et la moyenne $\bar{Y}$ de Y .

1.2. Nuage de points associé à une série statistique double

Reprenons l'exemple 1 et considérons les ensembles M_X et M_Y des modalités de X et Y :

$$M_X = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\} ; M_Y = \{4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17\}$$

Désignons par $\mathcal{F}$ la représentation graphique du produit cartésien $M_X \times M_Y$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

On sait que l'effectif d'un élément quelconque de $M_X \times M_Y$ est fourni par le tableau II.

Considérons alors la partie de $\mathcal{F}$ telle que chaque élément correspond à un couple de coordonnées d'effectif non nul. Cet ensemble de points constitue un « nuage de points » dont nous allons donner trois représentations.

Définition

X et Y sont deux caractères définis sur une population $\mathcal{P}$,

$\{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_p\}$ l'ensemble M_X des modalités du caractère X,

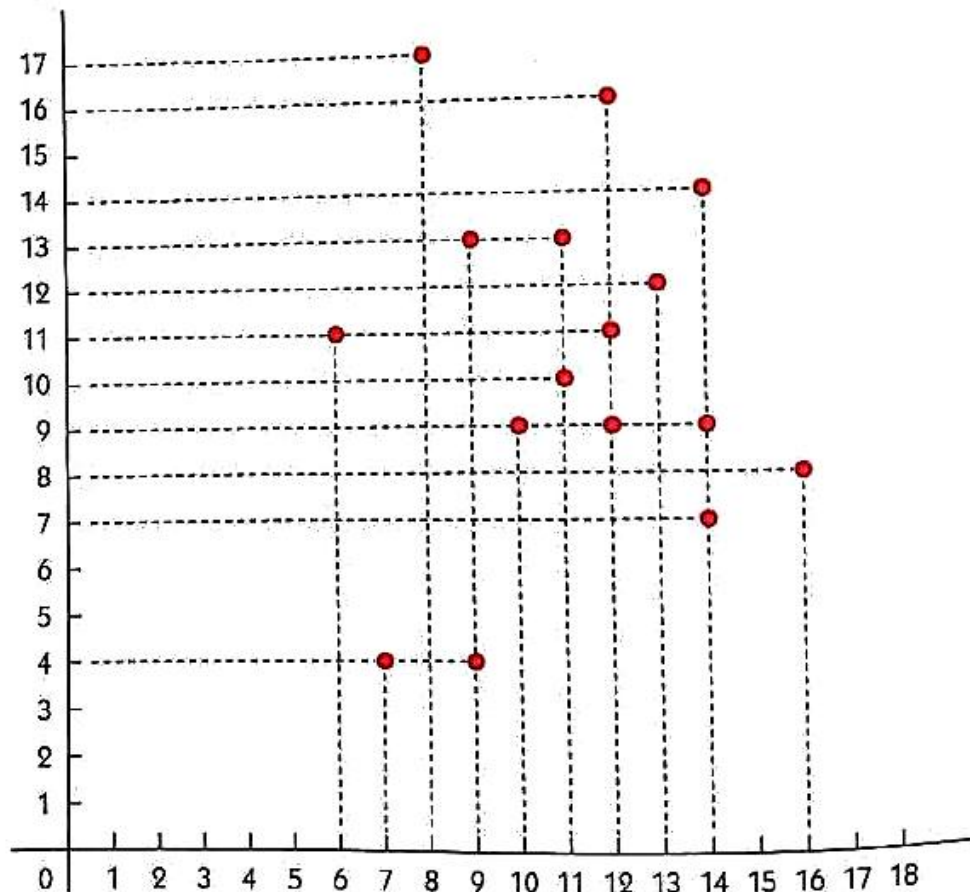
$\{y_1 ; y_2 ; \dots ; y_m\}$ l'ensemble M_Y des modalités du caractère Y,

$\mathcal{F}$ la représentation graphique de $M_X \times M_Y$ dans le plan muni d'un repère orthogonal,

on appelle **nuage de points** associé à la série statistique double de caractère (X ; Y) la partie de $\mathcal{F}$ dont tous les points ont un couple de coordonnées $(x_i ; y_j)$ d'effectif non nul.

Représentation du nuage par un diagramme cartésien

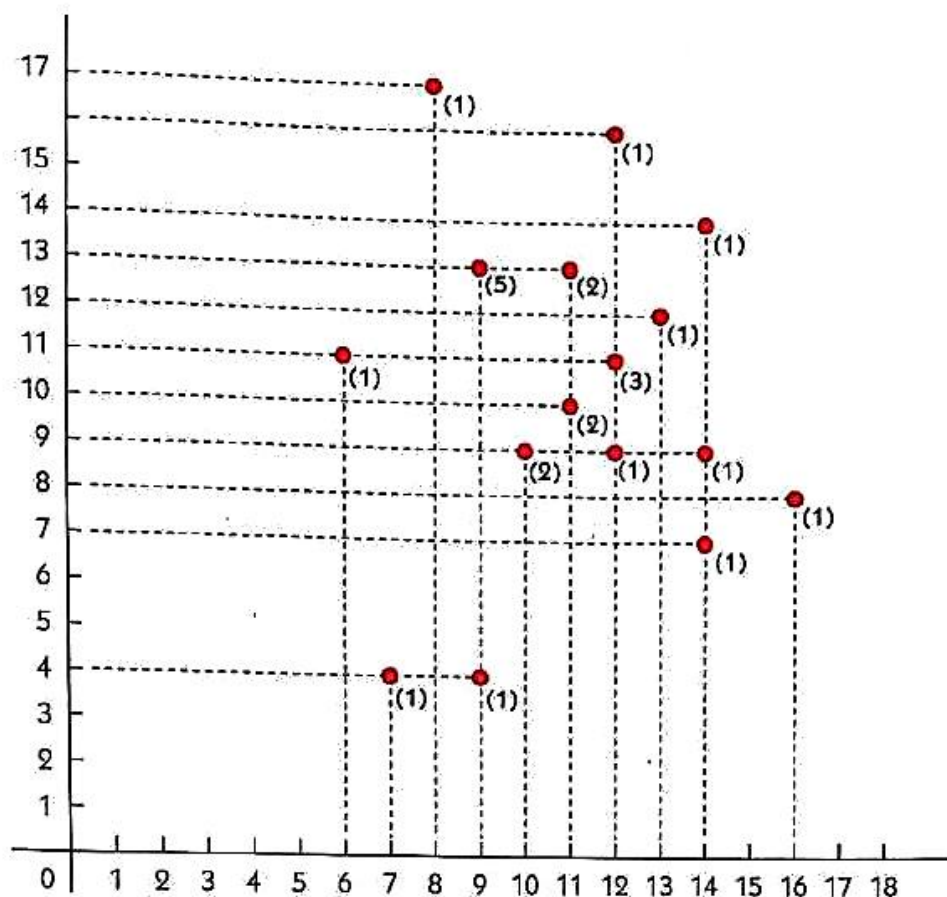
Dans notre étude, nous faisons la convention de ne représenter que les points dont les couples de coordonnées ont des effectifs non nuls. On obtient alors une première représentation de cet ensemble de points du plan appelé « nuage de points » associé à la série statistique double de caractère (X ; Y).



Représentation du nuage par un ensemble de points pondérés

La première représentation du nuage ne tient pas compte du « poids » de chaque point, c'est-à-dire l'effectif du couple de coordonnées.

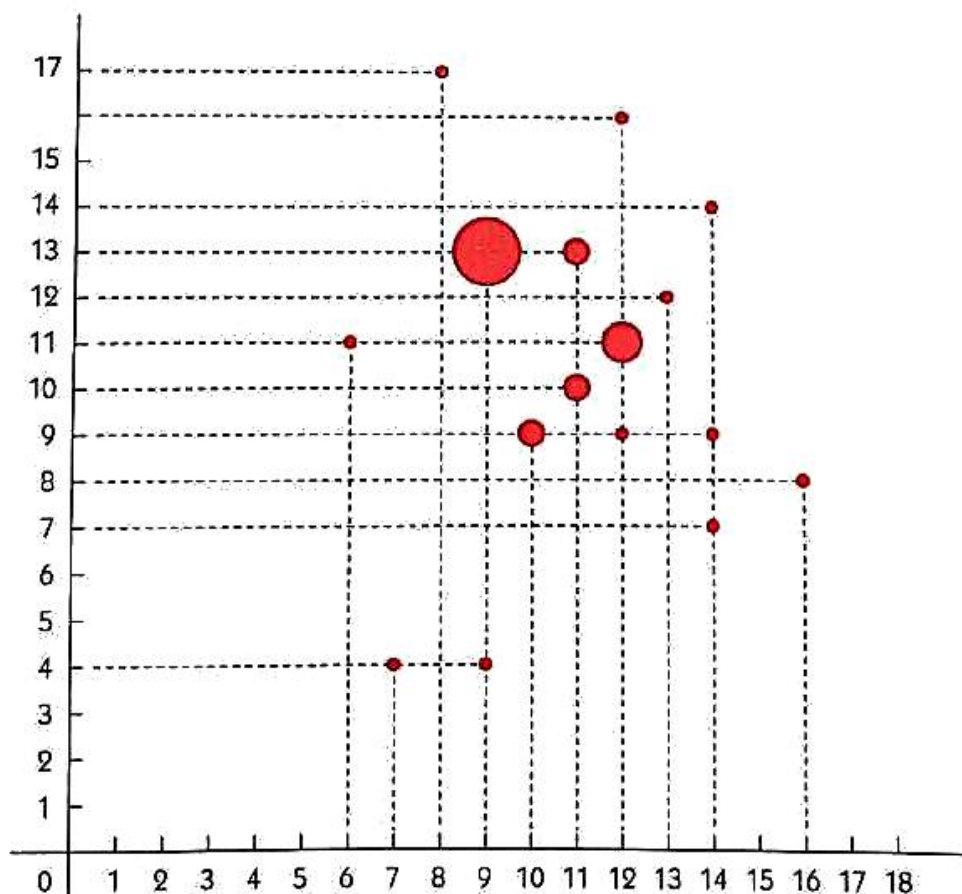
Par convention, on indiquera à droite de chaque point du nuage l'effectif de son couple de coordonnées. l'ensemble de points obtenus est appelé **ensemble de points pondérés**.



Représentation du nuage par des taches

On peut aussi mettre en évidence le poids de chaque couple de coordonnées en représentant les points du nuage par des taches.

Chaque point du nuage est alors le centre d'un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif du couple considéré.



Calcul pratique du rayon d'un disque

• Choix du rayon du plus grand disque
On choisit le rayon du disque centré aux points dont les couples de coordonnées ont l'effectif le plus élevé. Dans le cas présent, c'est le couple (9 ; 13) dont l'effectif est 5 qui convient.
Pour ce couple (9 ; 13) on a choisi 0,8 cm comme rayon du disque centré en ce point.

• Calcul du rayon d'un disque (exprimé en cm)
Soit r le rayon du disque centré sur le point dont le couple de coordonnées a pour effectif n .
L'aire de ce disque est πr^2 .
Les aires étant proportionnelles aux effectifs, on a : $\frac{\pi(0,8)^2}{5} = \frac{\pi r^2}{n}$, d'où : $r = 0,8 \sqrt{\frac{n}{5}}$.

• Dressons le tableau donnant les rayons des différentes taches :



Effectif	1	2	3	4	5
Rayon du disque (en cm)	0,36	0,51	0,62	0,72	0,80

Remarque

Le choix du rayon du disque centré au point dont le couple de coordonnées a l'effectif le plus élevé se fait en fonction de la répartition des points du nuage de façon que deux disques quelconques soient disjoints.

Exercices

- 1.b Reprendre l'exemple 2 du paragraphe 1.1.
Chaque classe étant remplacée par son centre, représenter le nuage de points associé à la série statistique double.
a) par un ensemble de points pondérés ;
b) par un ensemble de taches.

- 1.c Le tableau suivant présente trois séries statistiques (x_i) , (y_i) et (z_i) . On considère les séries statistiques doubles $(x_i ; y_i)$ et $(x_i ; z_i)$.

x_i	1,7	1,9	2,5	2,7	3,2
y_i	105	95	80	75	62
z_i	110	85	75	90	57

1. Déterminer le nuage de points associé à chacune des deux séries doubles.
2. Calculer les coordonnées de leurs points moyens respectifs G_1 et G_2 .

2.1. Ajustement

■ ■ ■ ■ ■ Présentation

Dans notre étude, les variables statistiques considérées sont discrètes. Ce choix est justifié par le fait que tous les raisonnements effectués sur celles-ci s'étendent sans difficulté aux séries doubles regroupées en classes ; il suffit, dans ce cas, tant pour les calculs que pour les représentations graphiques, de remplacer les classes par leurs centres respectifs.

■ Objectif général de l'ajustement

Lors des représentations graphiques des séries statistiques à deux variables, les nuages de points associés peuvent revêtir une configuration assez régulière (droite, parabole, etc.)

Dans ce cas, le statisticien essaie d'**ajuster** la série statistique représentée c'est-à-dire de substituer aux effectifs (ou fréquences) effectivement observés des effectifs (ou fréquences) calculés à l'aide de certains procédés que nous allons développer.

■ Ajustement graphique

Il s'agit de tracer une courbe simple et régulière qui épouse le mieux la forme du nuage associé à la série statistique double étudiée.

Exemples

- Dans la figure 1, on peut penser en première approximation qu'il est possible de tracer une droite qui passe le plus près possible de ces points. On dit alors que l'on a un **ajustement affine** ou plus communément un **ajustement linéaire**.
- Dans la figure 2, un ajustement affine ne convient pas ; on a pensé à « approcher » le nuage par une parabole.

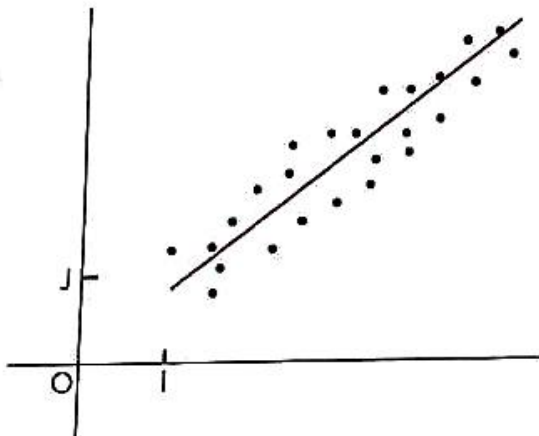


figure 1

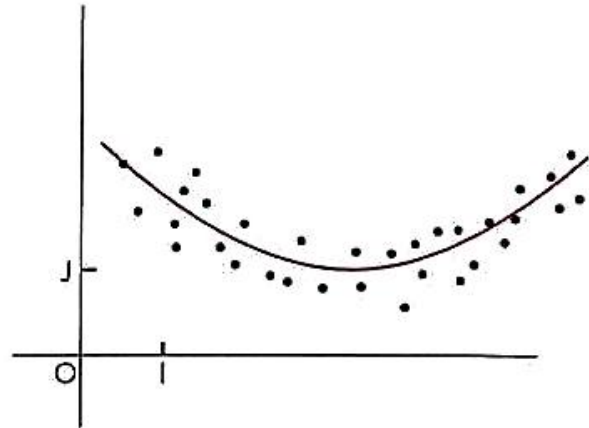


figure 2

Dans les exemples précédents, on constate l'existence d'un lien (en statistique on dit une **corrélation**) entre les points, donc entre leurs coordonnées $(x_i ; y_i)$.

Il n'en est pas toujours ainsi car il existe des nuages dont les points sont dispersés de façon quelconque, c'est notamment le cas où il n'existe aucun lien entre x_i et y_i , par exemple x_i est la taille et y_i le nombre de frères et sœurs d'un individu d'un groupe donné.

On dit que les deux variables sont **indépendantes**.

Les deux exemples ci-dessus suggèrent, pour l'objectif visé, les deux démarches suivantes :

- rechercher la forme générale de la courbe d'ajustement ;
- déterminer une équation de cette courbe d'ajustement.

Ajustement graphique affine ou linéaire

Exemple

Considérons le tableau statistique ci-dessous dans lequel les effectifs sont désignés par y_i , ces effectifs étant, sur les représentations graphiques, portés en ordonnées.

x_i	2	4	6	7	8	9	11	13	15
y_i	8	10	12	13	13	14	15	17	18

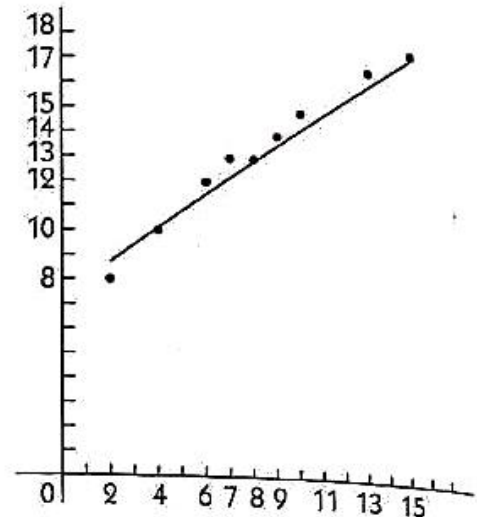
La représentation graphique de cette série statistique est constituée de neuf points et un ajustement affine semble indiqué.

Traçons une droite (Δ) passant « le plus près possible » des points de ce nuage puis déterminons-en une équation de la forme $y = ax + b$.

En écrivant que (Δ) passe par les points M(8 ; 13) et N(15 ; 18) on obtient le système :

$$\begin{cases} 8a + b = 13 \\ 15a + b = 18 \end{cases}$$

Une équation de (Δ) est donc : $5x - 7y + 51 = 0$.



Conclusion

Étant donné une série statistique double, lorsqu'il est possible de trouver une équation cartésienne d'une droite (Δ) qui passe « le plus près possible » de tous les points du nuage représentant cette série, on dit que (Δ) est une droite d'ajustement du nuage de points ou que l'on a effectué un ajustement affine (ou linéaire) du nuage de points à la droite (Δ).

Point moyen d'un nuage représentant une série double

Lorsque la forme du nuage permet de conjecturer un ajustement affine de ce nuage, il est intéressant, avant de tracer cette droite, de placer le point dont l'abscisse est la moyenne arithmétique des abscisses x_i et l'ordonnée la moyenne arithmétique des ordonnées y_i .

Définition

On appelle point moyen d'un nuage de n points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$ le point G de coordonnées $(x_G ; y_G)$ telles que : $x_G = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $y_G = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent.

$$\text{On a : } x_G = \frac{1}{9} (2 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 + 13 + 15) = \frac{75}{9} ;$$

$$y_G = \frac{1}{9} (8 + 10 + 12 + 13 + 13 + 14 + 15 + 17 + 18) = \frac{120}{9}.$$

Le point moyen est G $(\frac{75}{9} ; \frac{120}{9})$.

Exercice

- 2.a Le tableau suivant donne les résultats à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone.

Teneur en carbone x_i	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Charge de rupture y_i (en kg)	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

- Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine le point représentant le couple (60 ; 71) du tableau et d'unité graphique le centimètre.
- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

2.2. Ajustement affine par la méthode de MAYER

Principe de la méthode

L'ensemble des points à ajuster est partagé en deux parties disjointes E_1 et E_2 de même effectif dans l'ordre où les points se présentent. Les deux parties E_1 et E_2 sont alors remplacées respectivement par les points moyens G_1 et G_2 des nuages qu'ils représentent. (G_1G_2) est une droite d'ajustement dont il est facile de déterminer une équation cartésienne, on l'appelle la droite de MAYER.

Remarque

La droite de MAYER passe par le point moyen du nuage.

Exemple

Une entreprise fabrique et vend des lots de pompes à injection.

Le tableau ci-dessous donne le pourcentage y de pompes à injection d'un lot qui ont une panne au cours de x années d'utilisation.

(Chaque couple de modalités $(x_i; y_i)$ a pour effectif 1).

Déterminons la droite de MAYER ajustant le nuage de points qui représente cette série double.

Nombre x_i de semestres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pourcentage y_i	0	2	4	8	11	14	17	20	23	27

Nous avons un ensemble de dix points à ajuster que nous partageons en deux parties E_1 et E_2 .

E_1 : ensemble des cinq premiers points de coordonnées $(1; 0), (2; 2), (3; 4), (4; 8), (5; 11)$ de point moyen G_1 .

E_2 : ensemble des cinq autres points de coordonnées $(6; 14), (7; 17), (8; 20), (9; 23), (10; 27)$ de point moyen G_2 .

Calcul des coordonnées $(x_1; y_1)$ de G_1

$$x_1 = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3$$

$$y_1 = \frac{0 + 2 + 4 + 8 + 11}{5} = 5$$

Calcul des coordonnées $(x_2; y_2)$ de G_2

$$x_2 = \frac{6 + 7 + 8 + 9 + 10}{5} = 8$$

$$y_2 = \frac{14 + 17 + 20 + 23 + 27}{5} = 20,2$$

Calcul des coordonnées $(x_G; y_G)$ de G , point moyen du nuage.

$$x_G = \frac{3 + 8}{2} = 5,5$$

$$y_G = \frac{5 + 20,2}{2} = 12,6$$

Les points moyens partiels G_1 et G_2 des deux nuages partiels E_1 et E_2 sont :

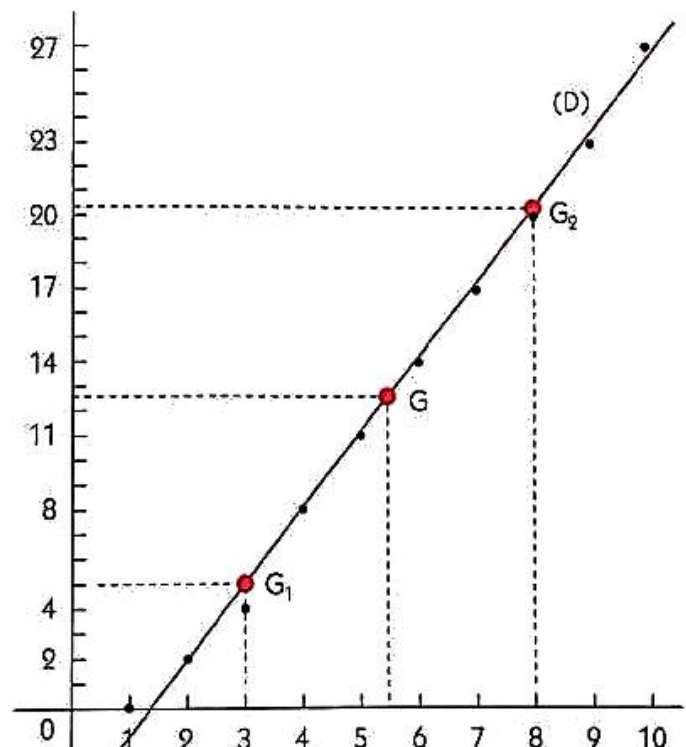
$$G_1 (3; 5) \text{ et } G_2 (8; 20,2).$$

La droite de MAYER est la droite (G_1G_2) dont une équation cartésienne est :

$$y = 3,04x - 4,12.$$

La droite de MAYER passe par le point moyen $G(5,5; 12,6)$ du nuage.

- Justifier.



2.3. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Meilleur ajustement affine

L'étude précédente montre qu'il existe plusieurs droites d'ajustement d'un nuage donné. Cela pose le problème suivant : de toutes les droites d'ajustement du nuage donné, quelle est celle qui réalise le « meilleur ajustement » ?

Mesure de l'efficacité d'un ajustement affine

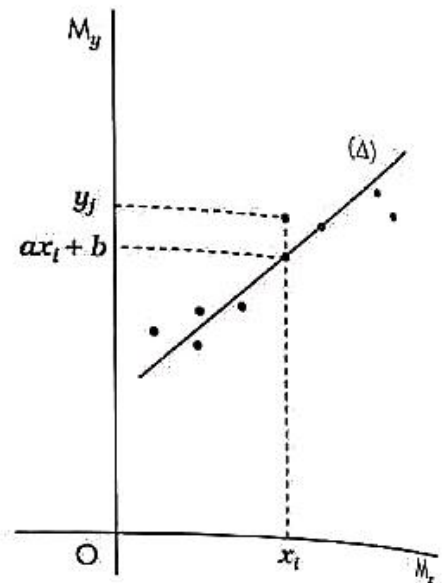
(Δ) est une droite d'ajustement d'un nuage d'équation $y = ax + b$.

À chaque modalité x_i du caractère X correspondent :

- une modalité y_j du caractère Y telle que le point de coordonnées $(x_i ; y_j)$ appartienne au nuage.
- un point de (Δ) de coordonnées $(x_i ; ax_i + b)$.

Si le point considéré n'appartient pas à (Δ) alors le nombre $[y_j - (ax_i + b)]$ est non nul.

- On dit que la somme de tous les nombres $n_{y_j}[y_j - (ax_i + b)]^2$ où $(x_i ; y_j)$ est le couple de coordonnées d'un point du nuage et n_{y_j} l'effectif de ce couple, est une mesure de l'efficacité de l'ajustement.



Meilleur ajustement affine

De toutes les droites d'ajustement d'un nuage de points associé à une série statistique double, celle qui réalise le meilleur ajustement est telle que la somme des nombres $n_{y_j}[y_j - (ax_i + b)]^2$ est minimale.

Comment déterminer les coefficients (ou paramètres) a et b qui minimisent les nombres $n_{y_j}[y_j - (ax_i + b)]^2$? La méthode d'ajustement que nous allons exposer nous fournira la solution du problème posé.

Ajustement et corrélation linéaire par la méthode des moindres carrés

Droites de régression

Définition

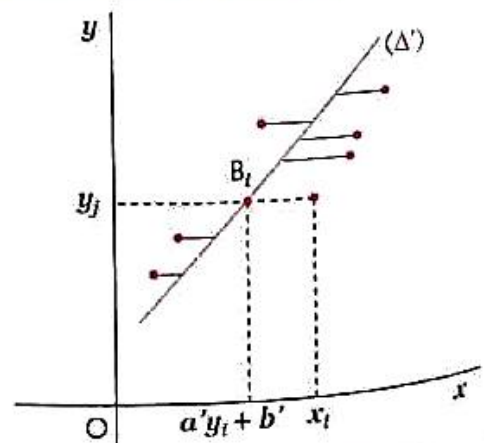
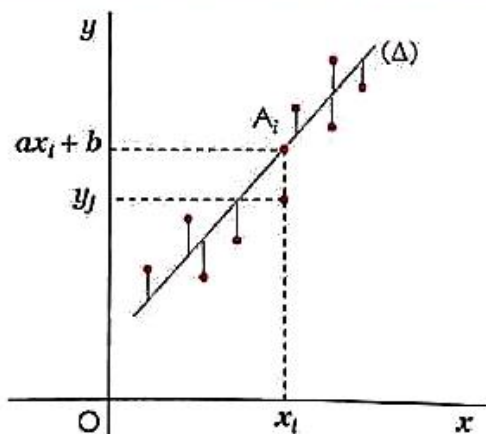
- (Δ) est une droite d'ajustement, $M_i(x_i ; y_i)$ un point du nuage, A_i le point de même abscisse x_i que M_i situé sur la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$.

On dit que (Δ) est la droite de régression de Y en X lorsque la somme $\sum_{i=1}^n M_i A_i^2$ est minimale

$$\left(\text{avec } \sum_{i=1}^n M_i A_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \right).$$

- (Δ') est une droite d'ajustement, $M_i(x_i ; y_i)$ un point du nuage, B_i le point de même ordonnée y_i que M_i situé sur la droite (Δ') d'équation $x = a'y + b'$.

On dit que (Δ') est la droite de régression de X en Y lorsque la somme $\sum_{i=1}^n M_i B_i^2$ est minimale.



■ Covariance d'une série statistique double

La définition de la covariance permet de donner une écriture simplifiée de la droite de régression.

Définition

$\mathcal{P}$ est une population d'effectif N .

X et Y deux caractères étudiés sur la population $\mathcal{P}$,

$\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ l'ensemble des modalités de X ,

$\{y_1; y_2; \dots; y_p\}$ l'ensemble des modalités de Y ,

$\bar{x}$ la moyenne de la série de caractère X ,

$\bar{y}$ la moyenne de la série de caractère Y ,

n_{ij} l'effectif du couple de modalités $(x_i; y_j)$.

On appelle **covariance** de la série statistique double de caractère (X, Y) le nombre réel :

$$\frac{\sum n_{ij} x_i y_j}{N} - \bar{x} \bar{y}, \text{ noté } \text{COV}(X, Y).$$

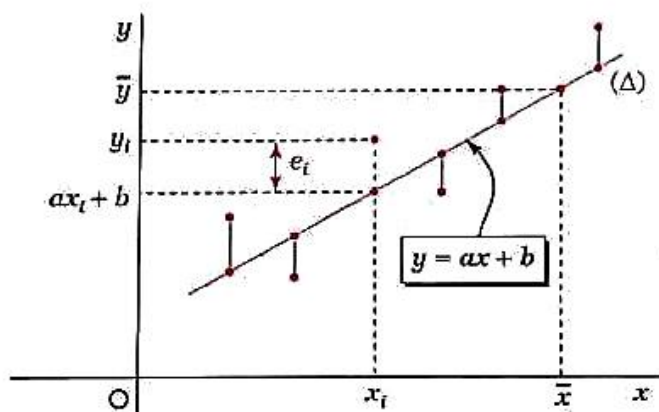
$$\text{On a : } \text{COV}(X; Y) = \frac{1}{N} \sum n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \frac{\sum n_{ij} x_i y_j}{N} - \bar{x} \bar{y}, \text{ on note aussi } \text{COV}(X; Y) = \sigma_{XY}.$$

■ Principe de la méthode des moindres carrés

On considère une série statistique à deux variables X et Y que nous supposons être a priori en corrélation linéaire.

L'ajustement de la droite de régression de Y en X par la **méthode des moindres carrés** consiste à retenir parmi toutes les droites du plan celle pour laquelle la somme des carrés des écarts e_i est minimale.

(Voir le graphique ci-contre.)



Remarque

L'ajustement est d'autant meilleur que les points M_i seront proches des points A_i d'où l'appellation « **méthode des moindres carrés** ».

■ Équation de la droite des moindres carrés

Nous allons montrer qu'il existe une seule droite (Δ) , (donc un couple unique $(a; b)$) telle que la somme des nombres $n_{ij} [y_j - (ax_i + b)]^2$ soit minimale.

• Recherche d'une fonction de a et b à minimiser

Considérons la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$.

Calculons la valeur des écarts e_i des points observés à cette droite, mesurés parallèlement à l'axe des ordonnées :

$$e_i = y_i - ax_i - b \text{ pour } i = 1, 2, \dots, N.$$

En désignant par $S(a; b)$ la somme des carrés de e_i on obtient : $S(a; b) = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2$.

La notation $S(a; b)$ adoptée pour la somme des carrés des écarts atteste que cette somme est une fonction des coefficients a et b de la droite (Δ) . La droite des moindres carrés correspond aux valeurs des coefficients a et b qui rendent minimale cette quantité. Déterminons ces valeurs de a et b .

• Déterminons pour a fixé la valeur de b qui minimise $S(a; b)$

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$b \mapsto f(b); f(b) = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2$$

f est une fonction polynôme du second degré donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si f admet un minimum, alors $f'(b) = 0$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } f'(b) &= -2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b) \\ f'(b) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N b = 0 \\ f'(b) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i - Nb = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \frac{a}{N} \sum_{i=1}^N x_i + b\end{aligned}$$

d'où :

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \text{ avec } \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

Ce résultat prouve que la droite des moindres carrés passe par le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ du nuage de points. Substituons cette valeur de b dans l'expression de $S(a; b)$, on obtient :

$$g(a) = \sum_{i=1}^N [y_i - ax_i - (\bar{y} - a\bar{x})]^2 = \sum_{i=1}^N [(y_i - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x})]^2$$

$g(a)$ est la valeur du minimum partiel de S lorsque a est fixé.

• **Déterminons maintenant la valeur de a qui minimise $g(a)$**
 g est une fonction polynôme du second degré donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
 Si g admet un minimum alors $g'(a) = 0$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } g'(a) &= -2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) [(y_i - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x})] \\ g'(a) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) [(y_i - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x})] = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - a \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = 0\end{aligned}$$

donc :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2} = \frac{\text{COV}(X, Y)}{V(X)} \quad (2)$$

Propriété

$\mathcal{P}$ est une population d'effectif N .

X et Y deux caractères étudiés sur la population $\mathcal{P}$,

$\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ l'ensemble des modalités de X ,

$\{y_1; y_2; \dots; y_p\}$ l'ensemble des modalités de Y ,

$\bar{x}$ la moyenne de la série de caractère X ,

$\bar{y}$ la moyenne de la série de caractère Y ,

n_{ij} l'effectif du couple de modalités $(x_i; y_j)$,

$V(X)$ la variance de la série de caractère X ,

$\text{Cov}(X; Y)$ la covariance de la série double de caractères X et Y .

Si le nuage de points associé à la série double où M_X est en abscisse et M_Y en ordonnée, les variables X et Y étant en corrélation linéaire, alors, il existe une droite d'ajustement (Δ) du nuage et une seule qui constitue le meilleur ajustement de ce nuage. Elle a pour équation :

$$y = ax + b \text{ avec : } a = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2} ; b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

Cette droite (Δ) est la droite des moindres carrés ou droite de régression de Y en X ; elle passe par le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ du nuage.

Une démarche analogue montre l'existence d'une droite d'ajustement (Δ') du nuage et une seule d'équation $x = a'y + b'$ avec : $a' = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_Y)^2} ; b' = \bar{x} - a'\bar{y}$.

Cette droite (Δ') est la droite de régression de X en Y ; c'est la droite pour laquelle la mesure de l'efficacité de l'ajustement est minimale, elle passe par le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ du nuage.

■ Exemple

L'évolution de 1985 à 1989 du salaire horaire moyen d'un ouvrier, dans un pays en voie de développement donné, est consignée dans le tableau ci-dessous.

- 1) Représentons graphiquement les variations de ce salaire horaire moyen.
- 2) Ajustons à la règle le nuage de points obtenu par une droite dont on déterminera une équation cartésienne.
- 3) Ajustons le nuage de points par la méthode des moindres carrés.
- 4) En admettant que cette évolution se poursuive, donnons une estimation du salaire horaire moyen d'un tel ouvrier en l'an 2001.

Années	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Salaire horaire moyen en FCFA	1650	1760	1930	2020	2220	2450	2530

1) Représentation graphique des variations de ce salaire horaire moyen

On désigne les années par leurs rangs ; l'année 1985 aura le rang 1, l'année 1986 le rang 2, et ainsi de suite...

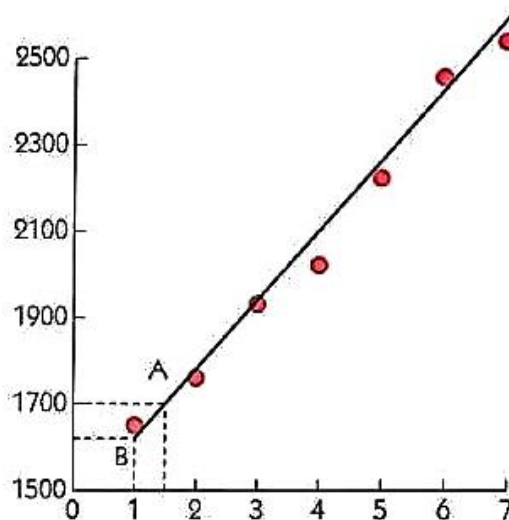
2) La droite d'ajustement passe par les points

$A(\frac{3}{2}; 170)$ et $B(1; 162)$.

On obtient une équation de la droite (AB) : $y = 16x + 146$.

3) Tableau des calculs

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	1650	-3	-430	1290	9
2	1760	-2	-320	640	4
3	1930	-1	-150	150	1
4	2020	0	-60	0	0
5	2220	1	140	140	1
6	2450	2	370	740	4
7	2530	3	450	1350	9
28	14560	0	0	4310	28



On a : $\bar{x} = \frac{28}{7} = 4$; $\bar{y} = \frac{14\,560}{7} = 2\,080$;

d'où : $a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{4310}{28} \approx 153,92$; $b = \bar{y} - a\bar{x} = 2080 - (4 \times 153,92) = 1464,32$.

La droite de régression a pour équation : $y = 153,92x + 1464,32$.

4) La droite des moindres carrés est la droite de régression de Y en fonction de X,

c'est aussi la droite d'estimation de Y à partir de X. L'an 2001 aura le rang 17, d'où l'estimation obtenue en remplaçant dans l'équation (1) x par 17. On obtient : $y = 4\,083,6 \approx 4\,084$.

Donc, 4 084 FCFA est une estimation du salaire horaire moyen de cet ouvrier en l'an 2001.

Exercice

- 2.b Le tableau suivant donne pour une année déterminée le nombre de touristes entrant dans les pays indiqués ainsi que les recettes totales correspondantes.

Pays visités	A	B	C	D	E
Nombre de touristes (en millions) x_i	7,5	4,5	4,2	3,5	3,1
Recette totale (en milliards de F) y_i	10	4	4,5	3,9	4,3

Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

2.4. Corrélation linéaire

Objectif de l'étude de la corrélation

Lorsqu'une variable Y est en corrélation avec une variable X , deux problèmes se posent :

- établir la forme de la liaison statistique existant entre Y et X , en déterminant la courbe de régression de Y en X ;
- dans le cas où celle-ci est une droite, mesurer l'intensité de la liaison par un indice approprié : le coefficient de corrélation linéaire.

Définition et propriétés

Définitions

- Deux variables statistiques X et Y sont dites **en corrélation linéaire** lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en Y sont des droites.
- On appelle **coefficient de corrélation linéaire** d'une série statistique double de caractère $(X ; Y)$ le nombre réel r défini par :

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \times \sigma_Y} = \frac{\text{cov}(X ; Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} .$$

Propriétés

- Le coefficient de corrélation linéaire r est un nombre réel de même signe que $\text{COV}(X ; Y)$.
- Les coefficients directeurs a et a' des droites de régression de Y en X et de X en Y sont définis par :

$$a = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2} ; \quad a' = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_Y)^2}$$

- On a :

$$aa' = r^2$$

Démonstration

$$\text{On sait que : } r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \times \sigma_Y} ; \quad a = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_X)^2} ; \quad a' = \frac{\sigma_{XY}}{(\sigma_Y)^2} ; \quad \text{d'où : } aa' = \frac{(\sigma_{XY})^2}{(\sigma_X)^2 \times (\sigma_Y)^2} = r^2 .$$

Définition

On appelle **valeur absolue du coefficient de corrélation linéaire** la racine carrée du produit du coefficient directeur de la droite de régression de Y en X par le coefficient directeur de la droite de régression de X en Y .

$$|r| = \sqrt{aa'}$$

Remarques

- Si $a > 0$ et $a' > 0$ alors $r = \sqrt{aa'}$
Si $a < 0$ et $a' < 0$ alors $r = -\sqrt{aa'}$
- On admet que : $|r| \leq 1$
- Si $r^2 = 1$ alors $a = \frac{1}{a'}$ (car $aa' = 1$)

Les deux droites de régression (D) et (D') sont alors confondues, on dit que **l'ajustement linéaire est parfait**.

- Si $|r|$ est proche de 1 alors (D) et (D') sont proches l'une de l'autre, on dit qu'il y a une **bonne corrélation** ou une **forte corrélation** entre les deux variables.

En général on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est forte lorsqu'on a :

$$0,87 \leq r \leq 1 .$$

TP1. Exemple d'ajustement se ramenant à un ajustement affine

Un exemple d'ajustement exponentiel se ramenant à un ajustement affine ou linéaire.

Exercice commenté

Une entreprise a dressé une statistique de son chiffre d'affaires (C.A.) semestriel du 1^{er} janvier 1989 au 30 juin 1993 comme l'indique le tableau statistique ci-dessous :

1. Montrer l'existence d'une liaison entre le rang du semestre et le C.A. semestriel. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double dans le plan muni d'un repère orthogonal :
1 cm pour unité en abscisse ; 8 mm pour $1000 \cdot 10^5$ FCFA en ordonnée ; origine O (0 ; $4000 \cdot 10^5$ FCFA).
2. Montrer par la méthode graphique l'existence d'une liaison entre le rang du semestre et le logarithme décimal (log) du C.A. semestriel.
3. Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite d'ajustement qui donnerait le logarithme décimal du C.A. en fonction du rang du semestre correspondant.
4. On pose : $Y = \log y$. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et Y . La corrélation entre x et Y est-elle faible ? forte ?
5. À partir de l'équation de la droite d'ajustement de Y en x déterminer l'équation de la fonction qui donnerait le C.A. de l'entreprise en fonction du rang du semestre.
6. En supposant que les résultats obtenus puissent s'étendre aux années à venir, essayer de prévoir quels seront les C.A. des périodes :
a) 1^{er} janvier 1994 - 30 juin 1994 ;
b) 30 janvier 1995 - 31 décembre 1995.

Semestre	Rang du semestre x_i	C.A. semestre (en 10^5 FCFA) y_i
1 ^{er} semestre 1989	1	4 100
2 ^e semestre 1989	2	4 700
1 ^{er} semestre 1990	3	5 100
2 ^e semestre 1990	4	5 700
1 ^{er} semestre 1991	5	6 400
2 ^e semestre 1991	6	7 200
1 ^{er} semestre 1992	7	8 000
2 ^e semestre 1992	8	8 900
1 ^{er} semestre 1993	9	10 000

1. La forme du nuage de points associé à la série double de variables x et y suggère une courbe d'ajustement de type exponentiel que nous conjecturons.

2. La forme du nuage de points associé à la série de variables x et Y ($Y = \log y$), où $\log$ est la fonction logarithme décimal, suggère une courbe d'ajustement affine, ce qui justifie, a posteriori, la conjecture que nous avons faite au 1.

En effet : $y = e^{ax+b} \Leftrightarrow \ln y = ax + b$

or : $\log y = \frac{\ln y}{\ln 10} = \frac{ax + b}{\ln 10} = \frac{a}{\ln 10} x + \frac{b}{\ln 10}$

d'où : $\log y = Ax + B$ est une équation de droite, avec $A = \frac{a}{\ln 10}$ et $B = \frac{b}{\ln 10}$.

3. Il s'agit de trouver une équation de la droite de régression de Y en x avec $Y = \log y$ par la méthode des moindres carrés.

Compléter le tableau de calculs ci-dessous :

Semestre	Rang du semestre x_i	C.A. semestre (en 10^5 FCFA) y_i	$\log y_i$ Y_i	Y_i^2	x_i^2	$x_i Y_i$
1 ^{er} semestre 1989	1	4 100	3,61	13,03	1	3,61
2 ^e semestre 1989	2	4 700	3,67	13,46	4	7,34
1 ^{er} semestre 1990	3	5 100	3,71	13,76	9	11,13
2 ^e semestre 1990	4	5 700	3,76	14,13	16	15,04
1 ^{er} semestre 1991	5	6 400	3,81	14,51	25	19,05
2 ^e semestre 1991	6	7 200	3,86	14,89	36	23,16
1 ^{er} semestre 1992	7	8 000	3,90	15,21	49	27,30
2 ^e semestre 1992	8	8 900	3,95	15,60	64	31,60
1 ^{er} semestre 1993	9	10 000	4	16	81	36
TOTAUX	45		34,27	136,59	285	174,23

Des calculs élémentaires donnent :

$$\bar{x} = \frac{45}{9} = 5 ; \quad \bar{Y} = \frac{34,27}{9} \approx 3,81 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par excès.}$$

$$A = \frac{174,23 - (5 \times 34,27)}{285 - (5 \times 45)} = \frac{2,88}{60} = 0,048$$

$$B = \bar{Y} - A\bar{x} = 3,81 - (0,048 \times 5) = 3,57.$$

Une équation de la droite d'ajustement de Y en fonction de x ou droite de régression de Y en x est :

$$Y = 0,048x + 3,57 \quad (1)$$

L'égalité (1) donnerait le logarithme décimal du chiffre d'affaires en fonction du rang du semestre correspondant.

4. a) Calcul du coefficient de corrélation linéaire r entre x et Y.

Par définition $r = \frac{\text{cov}(x, Y)}{\sigma_x \sigma_Y}$

Des calculs classiques donnent :

$$\text{cov}(x; Y) = 0,308 ; \quad V(x) = 6,666 ; \quad V(Y) = 0,66 ;$$

$$\text{d'où : } r = \frac{\text{cov}(x; Y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} = \frac{0,308}{2,097} = 0,14.$$

b) Il y a une faible corrélation entre x et Y.

5. Il s'agit d'exprimer y en fonction de x.

Or : $\log y = 0,048x + 3,57$ et $0,048 = \log(1,117) ; \quad 3,57 = \log 3715$

$$\text{d'où : } \log y = \log(1,117)^x + \log 3715$$

$$\log y = \log[3715(1,117)^x]$$

$$y = 3715(1,117)^x \quad (3)$$

L'égalité (3) définit la fonction qui donnerait le chiffre d'affaires de l'entreprise en fonction du rang du semestre.

6. a) Le rang du 1^{er} semestre 1994 est 11

$$\text{d'où : } Y = (0,048 \times 11) + 3,57 = 4,098 \text{ [d'après (1)]}$$

$$\text{or : } 4,098 = \log(12\,530)$$

donc : le chiffre d'affaires prévu est égal à $12\,530 \times 10^5$ FCFA.

b) Le rang du 2^e semestre 1995 est 14 ; en utilisant l'équation précédente, on a :

$$Y = (0,048 \times 14) + 3,57 = 4,242 ;$$

$$\text{or : } 4,242 = \log(17\,460)$$

donc : le chiffre d'affaires prévu est égal à $17\,460 \times 10^5$ FCFA.

TP2 Ajustement affine et ajustement exponentiel

Exercice commenté

Le tableau ci-contre donne le cours moyen d'une action donnée à la bourse d'Abidjan :

Première partie : Représentation

1. a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 100 FCFA en ordonnée.

b) Calculer les coordonnées du point moyen, $G(\bar{x}; \bar{y})$ et le placer sur la figure précédente.

On décide d'effectuer deux ajustements successifs en vue de faire des prévisions.

Deuxième partie : Ajustement affine

1. a) Calculer à 10^{-3} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; y_i)$. En déduire qu'un ajustement affine est justifié.

b) Écrire une équation de la droite de régression $(\mathcal{D})$ de y en x par la méthode des moindres carrés. On donnera les coefficients à 10^{-1} près par excès.

c) Tracer cette droite sur le graphique de la première partie.

2. En supposant que la tendance constatée se maintienne, estimer :

a) le cours moyen de cette action au 1^{er} janvier 2000 ;

b) à partir de quelle année, le cours moyen de l'action considérée dépassera-t-il 2 000 FCFA ?

Troisième partie : Ajustement exponentiel

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ab^x$, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.

1. On impose à la courbe représentative de f de passer par les points $A(0 ; 550)$ et $B(5 ; 1\,120)$. En déduire les valeurs exactes de a et b , puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de b .

2. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 550 \times (1,15)^x$.

a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Tracer la courbe représentative de f sur le graphique de la première partie.

3. Résoudre l'inéquation : $f(x) > 2\,000$. Donner une interprétation du résultat.

Année	Rang de l'année x_i	Prix (en FCFA) y_i
1991	0	550
1992	1	580
1993	2	640
1994	3	850
1995	4	1 050
1996	5	1 120

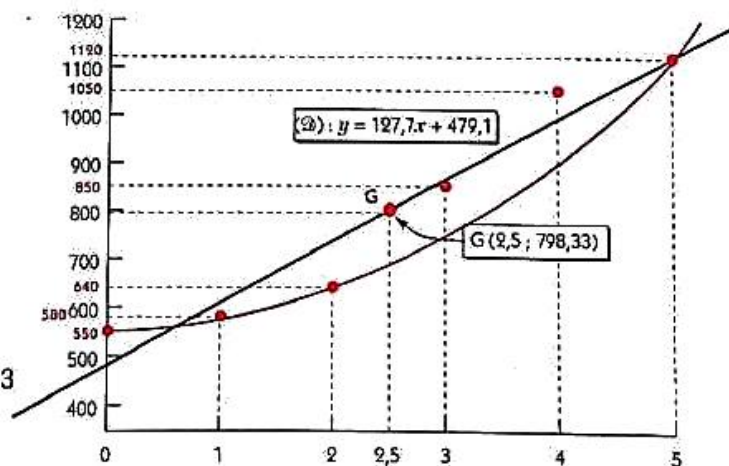
• Première partie : Représentation

1. a) Représentation du nuage de points

b) Coordonnées du point G

$$\text{On a : } x_G = \bar{x} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5}{6} = 2,5$$

$$y_G = \bar{y} = \frac{550 + \dots + 1\,120}{6} = 798,33$$



$$x_G = 2,5 = \bar{x} ; y_G = 798,33 = \bar{y}$$

• Deuxième partie : Ajustement affine

1. a) Calcul du coefficient de corrélation linéaire r

• Effectuer soi-même les calculs puis les confronter avec ceux du tableau suivant.

Tableau de calculs

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
0	550	-2,5	-248,3	320,76	6,25	61 652,89
1	580	-1,5	-218,3	327,45	2,25	47 654,89
2	640	-0,5	-158,3	79,15	0,25	25 058,89
3	850	0,5	51,7	25,85	0,25	2 672,89
4	1 050	1,5	251,7	377,55	2,25	63 352,89
5	1 120	2,5	321,7	804,25	6,25	103 490,89
15	4 790	0	-0,2	2 235	17,5	303 883,34

Pour calculer r on peut :

- soit utiliser directement la formule $\frac{\cos(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$
- soit calculer au préalable $\cos(x; y), \sigma_x, \sigma_y$

On obtient : $r = 0,970$ à 10^{-3} près par excès.

Il y a une très forte corrélation entre x et y , ce qui justifie l'usage d'un ajustement affine car $0,97 > 0,95$.

b) Équation de la droite de régression de y en x

L'équation de (2) s'écrit sous la forme : $y = ax + b$

avec : $a = \frac{\cos(x; y)}{\sigma_x} = \frac{2\,235}{17,5} = 127,7$; $b = \bar{y} - a\bar{x} = 798,33 - 127,7 \times 2,5 = 798,33 - 319,25 = 479,1$.

donc : $a = 127,7$ à 10^{-1} près par excès ; $b = 479,1$ à 10^{-1} près par excès

D'où l'équation de la droite (2) : $y = 127,7x + 479,1$

c) Tracé de la droite (2)

Une droite étant définie par deux points il suffit de choisir deux valeurs de x pour lesquelles les ordonnées correspondantes sont faciles à placer sur le graphique. (Voir figure.)

2. a) L'an 2000 aura le rang 9 d'où : $y_9 = 127,7 \times 9 + 479,1 = 1\,628,4$; $y_9 = 1\,629$.

Le cours moyen de l'action sera, en l'an 2000, de 1 629 F CFA.

b) Résolution de l'inéquation $127,7x + 479,1 > 2000$

On a : $127,7x + 479,1 > 2000 \Leftrightarrow 127,7x > 1\,520,90 \Leftrightarrow x > 11,90$.

D'où il résulte que le plus petit nombre entier naturel x pour lequel l'inéquation est vérifiée est 12.

Le cours moyen de l'action considérée dépassera 2 000 F CFA à partir de l'an 2003 inclus.

• Troisième partie : Ajustement exponentiel

1. a) Calcul des valeurs exactes de a et b .

Écrire que la courbe représentative de f passe par les points A et B ; cela fournira un système de deux équations à deux inconnues a et b ; vérifier que a et b satisfont aux égalités :

$a = 550$ (valeur exacte de a) ; $b = \left(\frac{112}{55}\right)^{1/5}$ (valeur exacte de b).

b) Valeur approchée de b à 10^{-2} près par défaut.

La calculatrice donne immédiatement : $b = 1,15$ à 10^{-2} près par défaut.

2. a) Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 550 \times (1,15)^x$ et $1,15 > 1$

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 550 \times (1,15)^x = 550 \lim_{x \rightarrow +\infty} (1,15)^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Tableau de variation de f .

$f'(x) = 550 \ln(1,15)(1,15)^x$

D'où le tableau de variation de f ci-contre.

c) Tracé de la courbe représentative de f (voir figure).

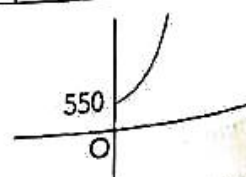
3. Résolution de l'inéquation : $f(x) > 2000$.

$f(x) = 550 \times (1,15)^x > 2000 \Leftrightarrow (1,15)^x > \frac{2000}{550} = 3,63$

$\Leftrightarrow x \ln(1,15) > \ln(3,63)$

$\Leftrightarrow x > \frac{\ln(3,63)}{\ln(1,15)} = \frac{1,2891}{0,1398} = 9,2225$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	550	$+\infty$



À partir du rang 10, le cours moyen de l'action dépassera 2000 FCFA.

Exercices

ENTRAÎNEMENT ET PROBLÈMES

1 Nuage de points et droites de régression

Diverses sociétés de gardiennage pour des immeubles résidentiels proposent différents salaires : soit X le salaire proposé et Y le nombre de candidats qui se sont présentés à l'embauche pour postuler une place. Les observations sont données dans le tableau ci-dessous.

Société	Salaire x (en FCFA)	Nombre de candidats y
1	44 000	10
2	45 000	13
3	46 000	17
4	47 000	19
5	48 000	21
6	49 000	25

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique double :

- le salaire x figurant en abscisse ;
- le nombre de candidats y figurant en ordonnée.

2. Trouver une équation de la droite de régression de y en fonction de x et représenter cette droite sur le graphique précédent.

3. On a appris qu'une septième société de gardiennage s'était ouverte sur la place et que 30 candidats s'y étaient présentés. À combien peut-on estimer le salaire que l'on a proposé dans cette nouvelle société ?

D'après bac

2 Une compagnie d'assurances d'un pays de l'UEMOA garantit à ses clients trois types principaux de risques : VIE, ACCIDENTS, INCENDIE.

Elle a établi le tableau statistique suivant :

Années x_i	Risques y_i			Total T
	VIE y_1	ACCIDENTS y_2	INCENDIE y_3	
1980	280	180	90	550
1981	325	210	100	635
1982	405	230	108	743
1983	485	270	122	877

1. a) Tracer y_1 , y_2 , y_3 et T sur le même graphique.
b) Une droite peut-elle ajuster de façon satisfaisante chacun de ces risques ?

(Sur l'axe des abscisses l'année 1980 aura le rang 1, l'année 1981 le rang 2 et ainsi de suite).

2. Écrire les équations des droites y_1 , y_2 , y_3 et T sous la forme : $y_i = m_i x + P_i$, $1 \leq i \leq 3$ et $T = mx + P$.

3. a) Vérifier que : $m = m_1 + m_2 + m_3$; $P = P_1 + P_2 + P_3$.
b) Établir ces deux égalités.

4. Calculer les valeurs probables de y_1 , y_2 , y_3 et T pour 1990.

3 Droite de Mayer et changement d'origine

On considère un conducteur dont la résistance électrique R , exprimée en ohms (Ω), est une fonction affine de la température θ exprimée en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$). On a : $R = a\theta + b$ où a et b sont des constantes réelles. L'objet de cet exercice est de fournir une estimation de R pour θ donné.

1. On pose : $x = \frac{\theta}{4} - 5$ et $y = 10R - 21$, puis on effectue une série de mesures.

On obtient ainsi le tableau statistique ci-dessous.

x_i	3	27	51	70	97	116	156	184
y_i	12,1	20,2	27,5	37,6	47,3	50,7	66,6	76,5

a) Représenter le nuage de points associé à la série (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) G_1 désigne le point moyen des quatre premiers points du nuage et G_2 celui des quatre derniers points du nuage. (Pour les calculs utiliser les coordonnées de G_1 et G_2 arrondis à 10^{-2} près par excès.)

c) Déterminer une équation de la droite $(G_1 G_2)$.

d) Placer les points G_1 et G_2 puis tracer la droite $(G_1 G_2)$ sur la figure.

2. a) Utiliser le résultat précédent pour calculer les valeurs des constantes a et b .

b) En déduire une estimation de R à 10^{-2} près par excès lorsque $\theta = 40$.

4 Ajustement affine par la méthode de Mayer et par la méthode des moindres carrés

Une entreprise de fabrication de matériels informatiques a conçu et réalisé un nouveau logiciel destiné aux petites et moyennes entreprises. Une étude de marché a permis de trouver six cents entreprises susceptibles d'acheter ce logiciel. Afin de déterminer à quel prix chacune d'elles accepterait d'acquiescer ce logiciel on mène une enquête dont les résultats ont généré le tableau statistique ci-dessous.

Prix proposé x_i	Nombre y_i d'entreprises disposées à acheter le logiciel au prix proposé
4 000 000	70
3 600 000	80
3 200 000	150
2 800 000	220
2 400 000	250
2 000 000	260
1 600 000	400
1 200 000	440
1 000 000	450
800 000	520

1. a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à la série double ci-dessus.

b) Utiliser la méthode de Mayer pour déterminer une équation d'une droite d'ajustement (Δ_1) du nuage de la forme $y = Ax + B$. Les coefficients A et B seront donnés par leurs valeurs approchées respectivement à 10^{-4} près et à 10^{-1} près. Tracer (Δ_1) sur le graphique.

2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près par excès du coefficient de corrélation linéaire r .

3. Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ de la droite de régression (Δ_2) de y en x par la méthode des moindres carrés.

5 Ajustement affine et prévision de vente

Le tableau statistique suivant indique le prix de vente en FCFA d'un magnétophone de marque donnée ainsi

que le nombre d'exemplaires vendus sur six années consécutives :

Rang de l'année	1	2	3	4	5	6
Prix de vente x_i (en FCFA)	200 000	140 000	180 000	250 000	260 000	270 000
Nombre y_i d'exemplaires vendus	196	242	220	160	150	140

1. Représenter le nuage de points associé à la série double $(x_i; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine du repère le point de coordonnées (140 000 ; 160), pour unités : 1 cm pour 10 000 F CFA sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées. Vérifier qu'un ajustement affine du nuage semble approprié.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage, puis le placer sur la figure.
3. a) Déterminer une équation de la droite D de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. On donnera les coefficients à 10^{-3} près par excès.
b) Tracer la droite D sur le graphique de la question 1.
4. Déterminer l'année où le chiffre d'affaires est maximum ainsi que ce maximum.
5. On suppose dorénavant que, pour chaque année le nombre y d'exemplaires vendus et le prix de vente x sont liés par la relation : $2y + 0,16x - 698 = 0$.
On note $f(x)$ le chiffre d'affaires réalisé en vendant y magnétoscopes au prix de x FCFA l'unité.
a) Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x .
b) Étudier les variations de la fonction f sur [140 000 ; 250 000].
c) En déduire le prix de vente d'un tel magnétoscope l'année de rang 8 si l'on veut que la somme encaissée $f(x)$ soit maximale. Quel sera le nombre d'exemplaires vendus à l'unité près ? Quelle sera la somme encaissée ?

6 Ajustement affine par moindres carrés

Une entreprise fabrique un logiciel. Une enquête menée auprès de 100 sociétés intéressées par l'acquisition de ce logiciel donne les résultats suivants :

N° i	Prix x_i proposé pour le logiciel (en F CFA)	Nombre y_i de sociétés disposées à acheter le logiciel
1	100 000	100
2	160 000	86
3	220 000	82
4	320 000	80
5	400 000	70
6	480 000	46
7	560 000	40
8	640 000	25
9	720 000	15
10	800 000	10

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique ci-dessus dans le plan muni d'un repère orthogonal. (Unités graphiques : sur l'axe des abscisses 1 cm pour 100 000 F, sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 20 sociétés).
2. a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront donnés à 10^{-2} près par défaut.
b) Tracer cette droite sur le graphique de la question 1.
3. a) Le fabricant du logiciel engage deux sortes de frais :
- les frais fixes se montent à 8 000 000 FCFA.
- les frais de fabrication montent à 50 000 FCFA par logiciel.

x désignant le prix de vente d'un logiciel, utiliser l'équation obtenue au 2. pour donner l'estimation du bénéfice $b(x)$ en fonction de x .
b) Prouver que la fonction b atteint son maximum en x_0 élément de [100 000 ; 800 000] que l'on déterminera. Calculer alors $b(x_0)$.

7 Droite de Mayer, corrélation linéaire et moindres carrés

Dans 10 exploitations agricoles d'une même région, on a mesuré la taille de l'exploitation (en dizaines d'hectares) et le bénéfice annuel net (en milliers de F CFA) :

taille x_i	1	2	3	4	5
bénéfice y_i	1 200	3 000	4 200	- 600	4 800
taille x_i	6	7	8	9	10
bénéfice y_i	5 400	4 200	1 800	8 100	9 600

1. a) Représenter le nuage de points correspondant, ainsi que le point moyen G du nuage.
b) Écrire l'équation de la droite de Mayer.
2. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire ; justifier l'existence d'un lien entre le bénéfice et la taille de l'exploitation.
b) Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine sous la forme $y = ax + b$. Tracer cette droite. Réalise-t-elle un bon ajustement ?
c) Lire, sur cette droite d'ajustement, la taille de l'exploitation réalisant un bénéfice nul.
3. Si on considère une exploitation de 0,5 ha, quel serait le bénéfice d'après cet ajustement ?

8 Ajustement et corrélation linéaire

Un hypermarché dispose du tableau statistique ci-dessous :

Années	Nombre x_i de téléviseurs vendus	Nombre y_i de colis livrés
1982	63 000	85 000
1983	65 000	83 000
1984	64 000	95 000
1985	66 000	105 000
1986	69 000	116 000
1987	71 000	117 000
1988	75 000	125 000
1989	76 000	133 000
1990	80 000	129 000
1991	81 000	137 000

1. Donner une équation de la droite d'ajustement qui permet d'estimer le nombre de téléviseurs vendus à partir du rang de l'année 11 (1982 aura le rang 1, 1983 le rang 2, ainsi de suite).
2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre le nombre de téléviseurs vendus et le nombre de colis livrés par l'hypermarché.
3. Déterminer une équation de la droite de régression qui permet d'estimer le nombre de colis livrés à partir de la connaissance du nombre de téléviseurs vendus.
4. Utiliser les résultats précédents pour prévoir le nombre de colis livrés par l'hypermarché en 2002.

9 Ajustement affine par moindres carrés

Le tableau ci-après donne l'évolution du nombre total d'actifs à temps partiel dans un pays P. x_i est le rang de l'année (tous les 4 ans) et y_i le nombre d'actifs à temps partiel, en millions.

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$, dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour 4 années sur l'axe des abscisses et 5 cm pour un million d'actifs sur l'axe des ordonnées, en commençant la graduation verticale à 1 million.

Année	x_i	y_i
1972	0	1,2
1976	1	1,7
1980	2	1,8
1984	3	2,2
1988	4	2,6
1992	5	2,8
1996	6	3,6

2. a) Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (on prendra les valeurs approchées à 0,01 près par excès pour les coefficients).

b) Tracer la droite (D) sur le graphique précédent.

3. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'actifs à temps partiel en 2004.

10 Étude d'une série double avec regroupement en classes

Le tableau suivant donne la répartition d'un échantillon de 100 candidats bacheliers suivant leurs notes d'histoire (H) et de sciences économiques et sociales (S.E.S.). On ne dispose pas d'observation individuelle. Les notes ont été regroupées par classe.

H(x) \ S(y)	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 18]
[0 ; 4[	2	1	0	0	0
[4 ; 8[	2	15	5	0	0
[8 ; 12[	0	4	40	10	0
[12 ; 14[	0	0	5	6	5
[14 ; 18]	0	0	0	4	1

On note x_i les centres de classes des notes d'histoire et y_i les centres de classes des notes S.E.S.

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ des notes d'histoire.

Calculer la moyenne $\bar{y}$ des notes de S.E.S.

2. Pour chaque classe de centre x_i , calculer la moyenne $\bar{y}_i$ des notes de S.E.S. Dans un repère bien choisi, représenter la série $(x_i, \bar{y}_i)$. Donner une équation de la droite de régression de $\bar{y}$ en x , par la méthode des moindres carrés, sous la forme $\bar{y} = ax + b$. La tracer.

3. Pour chaque classe de centre y_i , calculer la moyenne $\bar{x}_i$ des notes d'histoire. Avec le même repère que ci-dessus représenter la série $(\bar{x}_i, y_i)$.

Donner une équation de la droite de régression de $\bar{x}$ en y , par la méthode des moindres carrés sous la forme $\bar{x} = a'y + b'$. La tracer.

4. Pour mesurer l'intensité de la corrélation linéaire entre les variables x et y , on calcule le coefficient de corrélation linéaire r tel que $r^2 = aa'$, r étant positif si a et a' sont positifs.

Calculer r . La corrélation linéaire semble-t-elle bonne ?

11 Les dépenses x_i et les chiffres d'affaires y_i bimensuels d'une grande entreprise ont donné en 1982 la nomenclature suivante, après une étude statistique ; les montants étant exprimés en dizaines de millions de francs CFA.

x_i	12	17	11	13	31	20
y_i	99	130	92	108	232	150

1. Placer le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ pour $1 \leq i \leq 6$ dans un plan muni d'un repère orthogonal.

2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode de Mayer.

3. Déterminer les deux droites de régression de y en x et de x en y par la méthode des moindres carrés.

4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique. Que peut-on en déduire ? Quelle est en deux mois :

a) La dépense si le chiffre d'affaires bimensuel est 2 milliards de FCFA ?

b) Le chiffre d'affaires si la dépenses bimensuelle est 300 millions ?

D'après bac

12 Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	69
Y	11,8	14,0	12,6	15,0	15,5	15,1

1. Représenter graphiquement le nuage de points dans un plan muni du repère orthogonal (O, I, J) (0,5 cm pour 1 an et 3 cm pour l'unité de tension artérielle).

2. Calculer la moyenne et la variance des séries statistiques associées aux variables X et Y .

3. a) Trouver une équation de la droite de régression de Y en fonction de X .

b) Trouver une équation de la droite de régression de X en fonction de Y .

c) Représenter ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.

4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y .

5. Une personne de 70 ans a une tension maximale de 16,2. Cela vous paraît-il normal ?

D'après bac

13 Corrélation linéaire et moindres carrés (Étude de l'évolution du stock d'une entreprise commerciale et ajustement exponentiel.)

Année	i	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Rang de l'année x_i		1	2	3	4	5	6
Nbre d'articles y_i		6 400	7 200	8 700	10 400	12 600	15 000

1. On note $z = \log(y_i)$, (logarithme décimal). Calculer le coefficient de corrélation linéaire des variables x et z ; (les logarithmes décimaux seront arrondis à 10^{-1} près ; les calculs seront présentés sous forme de tableau et, en dehors des valeurs de x_i et de x_i^2 , tous les nombres de ce tableau seront arrondis à 10^{-1} près).

2. Déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite ajustant les valeurs de y à celles de x . En déduire, sous la forme $y = k \times \lambda x$, l'ajustement des valeurs de y à celles de x . (λ sera arrondi au plus proche à 10^{-3} près et k à une unité près).

RECOMMANDATION

Les calculs seront effectués en conservant les résultats en mémoire dans une calculatrice.

3. Si l'évolution du stock se poursuit de la même manière dans le temps, peut-on prévoir le nombre d'articles en stock en 2002 ?

14 Distance d'arrêt

La mesure de la distance d'arrêt effectuée pour sept automobiles roulant à des vitesses différentes a fourni les résultats consignés dans le tableau suivant :

Numéro de la voiture	1	2	3	4
Vitesse x_i (en km/h)	35	50	68	35
Distance d'arrêt y_i (en m)	5,35	14,50	20,32	6,50
Numéro de la voiture	5	6	7	
Vitesse x_i (en km/h)	80	50	95	
Distance d'arrêt y_i (en m)	38,55	11,52	50,50	

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$ dans un plan muni d'un repère orthogonal.
2. La forme du nuage ne permet pas de conjecturer un ajustement affine. On pose :

$$u^2 = y \text{ (c'est-à-dire } u = \sqrt{y}, \text{ car } u > 0).$$

- a) Établir le tableau statistique de la série double de caractères $(x; u)$.
- b) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i; u_i)$ dans le plan muni d'un second repère orthogonal.
- c) Le nuage associé à la série statistique double de caractère (x, u) se prête-t-il à un ajustement affine ? Si oui calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de caractère (x, u) .
- d) Utiliser la méthode des moindres carrés pour déterminer une équation de la droite de régression de u en x .
- e) Dédire de ce qui précède une estimation de la distance nécessaire à l'arrêt d'une voiture lancée à 100 km/h.

N.B. : Tous les résultats numériques seront donnés à 10^{-2} près par défaut.

15 Ajustement quadratique

Le tableau ci-contre fournit l'évolution de la production d'énergie nucléaire dans un pays P. On souhaite estimer la production future et pour cela on hésite entre deux ajustements possibles de la série double $(x_i; y_i)$.

Années	Rang x_i de l'année	Production y_i en TW.h
1985	0	213
1990	5	298
1991	6	315
1992	7	322
1993	8	350
1994	9	342
1995	10	359
1996	11	378

PREMIÈRE PARTIE : ajustement affine

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i; y_i)$, (le résultat sera donné à 10^{-3} près par défaut). Interpréter ce résultat.
2. Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression (D) de y en x (on donnera les coefficients à 10^{-1} près par défaut).
3. Dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 TW.h sur l'axe des ordonnées, en commençant la graduation à 200 TW.h, représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$, associé à la série statistique double donnée et la droite (D).

4. a) À partir de ce graphique, déterminer en quelle année la production en énergie nucléaire dépassera 420 TW.h.
- b) Retrouver le résultat précédent par le calcul.

DEUXIÈME PARTIE : ajustement à l'aide d'une parabole

On ajuste à main levée par une parabole ($\mathcal{P}$) passant par A(0 ; 213), B(5 ; 298) et C(10 ; 363).

1. a) $y = ax^2 + bx + c$ est une équation de la parabole ($\mathcal{P}$). Déterminer les nombres réels a , b et c .
- b) Tracer ($\mathcal{P}$) sur le graphique précédent.
2. a) Estimer, à l'aide de la parabole ($\mathcal{P}$), en quelle

année la production dépassera 420 TW.h.
b) Retrouver le résultat précédent par le calcul.

16 Ajustement logarithmique

On s'intéresse à l'évolution du parc automobile dans un pays P.

Années	Rang x_i de l'année	Nombre y_i de voitures (en millions)
1970	1	11,8
1974	5	14,6
1980	11	18,4
1985	16	24,7
1990	21	26,7
1996	27	27,8
1997	28	25,5

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$, associé à la série statistique double $(x_i; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, où 0,5 cm représente une année en abscisse et 1 cm représente 1 million de voitures en ordonnée (en commençant la graduation à 10 millions).

2. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire à 10^{-3} près par défaut.

Justifier un ajustement affine.

b) Par la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite de régression de y en x ; on donnera les coefficients à 10^{-1} près par excès. Tracer cette droite sur le graphique du 1.

c) En supposant que ce modèle mathématique reste valable jusqu'en l'an 2000, faire une estimation du nombre de véhicules en l'an 2000 dans le pays P.

3. La forme du nuage s'inscrivant dans les dernières années, on se propose de faire un autre type d'ajustement. Pour cela, on considère un ajustement logarithmique par la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = a + b \ln x$.

On impose à la courbe ($\mathcal{C}$) de passer par les points A(1 ; 9,5) et B(25 ; 26).

a) En déduire les valeurs exactes de a et b , puis la valeur approchée de b à 10^{-1} près par défaut.

En déduire l'expression de $f(x)$ (on prendra pour b la valeur approchée précédemment trouvée).

b) Étudier les variations de f et tracer ($\mathcal{C}$) sur le segment $[1; 35]$ dans le graphique déjà utilisé.

c) Se servir de ce nouvel ajustement pour estimer le nombre de véhicules en 2000 dans le pays P.

17 Ajustement « puissance »

Une grande entreprise multinationale lancée sur le marché des Jeux électroniques, dispose, sur cinq années consécutives de l'évolution de sa production x (en milliers) et de son résultat net y (en millions de F CFA) (résultats arrondis) :

x_i (en milliers)	200	400	1 600	2 000	2 800
y_i (en millions de FCFA)	18	84	1 188	1 800	6 600

1. Représenter cette série dans un repère bien choisi. L'allure du nuage suggère-t-elle une liaison statistique entre les variables x et y ? De quelle forme ?
2. Calculer les coefficients de corrélation linéaire des séries $(x_i; y_i)$; $(x_i; \ln y_i)$ et $(\ln x_i; \ln y_i)$ à 10^{-4} près. Quel ajustement semble être le meilleur ?
3. Donner une équation de la droite de régression de $\ln y$ en $\ln x$ (coefficients arrondis à 10^{-2} près). En déduire un « ajustement puissance » de y en x .
4. Quelle estimation peut-on faire de la variation relative du résultat de cette entreprise pour une production qui passerait de 4 000 à 4 400 ?

Le calcul de probabilités prend de plus en plus d'importance, tant du point de vue théorique en physique mathématique, que du point de vue pratique en économie.

Son développement est dû aux réflexions de Blaise Pascal et de Pierre de Fermat sur les jeux et s'appuyait alors sur la combinatoire.

De nombreux mathématiciens tels que Bernoulli, Laplace, Gauss, Cauchy, Borel, Lebesgue, ... ont contribué à faire du calcul des probabilités un outil aujourd'hui utilisé dans tous les domaines.

De nos jours, le champ immense de leurs applications à la totalité des activités humaines semble donner raison au physicien et mathématicien Maxwell : « La vraie logique du monde est celle du calcul des probabilités. »



© Photographie HACHETTE

Pierre de Fermat
mathématicien français –
1601-1665.



© Photographie HACHETTE

Blaise Pascal
physicien et savant français –
1623-1662.

SOMMAIRE

1. Analyse combinatoire	294
2. Probabilités d'un évènement	297

1

Analyse combinatoire

1.1. Les nombres A_n^p , $n!$, C_n^p

Définitions

En classe de Première SE la mise en place des outils de dénombrement a conduit à l'introduction des nombres entiers naturels A_n^p , $n!$, C_n^p ,

— lorsque n et p sont des nombres entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$:

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) ; n! = A_n^n ; C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

— par convention, on a posé :

$$A_n^1 = n \text{ et } A_n^0 = 1 ; 1! = 1 \text{ et } 0! = 1 ; C_n^1 = n \text{ et } C_n^0 = 1.$$

Propriétés

Exemple introductif

On donne un ensemble A contenant 12 objets.

Pour choisir 8 objets parmi 12, il y a C_{12}^8 possibilités.

Mais choisir 8 objets parmi 12 revient à choisir 4 objets parmi 12 que l'on va laisser de côté, il y a donc autant de façons de choisir 8 objets que 4 objets parmi 12.

On en déduit que : $C_{12}^8 = C_{12}^4$.

On démontre la propriété suivante à l'aide de l'expression de C_n^p .

Propriété

Pour tous nombres entiers naturels n et p tels que $n \geq p$, $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Activité introductive

On donne : $E = \{a, b, c, d\}$.

Quel est le nombre de parties de E à trois éléments ?

Quel est le nombre de parties de E à trois éléments contenant a ?

Quel est le nombre de parties de E à trois éléments ne contenant pas a ?

En déduire que $C_4^3 = C_3^2 + C_3^3$.

On démontre la propriété suivante à l'aide de l'expression de C_n^p .

Propriété

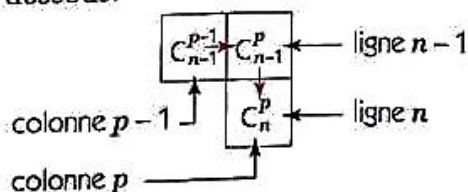
Pour tous nombres entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

Calculs successifs des nombres C_n^p

Disposition pratique

On peut calculer successivement les nombres C_n^p en utilisant l'égalité $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

L'utilisation d'un tableau faisant correspondre n aux lignes et p aux colonnes donne la disposition pratique ci-dessous.



— La ligne 1 est constituée de 1 car : $C_n^0 = 1$

— La diagonale est constituée de 1 car : $C_n^n = 1$

Le tableau ainsi obtenu est appelé triangle de Pascal.

■ Triangle de Pascal
 $C_7^3 = C_6^2 + C_6^3 = 15 + 20 = 35$.

Information historique

Ce triangle était déjà connu de Tartaglia (1558), Stiefel (1543) et des Chinois (1303). Mais c'est Blaise Pascal qui donna des applications très intéressantes de ce triangle dans son traité du Triangle arithmétique (1654).

Pascal
 (1623 - 1662)



n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
...									

← ligne 7

← colonne 3

Formule du binôme de Newton

■ Activité introductive

a et b étant des nombres complexes, le développement de $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, permet de conjecturer que : pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^p a^{n-p}b^p + \dots + C_n^n b^n$. (1)
 On veut contrôler cette conjecture par une démonstration par récurrence.

Pour cela, on peut procéder comme suit :

① vérifier l'égalité pour $n = 1$

② supposer établie cette égalité pour un nombre entier naturel k supérieur à 1

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \dots + C_k^p a^{k-p}b^p + \dots + C_k^k b^k$$

établir alors cette égalité pour $k+1$; pour cela,

– écrire : $(a+b)^{k+1} = (a+b) \times (a+b)^k$

– développer : $(a+b)^{k+1} = (a+b)[C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \dots + C_k^p a^{k-p}b^p + \dots + C_k^k b^k]$

– regrouper les termes semblables en utilisant les propriétés :

$$C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1 \quad ; \quad C_n^n = C_{n+1}^n = 1 \quad ; \quad C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p$$

③ conclure.

Propriété

Pour tous nombres complexes a et b , pour tout entier naturel n non nul,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^p a^{n-p}b^p + \dots + C_n^n b^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p}b^p.$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^p, \dots, C_n^n$ sont appelés coefficients binomiaux.

■ Exemple

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^p x^p + \dots + C_n^n x^n.$$

Exercices

1.a Calculer les nombres entiers naturels :

$$A_n^1 ; A_n^p - A_n^{p-1} ; (1 \leq p \leq n)$$

1.b Développer les expressions suivantes :

$$(1+x)^8 ; (1-x)^7 ; (1-x)^n ; (3x-2)^9.$$

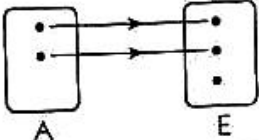
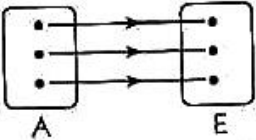
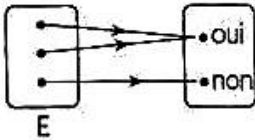
1.c Calculer les nombres entiers naturels définis

$$\text{par : } A = \frac{(n+1)!}{n!} ; B = \frac{n!}{p!} ;$$

$$C = (n+p)! - n! \quad [p \leq n].$$

1.2. Des outils pour dénombrer

TABLEAU RÉCAPITULATIF

	Définitions	Propriétés	Formules
Arrangement	On appelle arrangement de p éléments de E, tout p-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ d'éléments de E deux à deux distincts ($1 \leq p \leq n$). 	Le nombre d'arrangements de p éléments de E est : A_n^p C'est le nombre d'injections d'un ensemble A de p éléments dans un ensemble E de n éléments.	$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$ p facteurs $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ $A_n^1 = n \quad A_n^0 = 1$
Permutation	On appelle permutation des éléments de E, tout arrangement des n éléments de E ($n > 1$). 	Le nombre de permutations de n éléments de E est : $n!$ C'est le nombre de bijections d'un ensemble A de n éléments dans un ensemble E de n éléments.	$n! = n(n-1) \dots \times 3 \times 2 \times 1$ $1! = 1 \quad 0! = 1$
Combinaison	On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie de E qui possède p éléments ($1 \leq p \leq n$). 	Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : C_n^p Le nombre de parties d'un ensemble non vide de n éléments est : 2^n c'est le nombre d'applications de E dans l'ensemble {oui, non}	$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!}$ $C_n^1 = n \quad C_n^0 = 1$ $C_n^{n-p} = C_n^p$ $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Exercices

- 1.d Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec notre alphabet de 26 lettres :
- avec répétition des lettres ?
 - sans répétition des lettres ?
- (On admet que les mots ainsi formés peuvent ne pas avoir de sens.)
- 1.e On veut constituer un nombre de 5 chiffres en utilisant les chiffres 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 sans qu'il y ait deux ou plusieurs chiffres identiques.
- Combien peut-on former de nombres ?
 - Combien y en a-t-il qui ont le chiffre 9 comme chiffre des centaines ?

- c) Combien y en a-t-il qui commencent par 56 ?
- 1.f Dix personnes sont assises autour d'une table ronde.
- De combien de façons peut-on disposer ces personnes :
- lorsque les chaises sont numérotées ?
 - lorsque les chaises ne sont pas numérotées ?
- 1.g Une équipe de football est constituée de 11 joueurs. Combien d'équipes de football peut-on composer lorsqu'il faut choisir les joueurs parmi 20 personnes ?

2

Probabilités d'un événement

2.1. Évènements d'un univers d'éventualités

De la statistique aux probabilités

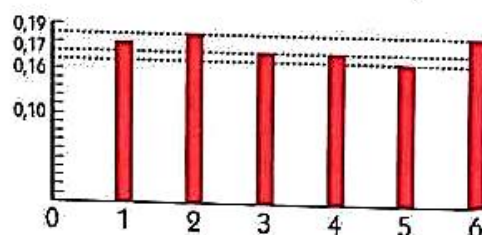
Exemple introductif 1

On considère un dé cubique parfaitement équilibré, dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On a lancé ce dé cent fois de suite et relevé à chaque lancer le chiffre inscrit sur la face supérieure. On a relevé dans un tableau tous les chiffres obtenus pendant les cent lancers. Étudions la série statistique associée à ce relevé.

Tableau des fréquences observées

Modalité du caractère	1	2	3	4	5	6	Totaux
Effectif	17	18	16	16	15	18	100
Fréquence	0,17	0,18	0,16	0,16	0,15	0,18	1

Diagramme en bâton des fréquences



Analyse des résultats

- On constate que les fréquences des différentes modalités sont sensiblement égales.
- Intuitivement, on peut dire qu'en lançant un dé parfaitement équilibré on a « autant de chances » de voir apparaître sur la face supérieure n'importe lequel des six chiffres: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
- Calculons la moyenne des fréquences observées :

$$\frac{0,17 + 0,18 + 0,16 + 0,16 + 0,15 + 0,18}{6} \approx 0,166$$

- Remarquons que 0,166 est une valeur approchée de $\frac{1}{6}$ c'est-à-dire « une chance sur six ».
- Nous pouvons considérer $\frac{1}{6}$ comme fréquence théorique pour chacune des six modalités. Les fréquences observées 0,15 ; 0,16 ; 0,17 ; 0,18 sont proches de cette fréquence théorique.

L'objet de cette leçon est de présenter cette fréquence théorique par un modèle mathématique.

En renouvelant ce lancer mille fois, on obtient pour chacune des modalités une fréquence environ égale à celle du tableau précédent, la moyenne des fréquences observées étant plus proche de la fréquence théorique $\frac{1}{6}$.

En effet, selon le mathématicien Jacques BERNOULLI (1654 - 1705), dans son livre *L'art de conjecturer* : « si l'on répète un grand nombre de fois, dans les mêmes conditions, une centaine d'« expériences aléatoires », la fréquence observée semble se rapprocher d'une fréquence théorique. »

Exemple introductif 2

Deux personnes décident de jouer ensemble en lançant deux dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Le joueur A propose au joueur B la règle suivante :

« Si la somme des chiffres obtenus est 7, tu me donnes 100 F, si la somme des chiffres obtenus est 9, je te donne 100 F. »

Après 300 parties, le joueur A a gagné 2 300 F.

Savait-il qu'il aurait de « fortes chances » de gagner ?

Un observateur a relevé dans un tableau toutes les sommes de chiffres obtenus pendant les 300 parties. L'étude de la série statistique associée à ce relevé a permis d'établir le tableau des fréquences observées et le diagramme en bâton de ces fréquences observées.

Quelles analyses peut-on faire de ces résultats ?

Tableau des fréquences observées

Modalité du caractère	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Totaux
Effectif	8	13	20	29	38	51	48	27	24	17	10	300
Fréquence	0,027	0,050	0,100	0,096	0,125	0,170	0,160	0,090	0,080	0,056	0,033	1

Analyse des résultats

La fréquence de la modalité 7 du caractère est, comme l'avait prévu le joueur A, supérieure à la fréquence de la modalité 9 ; le joueur A savait donc qu'il y avait « plus de chance » d'obtenir un total 7 plutôt qu'un total 9 !

La réponse de ce problème sera donnée ultérieurement.

Vocabulaire

Pour chacune des deux expériences décrites ci-dessous, nous allons observer les résultats et dégager progressivement le vocabulaire propre à notre étude ultérieure.

■ Univers des éventualités d'une expérience aléatoire

Expérience $\mathcal{E}_1$

On considère un dé cubique parfaitement équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé et on note le chiffre inscrit sur la face supérieure.

Pour chacune de ces deux expériences $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, il n'est pas possible d'en prévoir les résultats. Ces expériences donnent des résultats aléatoires dus essentiellement au hasard, on dit que ce sont des expériences aléatoires ou épreuves aléatoires. Cependant, pour chacune de ces expériences aléatoires, on peut prévoir tous les résultats possibles ou éventualités.

L'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire est appelé univers et noté $\mathcal{U}$.

Pour $\mathcal{E}_1$

5 est un résultat possible :

$\mathcal{U}_1$ désignant l'univers des éventualités, on a :

$\mathcal{U}_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Expérience $\mathcal{E}_2$

On considère une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On lance trois fois de suite cette pièce de monnaie et on note par ordre d'apparition le côté visible: P pour PILE et F pour FACE.

Pour $\mathcal{E}_2$

PPF est un résultat possible ;

$\mathcal{U}_2$ désignant l'univers des éventualités, on a :

$\mathcal{U}_2 = \{PPP; PPF; PFP; FPP; PFF; FPF; FFP; FFF\}$.

Définition

$\mathcal{E}$ étant une expérience aléatoire donnant un nombre fini de résultats possibles appelés éventualités, l'ensemble de ces résultats possibles est appelé univers des éventualités de $\mathcal{E}$, on le note $\mathcal{U}$.

■ Événements, événements élémentaires

Pour $\mathcal{E}_1$

– « le chiffre obtenu est pair », c'est avoir comme résultat : 2 ou bien 4 ou bien 6.

On dit que l'événement A_1 « le chiffre obtenu est pair » est réalisé lorsqu'on obtient l'une des éventualités : 2 ; 4 ; 6.

On écrit : $A_1 = \{2; 4; 6\}$; donc : $A_1 \subset \mathcal{U}_1$.

– On dit alors que l'événement « le chiffre obtenu est 3 » est un événement élémentaire.

$\mathcal{E}_1$ a pour événements élémentaires : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$.

– Il n'est pas possible de réaliser l'événement « le chiffre obtenu est 9 », cet événement est dit impossible.

Cependant, il est toujours possible de réaliser l'événement « le chiffre obtenu est compris entre 1 et 6 », cet événement est dit certain.

Pour $\mathcal{E}_2$

L'événement « les trois côtés visibles contiennent exactement un PILE » est la partie ci-dessous de $\mathcal{U}_2$: $\{PPF; PFP; FFP\}$

• Traduire en langage courant l'événement : $\{PPF; PFP; FFP\}$

• Traduire en langage des probabilités l'événement : « Les trois côtés visibles sont les mêmes »

• Écrire tous les événements élémentaires.

• Quel est l'événement certain ?

Définition

$\mathcal{U}$ étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, on appelle **événement** de $\mathcal{U}$ toute partie de l'ensemble $\mathcal{U}$.

- Lorsque cet événement est un singleton, on l'appelle **événement élémentaire** ;
- lorsque cet événement est l'ensemble vide, on l'appelle **événement impossible** ;
- lorsque cet événement est l'ensemble $\mathcal{U}$, on l'appelle **événement certain**.

■ Réunion, intersection de deux événements

Pour $\mathcal{E}_1$

Considérons les événements suivants :

A_1 « le chiffre obtenu est pair » ;

B_1 « le chiffre obtenu est multiple de 3 ».

On a : $A_1 = \{2 ; 4 ; 6\}$, $B_1 = \{3 ; 6\}$.

- Réaliser l'événement A_1 ou l'événement B_1 c'est obtenir un chiffre pair ou un multiple de 3 ; on dit que l'on a réalisé l'événement (A_1 ou B_1).

Cet événement est noté $A_1 \cup B_1$.

$$A_1 \cup B_1 = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}.$$

- Réaliser l'événement A_1 et l'événement B_1 c'est obtenir un chiffre pair multiple de 3 ; on dit que l'on a réalisé l'événement (A_1 et B_1).

Cet événement est noté $A_1 \cap B_1$.

$$A_1 \cap B_1 = \{6\}.$$

Pour $\mathcal{E}_2$

Considérons les événements suivants :

A_2 : « Les trois figures obtenues contiennent au moins deux PILE ».

B_2 : « Les trois figures obtenues contiennent au plus deux PILE ».

- Réaliser l'événement A_2 c'est obtenir deux PILE ou trois PILE.

$$A_2 = \{PPF ; PFP ; FPP ; PPP\}.$$

- Réaliser l'événement B_2 c'est obtenir zéro PILE ou un PILE ou deux PILE.

$$B_2 = \{FFF ; PFF ; FPF ; FFP ; PPF ; PFP ; FPP\}$$

• Quel est l'événement (A_2 ou B_2) ?

• Quel est l'événement (A_2 et B_2) ?

Définition

$\mathcal{U}$ étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, A, B des événements de $\mathcal{U}$,

- on appelle événement (**A ou B**) la partie $A \cup B$ de $\mathcal{U}$;
- on appelle événement (**A et B**) la partie $A \cap B$ de $\mathcal{U}$.

■ Événements contraires – Événements incompatibles

Pour $\mathcal{E}_1$

A_1 est l'événement « le chiffre obtenu est pair ».

On a : $A_1 = \{2 ; 4 ; 6\}$; $\overline{A_1} = \{1 ; 3 ; 5\}$.

$\overline{A_1}$ est donc l'événement « le chiffre obtenu est impair ».

$\overline{A_1}$ est le complémentaire de A_1 dans $\mathcal{U}_1$.

On dit que $\overline{A_1}$ est l'événement contraire de A_1 ou que A_1 et $\overline{A_1}$ sont des événements contraires.

- Considérons les deux événements suivants :

C_1 « le chiffre obtenu est plus petit que 4 ».

D_1 « le chiffre obtenu est plus grand que 4 ».

Il n'est pas possible de réaliser simultanément ces deux événements.

On dit ces deux événements sont incompatibles.

On a : $C_1 = \{1 ; 2 ; 3\}$, $D_1 = \{5 ; 6\}$,

d'où : $C_1 \cap D_1 = \emptyset$.

Deux événements contraires sont incompatibles.

Pour $\mathcal{E}_2$

A_2 est l'événement « les trois côtés visibles contiennent au moins deux PILE ».

• Donner le contraire de l'événement A_2 .

- Considérons les deux événements suivants :

C_2 « les trois côtés visibles contiennent zéro PILE ».

D_2 « les trois côtés visibles contiennent zéro FACE ».

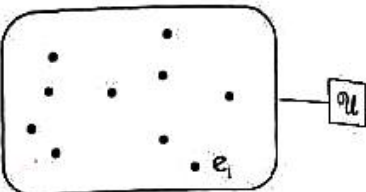
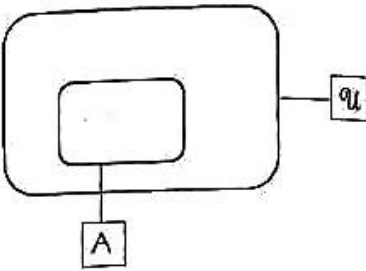
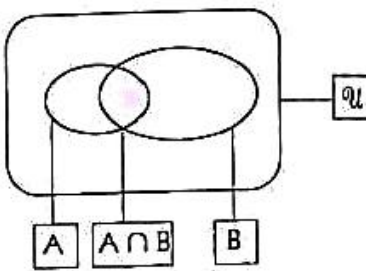
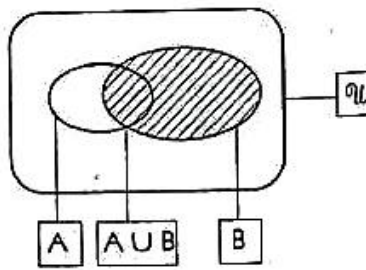
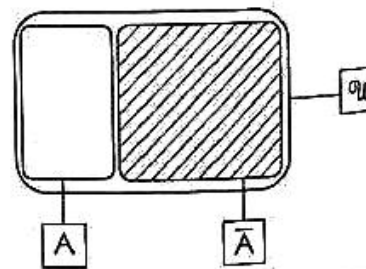
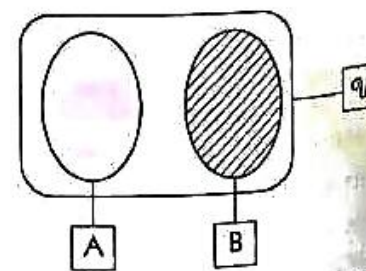
• Ces deux événements sont-ils incompatibles ?

Définition

$\mathcal{U}$ étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, A, B des événements de $\mathcal{U}$,

- on appelle événement **contraire** de A la partie $\overline{A}$ de $\mathcal{U}$ complémentaire de A dans $\mathcal{U}$;
- on dit que l'événement A et l'événement B sont **incompatibles** lorsque l'événement (A et B) est impossible, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \emptyset$.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

	Langage des ensembles	Langage des probabilités	Illustrations
Univers	$\mathcal{U}$ est un ensemble $e_i \in \mathcal{U}$	$\mathcal{U}$ est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire e_i est une éventualité	
Évènements	$A \subset \mathcal{U}$ $e_i \in A$ $\{e_i\} \subset A$ $A = \emptyset$ $A = \mathcal{U}$	A est un évènement de $\mathcal{U}$ e_i réalise l'évènement A $\{e_i\}$ est un évènement élémentaire l'évènement A est impossible l'évènement A est certain	
Intersection de deux évènements	$A \cap B$ $e_i \in A \cap B$	l'évènement (A et B) e_i réalise l'évènement A et e_i réalise l'évènement B	
Réunion de deux évènements	$A \cup B$ $e_i \in A \cup B$	l'évènement (A ou B) e_i réalise l'évènement A ou e_i réalise l'évènement B	
Contraire d'un évènement	$\bar{A} = {}^c_{\mathcal{U}} A$ $e_i \in A \Leftrightarrow e_i \notin \bar{A}$	$\bar{A}$ est l'évènement contraire de A A et $\bar{A}$ sont des évènements contraires e_i réalise l'évènement A si et seulement si e_i ne réalise pas l'évènement $\bar{A}$	
Évènements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$ A et B sont disjoints	l'évènement (A et B) est impossible l'évènement A et l'évènement B sont incompatibles	

2.2. Probabilité d'un évènement

Définition

Les exemples introductifs du paragraphe 2.1 suggèrent la présentation d'un modèle mathématique pour la fréquence théorique d'un évènement, c'est la probabilité de cet évènement ; celle-ci permet de mesurer les chances de réalisation de l'évènement.

Définition

$\mathcal{U}$ étant l'univers des évènements d'une expérience aléatoire,

on dit que l'on a défini une probabilité P sur $\mathcal{U}$ lorsque, à tout évènement A de $\mathcal{U}$, on peut associer un nombre réel appelé probabilité de A et noté $P(A)$ vérifiant les conditions suivantes :

- la probabilité d'un évènement est comprise entre 0 et 1 ;
- la probabilité de l'évènement certain est 1, celle de l'évènement impossible est 0 ;
- la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.

P est une probabilité sur $\mathcal{U}$ signifie que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout évènement } A \text{ de } \mathcal{U}, 0 \leq P(A) \leq 1 \\ P(\mathcal{U}) = 1 ; P(\emptyset) = 0 \\ \text{Si } A = \{e_1 ; \dots ; e_n\} \text{ alors } P(A) = \sum_{i=1}^n P(\{e_i\}) \end{array} \right.$$

Exemple 1

$\mathcal{U}$ étant l'univers des éventualités a, b, c, d, e d'une expérience aléatoire, déterminons la probabilité sur $\mathcal{U}$ telle que :

$$P(\{a\}) = 2 P(\{b\}) = 2 P(\{c\}) = 4 P(\{d\}) = 4 P(\{e\})$$

Calculons la probabilité des évènements A, B, C définis par : $A = \{a ; b\}$, $B = \{c ; e\}$, $C = \{b ; c ; d\}$.

Détermination de la probabilité P

On a : $\mathcal{U} = \{a ; b ; c ; d ; e\}$

d'où :

$$P(\mathcal{U}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) + P(\{e\}) = 1$$

$$10 P(\{e\}) = 1$$

$$\text{donc : } P(\{e\}) = 0,1 ; P(\{a\}) = 0,4 ; P(\{b\}) = 0,2 ;$$

$$P(\{c\}) = 0,2 ; P(\{d\}) = 0,1.$$

Calcul de $P(A), P(B), P(C)$

On a : $A = \{a ; b\}$, $B = \{c ; e\}$, $C = \{b ; c ; d\}$

$$\text{d'où : } P(A) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = 0,6$$

$$P(B) = P(\{c\}) + P(\{e\}) = 0,3$$

$$P(C) = P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = 0,5.$$

Propriétés

$\mathcal{U}$ étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, P une probabilité définie sur $\mathcal{U}$, la définition des probabilités et les opérations sur les ensembles permettent de démontrer les propriétés suivantes.

■ Probabilité de la réunion de deux évènements incompatibles

Propriété

Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Démonstration guidée

- Poser $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, déterminer $A \cup B$.
- Exprimer $P(A), P(B)$ et $P(A \cup B)$ en fonction des probabilités des évènements élémentaires.
- Illustrer par un diagramme.

Exemple 2

Revenons à l'exemple 1 et déduisons $P(A \cup B)$.

On a : $A \cap B = \emptyset$

$$\text{d'où : } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,6 + 0,3 = 0,9.$$

■ Probabilité de la réunion de deux événements

Propriété

Si A et B sont deux événements quelconques, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration guidée

- Vérifier que les événements $(\bar{A} \cap B)$, $(A \cap \bar{B})$, $(A \cap B)$ sont incompatibles et ont pour réunion B .
- Illustrer par un diagramme.

Exemple 3

Revenons à l'exemple 1 et déduisons $P(A \cup C)$.

On a : $A \cap C = \{b\}$ et $P(\{b\}) = 0,2$

donc : $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$
 $= 0,6 + 0,5 - 0,2 = 0,9$.

■ Probabilité du contraire d'un événement

Propriété

Si $\bar{A}$ est le contraire d'un événement A , alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration guidée

L'événement A et l'événement $\bar{A}$ sont incompatibles et leur réunion est $\mathcal{U}$.

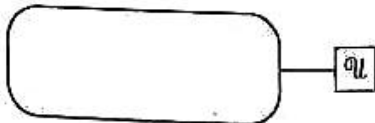
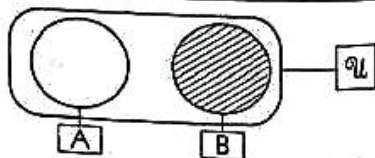
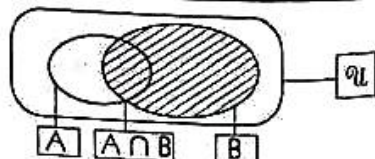
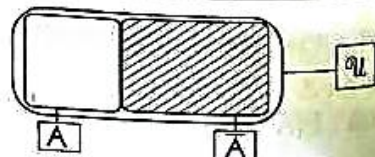
Exemple 4

Revenons à l'exemple 1 et déduisons $P(\{c; d; e\})$.

On a : $\{a; b\} = A$ et $\{c; d; e\} = \bar{A}$

donc : $P(\{c; d; e\}) = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 $= 1 - 0,6 = 0,4$.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

	Propriétés des probabilités	Illustrations
Événement impossible Événement certain	$P(\emptyset) = 0 ; P(\mathcal{U}) = 1$	
Réunion d'événements incompatibles	si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	
Réunion d'événements quelconques	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	
Contraire d'un événement	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	

2.3. Calcul des probabilités

Équiprobabilité des événements élémentaires

Définition – Propriété

- $\mathcal{U}$ est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, P une probabilité définie sur $\mathcal{U}$.
- On dit que cette expérience aléatoire a lieu dans un cadre d'équiprobabilité des événements élémentaires lorsque tous les événements élémentaires de $\mathcal{U}$ ont la même probabilité.
 - Dans ce cas, pour tout événement A de $\mathcal{U}$, $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \mathcal{U}}$.

Remarque

Une expérience aléatoire qui a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires doit être explicitement mentionnée.

Cependant, la tradition veut que le dispositif et la description de l'expérience aléatoire permettent de reconnaître celle qui a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.

Ce cadre est suggéré dans un énoncé de problème par certaines expressions.

– Pour les lancers, les dés, les pièces de monnaie... sont supposés parfaitement équilibrés et leur face porte des signes.

– Pour les tirages, les boules, les jetons, les cartes... sont indiscernables au toucher, de plus « on tire au hasard ».

Des modèles de références en calcul des probabilités

■ Tirage d'une boule – Lancer d'un dé parfait

Exemple

Une urne contient six boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 6. On tire une boule de cette urne et on note son numéro.

On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 ; on lit le numéro inscrit sur la face supérieure.

Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ?
Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre plus grand que 4 ?

L'univers des éventualités

Tirer d'une urne une boule indiscernable au toucher et lire son numéro est une expérience aléatoire dont l'univers $\mathcal{U}$ des éventualités est défini par :

Lancer un dé cubique et lire le numéro de la face supérieure est une expérience aléatoire dont l'univers $\mathcal{U}$ est défini par :

$$\mathcal{U} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}.$$

Les boules étant indiscernables au toucher, cette expérience aléatoire a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.

Le dé étant parfaitement équilibré, cette expérience aléatoire a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.

Le calcul des probabilités

A est l'événement « le chiffre obtenu est pair » ; B l'événement « le chiffre obtenu est plus grand que 4 ».

$$\text{On a : } A = \{2 ; 4 ; 6\} ; B = \{5 ; 6\}.$$

$$\text{d'où : } P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} ; P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

■ Tirage d'une carte

Exemple

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes comprenant quatre « couleurs » : Pique, Trèfle, Carreau, Cœur.

Chaque « couleurs » est composée de 8 cartes : l'As, le Roi, la Dame, le Valet, le 10, le 9, le 8, le 7.

Quelle est la probabilité de tirer un Trèfle ? Un As ? La Dame de Cœur ? une carte rouge ?

(Le Pique et le Trèfle sont noirs, le Carreau et le Cœur sont rouges).

L'univers des éventualités

Tirer au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes est une expérience aléatoire dont l'univers $\mathcal{U}$ des éventualités contient 32 éléments. Les cartes étant indiscernables, cette expérience a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.

Le calcul des probabilités

A est l'évènement « la carte tirée est un Trèfle »,

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

B est l'évènement « la carte tirée est un As »,

$$P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

C est l'évènement « la carte tirée est la Dame de Cœur »,

$$P(C) = \frac{\text{card } C}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{1}{32}$$

D est l'évènement « la carte tirée est rouge »,

$$P(D) = \frac{\text{card } D}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

■ Tirages simultanés

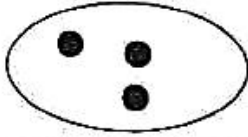
Exemple

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher dont six rouges $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ et quatre noires N_1, N_2, N_3, N_4 . On tire simultanément, au hasard, trois boules du sac et on note leurs couleurs. Calculons la probabilité de chacun des événements suivants :

A « les trois boules tirées contiennent au moins une rouge » ;

B « les trois boules tirées contiennent au plus une rouge ».

Les événements de l'épreuve

	Le dispositif de l'épreuve	Description de l'épreuve	Une éventualité de l'épreuve
Lecture de l'énoncé	Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher dont : 6 rouges et 4 noires	– On tire simultanément (au hasard) trois boules – On note les couleurs	– Un ensemble de 3 boules
Modélisation	E : ensemble des boules $E = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, N_1, N_2, N_3, N_4\}$		– Une partie de 3 éléments de E (c'est une combinaison de 3 éléments de E) : $\{R_1, N_2, N_3\} ; \{N_2, R_3, R_4\} \dots$

L'univers des éventualités

Désignons par $\mathcal{U}$ l'univers des éventualités. On a : $\text{card } \mathcal{U} = C_{10}^3 = \frac{10!}{7! 3!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{2 \times 3} = 120$.

Le calcul des probabilités

Les boules étant indiscernables au toucher et tirées au hasard, on a l'équiprobabilité des événements élémentaires.

– Évènement A

« les trois boules tirées contiennent au moins une rouge »

Un élément de A est une partie de E constituée par :

soit $\begin{cases} \text{une boule rouge et deux boules noires} & (1) \\ \text{deux boules rouges et une boule noire} & (2) \\ \text{trois boules rouges} & (3) \end{cases}$

Pour obtenir un élément de A de type (1) à chacune des 6 boules rouges, on associe deux des quatre boules noires ; leur nombre est $C_6^1 \times C_4^2$.

De même, le nombre d'éléments de A de type (2) est $C_4^1 \times C_6^2$.

Un élément de A de type (3) est une combinaison de 3 éléments de l'ensemble des 6 boules rouges ; leur nombre est C_6^3 .

d'où : $\text{card } A = C_6^1 \times C_4^2 + C_4^1 \times C_6^2 + C_6^3 = 116$

donc : $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$

– Évènement B

« les trois boules tirées contiennent au plus une rouge »

Un élément de B est une partie de E constituée par :

soit $\begin{cases} \text{trois boules noires} \\ \text{une boule rouge et deux boules noires} \end{cases}$

d'où : $\text{card } B = C_4^3 + C_6^1 \times C_4^2 = 4 + 6 \times 6 = 40$

donc : $P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

■ Tirages successifs avec remise

Exemple

Un sac contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 et trois noires N_1, N_2, N_3 . On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on la remet dans le sac, puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.

Calculons les probabilités de chacun des événements suivants :

A « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

B « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Les événements de l'épreuve

Les évènements de l'épreuve	Le dispositif de l'épreuve	Description de l'épreuve	Une éventualité de l'épreuve				
Lecture de l'énoncé	Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher dont : 5 rouges et 3 noires	– On tire une boule (au hasard) – On note sa couleur – On la remet – On tire une 2^e boule – On note sa couleur	– Un ensemble ordonné de 2 boules				
Modélisation	E : ensemble des boules E = {R ₁ , R ₂ , R ₃ , R ₄ , R ₅ , N ₁ , N ₂ , N ₃ }	<table><tr><th>1^{er} tirage</th><th>2^e tirage</th></tr><tr><td>1 boule tirée parmi 8</td><td>1 boule tirée parmi 8</td></tr></table>	1 ^{er} tirage	2 ^e tirage	1 boule tirée parmi 8	1 boule tirée parmi 8	– Un couple d'éléments de E (c'est un élément de E × E) : (R₁, N₂) ; (R₂, R₂) ...
1 ^{er} tirage	2 ^e tirage						
1 boule tirée parmi 8	1 boule tirée parmi 8						

L'univers des éventualités

Désignons par $\mathcal{U}$ l'univers des éventualités. On a : $\mathcal{U} = E \times E$; $\text{card } \mathcal{U} = 8^2 = 64$.

Le calcul des probabilités

Ici encore, l'épreuve a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.

– Événement A

« les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

A est constitué par les éléments des ensembles suivants : $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\} \times \{N_1, N_2, N_3\}$;
 $\{N_1, N_2, N_3\} \times \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$

d'où : $\text{card } A = 5 \times 3 + 3 \times 5 = 30$

donc : $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$.

– Événement B

« les deux boules tirées sont de la même couleur »

B est constitué par les éléments des ensembles suivants : $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\} \times \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$;
 $\{N_1, N_2, N_3\} \times \{N_1, N_2, N_3\}$

d'où : $\text{card } B = 5^2 + 3^2 = 34$

donc : $P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$.

- Vérifier que l'événement B est le contraire de l'événement A.

■ Tirages successifs sans remise

Exemple

Un sac contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 et trois noires N_1, N_2, N_3 . On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on ne la remet pas dans le sac puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.

Calculons les probabilités de chacun des événements suivants :

A « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

B « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Les événements de l'épreuve

Les évènements de l'épreuve	Le dispositif de l'épreuve	Description de l'épreuve	Une éventualité de l'épreuve				
Lecture de l'énoncé	Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher dont : 5 rouges et 3 noires	– On tire une boule (au hasard) – On note sa couleur – On tire une 2^e boule (au hasard) – On note sa couleur	– Un ensemble ordonné de 2 boules différentes				
Modélisation	E : ensemble des boules $E = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, N_1, N_2, N_3\}$	<table><tr><th>1^{er} tirage</th><th>2^e tirage</th></tr><tr><td>1 boule tirée parmi 8</td><td>1 boule tirée parmi 7</td></tr></table>	1 ^{er} tirage	2 ^e tirage	1 boule tirée parmi 8	1 boule tirée parmi 7	– Un couple d'éléments différents de E : $(R_1, N_2) ; (R_1, R_2) \dots$
1 ^{er} tirage	2 ^e tirage						
1 boule tirée parmi 8	1 boule tirée parmi 7						

L'univers des éventualités

Désignons par $\mathcal{U}$ l'univers des éventualités. On a : $\text{card } \mathcal{U} = A_8^2 = 7 \times 8 = 56$.

Le calcul des probabilités

Ici encore, l'épreuve a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.

– Événement B

« les deux boules tirées sont de la même couleur »
B est constitué par les arrangements de 2 éléments de $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ et ceux de 2 éléments de $\{N_1, N_2, N_3\}$.

$$\text{d'où : } \text{card } B = A_5^2 + A_3^2 = \frac{5!}{3!} + \frac{3!}{1!} = 4 \times 5 + 2 \times 3 = 26$$

$$\text{donc : } P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}.$$

– Événement A

« les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
l'événement A est le contraire de l'événement B,

$$\text{donc : } P(A) = 1 - P(B) \\ = 1 - \frac{13}{28} = \frac{15}{28}.$$

Autres exemples de calcul des probabilités

■ Lancer d'un dé cubique truqué

Exemple

On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont une face est marquée (a), deux faces sont marquées (b) et trois faces sont marquées (c) ; un tel dé est dit *truqué*. On note la lettre marquée sur la face supérieure du dé immobilisé.

Quelle est la probabilité pour que la face supérieure soit marquée (a) ? soit marquée (b) ? soit marquée (c) ?

L'univers des éventualités

Pour cette expérience, tous les résultats possibles constituent l'ensemble $\{(a) ; (b) ; (c)\}$. Pour un tel univers, les événements élémentaires $\{(a)\}, \{(b)\}, \{(c)\}$ ne sont pas équiprobables. Le dé étant parfaitement équilibré, nous pouvons nous placer dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires en prenant pour univers l'ensemble des six faces du cube. $\mathcal{U} = \{f_1 ; f_2 ; f_3 ; f_4 ; f_5 ; f_6\}$,

la face f_1 étant marquée : (a) ; les faces f_2 et f_3 étant marquées : (b) ; les faces f_4, f_5 et f_6 étant marquées : (c).

Le calcul des probabilités

A est l'événement « la face supérieure est marquée (a) »,

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{1}{6}$$

B est l'événement « la face supérieure est marquée (b) »,

$$P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

C est l'événement « la face supérieure est marquée (c) »,

$$P(C) = \frac{\text{card } C}{\text{card } \mathcal{U}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Remarque

Dans certains cas, le choix d'un univers correspondant à l'équiprobabilité des événements élémentaires est toujours possible, le calcul des probabilités est alors plus aisé.

■ Lancer d'un dé cubique pipé

Exemple

On lance un dé cubique dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Le centre de gravité de ce dé ne coïncide pas avec son centre, on dit que ce dé est *pipé*.

Ce dé est tel que les événements élémentaires $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ ont la même probabilité, cette probabilité étant le double de la probabilité de chacun des autres événements élémentaires.

Quelle est la probabilité p définie sur l'univers $\mathcal{U}$ de cette expérience aléatoire ?

Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ?

L'univers des éventualités

L'univers $\mathcal{U}$ de cette expérience aléatoire est défini par : $\mathcal{U} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Le dé n'étant pas parfaitement équilibré, les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.

Le calcul des probabilités

– Événements élémentaires

$$\text{On a : } P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = 2 P(\{4\}) = 2 P(\{5\}) = 2 P(\{6\})$$

$$\text{or : } P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$$

$$\text{d'où : } 9 P(\{6\}) = 1$$

$$\text{donc : } P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{9} ; \quad P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{2}{9}.$$

– Désignons par A l'évènement « le numéro de la face supérieure est un chiffre pair ».

$$A = \{2; 4; 6\}$$

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

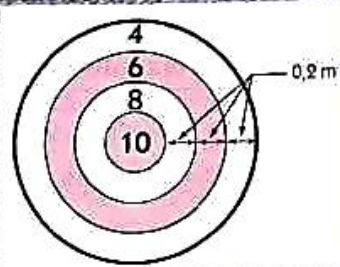
■ Probabilité et proportionnalité

Exemple

On considère une cible de tir à l'arc de rayon 0,8 m comme indiqué ci-contre.

Lorsque la flèche atteint la cible, le tireur note le nombre de points inscrits dans la couronne où se trouve la flèche.

Sachant que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle à l'aire de cette couronne, trouver la probabilité des événements élémentaires.



L'univers des éventualités

L'univers $\mathcal{U}$ des événements est tel que : $\mathcal{U} = \{4, 6, 8, 10\}$

i étant un élément de $\mathcal{U}$, notons $p(i)$ la probabilité d'atteindre la couronne marquée i .

Le calcul des probabilités

– Calculons les aires des couronnes de la cible :

numéros	10	8	6	4
aire (m ²)	0,125	0,377	0,628	0,879

– Examinons la proportionnalité entre la probabilité d'atteindre chaque couronne et l'aire de cette couronne :

$$\frac{p(10)}{0,125} = \frac{p(8)}{0,377} = \frac{p(6)}{0,628} = \frac{p(4)}{0,879}$$

– Utilisons la somme des probabilités des événements élémentaires $p(10) + p(8) + p(6) + p(4) = 1$

– On obtient : $p(10) + \frac{0,377}{0,125}p(10) + \frac{0,628}{0,125}p(10) + \frac{0,879}{0,125}p(10) = 1$,

d'où : $16,07 p(10) = 1$; $p(10) = 0,062$.

donc : $p(8) = 0,188$; $p(6) = 0,313$; $p(4) = 0,437$.

■ Pourcentage et probabilité

Exemple

Dans une population E, 15 % des individus ont une maladie M_a . Parmi les individus atteints de la maladie M_a , 20 % ont une maladie M_b . Parmi les individus non atteints de la maladie M_a , 4 % ont la maladie M_b .

On prend au hasard un individu de la population E. A et B désignant respectivement les événements suivants : « l'individu est atteint de la maladie M_a », « l'individu est atteint de la maladie M_b ».

Quelle est la probabilité pour qu'un individu de E soit atteint :

(1) de M_a et M_b ? (2) uniquement de M_a ? (3) uniquement de M_b ? (4) d'aucune de M_a et M_b ?

Traduisons cette situation par :

des pourcentages
LECTURE DE L'ÉNONCÉ

(1) éléments de E ayant M_a et M_b

$$\frac{15}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{3}{100}$$

(2) éléments de E ayant M_a et n'ayant pas M_b

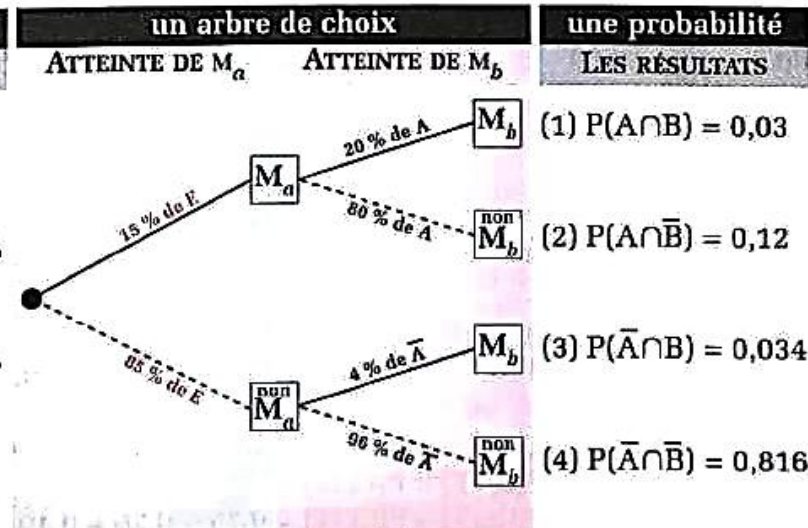
$$\frac{15}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{12}{100}$$

(3) éléments de E n'ayant pas M_a et ayant M_b

$$\frac{85}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{3,4}{100}$$

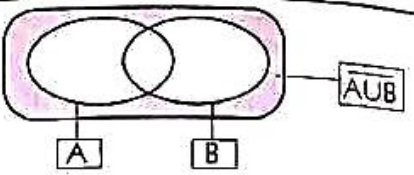
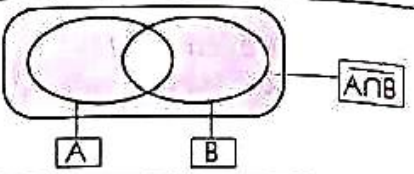
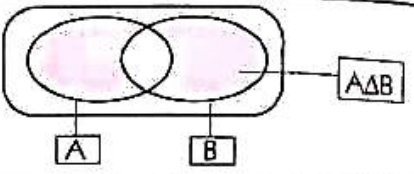
(4) éléments de E n'ayant ni M_a ni M_b

$$\frac{85}{100} \times \frac{96}{100} = \frac{81,6}{100}$$



TP Opérations sur les ensembles finis et calcul des probabilités

■ Tableau récapitulatif

Complémentaire de la réunion	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	
Complémentaire de l'intersection	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	
Différence symétrique	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	

■ Exercice commenté

Une enquête menée auprès des familles d'une commune en 1999 à propos de l'équipement de leur foyer, donne le résultat suivant :

- 80% ont une cuisinière à gaz
- 21% ont un téléviseur
- 25% n'ont ni cuisinière à gaz, ni téléviseur.

On interroge une famille de cette commune, prise au hasard.

Quelle est la probabilité qu'elle ait :

- (1) une cuisinière à gaz
- (2) un téléviseur
- (3) une cuisinière à gaz et un téléviseur
- (4) une cuisinière à gaz ou bien un téléviseur.

Évènements

On désigne par :

C, l'évènement « a une cuisinière à gaz »

T, l'évènement « a un téléviseur »

On en déduit que :

$\bar{C} \cap \bar{T}$ est l'évènement « a ni cuisinière à gaz, ni téléviseur »

$C \cap T$ est l'évènement « a une cuisinière à gaz et un téléviseur »

$C \cup T$ est l'évènement « a une cuisinière à gaz ou un téléviseur »

$C \Delta T$ est l'évènement « a une cuisinière à gaz ou bien un téléviseur »

Calcul des probabilités

Des données du problème, on déduit les résultats suivants :

$$P(C) = \frac{80}{100} = 0,80 \quad ; \quad P(T) = \frac{21}{100} = 0,21$$

$$P(\bar{C} \cap \bar{T}) = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Calcul de $P(C \cup T)$

On a : $P(\bar{C} \cap \bar{T}) = P(\overline{C \cup T}) = 1 - P(C \cup T) = 0,25$

donc : $P(C \cup T) = 1 - 0,25 = 0,75.$

Calcul de $P(C \cap T)$

On a : $P(C) + P(T) - P(C \cap T) = P(C \cup T)$

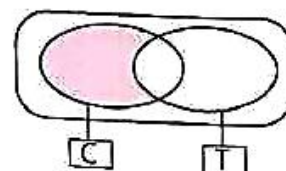
d'où : $P(C \cap T) = P(C) + P(T) - P(C \cup T) = 0,8 + 0,21 - 0,75 = 0,26.$

Calcul de $P(C \Delta T)$

$C \Delta T$ et $C \cap T$ sont disjoints et leur réunion est $C \cup T$,

donc : $P(C \Delta T) + P(C \cap T) = P(C \cup T)$

d'où : $P(C \Delta T) = P(C \cup T) - P(C \cap T) = 0,75 - 0,26 = 0,49.$



$$P(C \cup T) = 0,75$$

$$P(C \cap T) = 0,26$$

$$P(C \Delta T) = 0,49$$

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Analyse combinatoire

1 On désire répartir 6 journaux dans 11 casiers nominatifs. De combien de façons peut-on le faire dans chacun des cas suivants.

1. Chaque casier peut contenir au plus un journal et :

- a) les journaux sont distincts ;
- b) les journaux sont identiques.

2. Chaque casier peut contenir un nombre quelconque de journaux et :

- a) les journaux sont distincts ;
- b) les journaux sont identiques.

2 Une enquête a été réalisée auprès d'un échantillon de 800 personnes sur leurs pratiques culturelles. Les résultats suivants ont été obtenus :

- 400 personnes sont allées au cinéma au moins une fois au cours du trimestre précédent (ensemble C) ;
- 155 sont allées au théâtre (ensemble T) ;
- 110 sont allées au cinéma et au concert (ensemble $C \cap T$) ;
- 65 sont allées au théâtre et au concert (ensemble $T \cap M$) ;
- 20 sont allées au cinéma, au théâtre et au concert (ensemble $C \cap T \cap M$).

1. Combien de personnes ne vont qu'au cinéma ?

2. Combien de personnes n'ont aucune activité culturelle ?

On utilisera un diagramme de VENN et les opérations logiques sur les ensembles pour trouver et justifier les résultats obtenus.

3 Une enquête comporte dix questions. À chacune d'elles, on peut répondre soit par oui, soit par non, soit s'abstenir.

Quel est le nombre de fiches réponses différentes possibles ?

4 Un touriste européen veut visiter trois villes de l'Ouest de la Côte d'Ivoire parmi les cinq suivantes : Danané, Man, Biankouma, Duékoué, Guiglo. Combien d'itinéraires peut-il concevoir ?

5 Une classe de 30 élèves qui décident de désigner un chef de classe, deux adjoints, deux responsables de l'entretien. Ces cinq élèves forment un comité. Cette classe est composée de 12 garçons internes, 12 garçons externes, 3 filles externes et 3 filles internes. De combien de façons différentes peut-on composer le comité si l'on veut que :

- a) le chef soit interne ?
- b) les adjoints soient de sexes différents ?

6 On rappelle qu'en numération décimale, un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

a) Combien y-a-t-il de nombres de deux chiffres dont la somme de ses chiffres est 9 ? Même question pour 12 ?

b) Dénombrer ainsi les nombres à deux chiffres divisibles par 3.

c) Comparer avec le nombre de multiples de 3 qui s'écrivent avec exactement deux chiffres.

7 On lance simultanément deux dés non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note les deux numéros obtenus sur les faces supérieures.

Calculer les probabilités des événements suivants :

- a) la somme des numéros obtenus est égale à 6 ;
- b) la somme des numéros obtenus est impair ;
- c) la somme des numéros obtenus est pair ;
- d) la somme des numéros obtenus est supérieure à 8 ;
- e) la somme des numéros obtenus est inférieure à 4.

8 n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (1+x)^n.$$

a) En utilisant la formule du binôme de Newton et en dérivant $f(x)$, démontrer que pour tout nombre réel x :

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n(1+x)^{n-1}.$$

b) En déduire que :

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$$

et que : $C_n^1 - 2C_n^2 + \dots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$.

Probabilité d'un événement

9 Un centre de réunions comporte deux salles numérotées 1 et 2.

On note S_1 l'événement « la salle numéro 1 est occupée » et S_2 l'événement « la salle 2 est occupée ».

On sait que :

- les deux salles ont autant de chance d'être occupées l'une que l'autre ;
- la probabilité que l'une des deux salles soit occupée est égale à 0,9 ;
- la probabilité que les deux salles soient occupées en même temps est égale à 0,5.

1. Les événements S_1 et S_2 sont-ils indépendants ?

2. Exprimer chacun des événements suivants à l'aide des événements S_1 et S_2 , puis calculer leur probabilité :

- a) la salle numéro 1 est libre ;
- b) les deux salles soient libres ;
- c) l'une des salles au moins est libre ;
- d) une seule salle est libre ;
- e) la salle numéro 2 est libre, sachant que la salle numéro 1 est occupée.

10 Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que l'apparition du numéro 5 est deux fois « plus probable » que l'apparition des autres numéros.

a) Calculer la probabilité de l'apparition de chaque numéro.

b) Calculer les probabilités des événements suivants :

- obtenir un nombre pair ;
- obtenir un nombre impair.

11 Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que la probabilité d'obtenir chaque numéro de 1 à 6 est proportionnelle à ce numéro.
a) Quelle est la probabilité de sortie de chaque numéro.
b) On lance une fois ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir un numéro supérieur à 3 ?

12 On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 de façon à former un nombre de deux chiffres : le résultat du premier lancer donne le chiffre des dizaines, celui du second lancer celui des unités.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- A « Le nombre obtenu est pair » ;
B « Les deux chiffres du nombre obtenu sont identiques » ;
C « Le nombre obtenu est supérieur ou égale à 51 » ;
D « Le nombre obtenu contient au moins un 6 ».

13 On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note a le résultat du premier lancer et b le résultat du second lancer.

On considère alors l'équation du second degré :

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Calculer la probabilité pour que cette équation admette des solutions (distinctes ou confondues.)

14 On considère un dé cubique parfait dont une face porte le chiffre 1, deux faces le chiffre 2 et trois faces le chiffre 3.

On lance une fois ce dé et on désigne par p_1 , p_2 et p_3 les probabilités d'obtenir respectivement 1, 2 et 3.

- a) Déterminer p_1 , p_2 et p_3 .
b) On lance trois fois ce dé ; déterminer la probabilité d'obtenir :
– deux fois le chiffre deux ;
– aucune fois le chiffre 3 ;
– une somme égale à 4.

15 Un dé est lancé 160 fois.

- Calculer la probabilité que le point 1 se présente 25 fois, 26 fois, 27 fois.
- Calculer la probabilité que le point 1 se présente un nombre de fois compris entre 25 et 27.
- Le total des probabilités obtenues en 1. diffère de la probabilité obtenue en 2. Pourquoi ?
- Quelle est la probabilité, avec six jets d'un dé, d'obtenir à chaque fois un résultat différent ?

16 Une urne contient trois boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher. L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule, deux fois de suite, lors de tirages avec remise.

- a) Quels sont les événements élémentaires de cette expérience ? Combien y a-t-il ?
b) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- R_1 « tirer une boule rouge au premier tirage » ;
 R_2 « tirer une boule rouge au second tirage » ;
 $R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$.

17 On considère un sac contenant trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard et simultanément trois boules.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A « on obtient au moins une boule blanche » ;
B « on obtient au moins deux boules noires » ;
C « on obtient au moins une boule de chaque couleur ».
2. Définir l'événement $A \cap B$ par une phrase simple, puis calculer sa probabilité.

18 On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes.

1. La seconde carte est tirée après remise de la première dans le jeu (tirages indépendants).

- a) Quelle est la probabilité de tirer deux as ?
b) Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?
c) Quelle est la probabilité que la seconde carte tirée soit un as ?

2. La seconde carte est tirée sans qu'on ait préalablement remis la première dans le jeu (tirage exhaustif).

- a) Quelle est la probabilité de tirer deux as ?
b) Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?
c) Quelle est la probabilité que la seconde carte tirée soit un as ?

19 Une urne contient quatre jetons marqués respectivement 1, 2, 3 et m [$m \in \mathbb{R}^*$]. On tire au hasard un jeton dans l'urne. On note P_1 , P_2 , P_3 et P_m les probabilités respectives de tirer le jeton marqué 1, 2, 3 et m . P_1 , P_2 , P_3 et P_m constituent dans cet ordre une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$.

1. a) Montrer que : $P_1 = \frac{1}{16}$.

b) Calculer P_2 , P_3 et P_m .

2. On considère X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre marqué sur le jeton tiré

- a) Définir la loi de probabilité de la variable X .
b) Calculer m sachant que l'espérance mathématique de X vaut 2.

D'après Bac

20 Deux boules de couleurs différentes, rouge et noire, sont réparties dans trois cases de couleurs différentes, rouge, noire et jaune.

1. On suppose que chaque case ne peut contenir plus d'une boule.

- a) Combien y a-t-il de répartitions possibles des deux boules dans les trois cases ?
b) En supposant toutes ces répartitions équiprobables, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A « chaque boule est dans la case de sa couleur » ;
B « la case jaune est vide » ;
C « la boule rouge est la seule dans la case ayant sa couleur ».

2. On suppose que chaque case peut contenir plus d'une boule.

- a) Combien y a-t-il de répartitions possibles des deux boules dans les trois cases ?
b) En supposant toutes ces répartitions équiprobables, calculer la probabilité de chacun des événements A et B définis au 1. b).

21 On lance 100 fois une pièce en l'air et on note les côtés (pile P et face F) obtenus successivement. Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne 50 fois pile ?

PROBLÈMES

22 Deux joueurs, Pigna et Gouanda, lancent simultanément chacun un dé dont les faces numérotées de 1 à 6 ont la même probabilité de sortie. Le gagnant est celui qui obtient un nombre strictement supérieur à celui de l'autre. La partie est nulle si les deux joueurs obtiennent le même numéro.

1. Quelle est la probabilité que Pigna gagne ?
2. Quelle est la probabilité que Gouanda gagne ?

23 On sait, par des enquêtes médicales, qu'un individu appartenant à la population d'un certain pays a la probabilité 0,01 d'être atteint par une maladie A et la probabilité 0,05 d'être atteint par une maladie B.

1. Si ces deux affections sont indépendantes, combien de sujets atteints de l'une au moins des deux affections doit-on s'attendre à trouver dans un échantillon de 10 000 sujets pris au hasard dans la population ?
2. Combien de sujets atteints de la maladie B doit-on s'attendre à trouver sur 500 sujets atteints de la maladie A.

24 Considérons une population où le nombre de mâles est la moitié du nombre de femelles. Des études statistiques ont montré que dans cette population 6% des mâles avaient le caractère albinos et 0,36 % des femelles avaient ce caractère.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard soit albinos ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un albinos de cette population soit mâle ?

25 Cinq individus ont été témoins d'un fait donné. Parmi eux, on sait que deux seulement sont menteurs mais on ignore lesquels. On questionne deux témoins au hasard sur le fait considéré de façon indépendante.

Quelle probabilité a-t-on :

- a) d'obtenir à chaque fois une description véridique des faits ?
- b) d'obtenir deux versions contradictoires ?
- c) d'obtenir deux versions faussées ?

26 Deux clubs de football A et B ont respectivement 18 et 15 joueurs susceptibles de jouer dans leurs équipes. Le joueur X appartient au club A et le joueur Y appartient au club B.

Pour le prochain match, les joueurs sont tirés au sort dans chaque équipe.

Quelle est la probabilité d'avoir X et Y qui jouent au cours de ce prochain match ?

27 Une caisse contient pêle-mêle 10 cubes oranges, 20 cubes blancs et 5 cubes verts, tous de la même taille.

1. Quelle est la probabilité de pouvoir faire le drapeau de la Côte d'Ivoire :
 - a) en prenant simultanément 3 cubes ?
 - b) en prenant simultanément 4 cubes ?
2. Quelle est la probabilité, en prenant simultanément 3 cubes l'un après l'autre sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau de la Côte d'Ivoire ?

28 Un parachutiste saute d'un avion et atterrit nécessairement sur un terrain déboisé de 1 hectare entouré d'une forêt.

Dans ce terrain il y a :

- un espace cultivé rectangulaire de 50 mètres de long et 30 mètres de large ;
- un plan d'eau formant un triangle rectangle isocèle de 100 mètres sur les côtés de l'angle droit ;
- une cible circulaire de 20 mètres de diamètre qui représente son objectif.

On suppose que la probabilité pour qu'il tombe sur une partie donnée du terrain est proportionnelle à l'aire de cette partie.

1. Définir l'ensemble des éventualités et calculer la probabilité de chaque événement élémentaire.
2. Calculer la probabilité qu'il rate la cible mais n'atterrisse ni dans l'espace cultivé ni dans le plan d'eau.
3. Calculer la probabilité qu'il atterrisse dans l'espace cultivé ou dans le plan d'eau.

29 Un père et son fils achètent un cadenas. Le vendeur du cadenas communique à l'acheteur une combinaison secrète à quatre chiffres permettant d'ouvrir le cadenas. Cette combinaison est un nombre compris entre 0000 et 9999.

1. Arrivé chez lui, le fils ne se souvient plus de la combinaison communiquée par le vendeur.

Quelle est la probabilité qu'il ouvre le cadenas au premier essai ? au deuxième essai ?

2. Le père se souvient seulement que la combinaison du cadenas comporte deux fois le chiffre 2 et deux fois le chiffre 4.

Soit k un élément de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Déterminer la probabilité p_k pour que le père arrive à ouvrir le cadenas au $k^{\text{ième}}$ essai.

30 Un autobus rencontre sur son trajet sept feux tricolores. Pour chacun de ces feux, le rouge dure 30 secondes, l'orange dure 10 secondes et le vert dure 20 secondes. Les sept feux ne sont pas synchronisés et les aléas de la circulation font que l'état d'un feu devant lequel se présente l'autobus ne dépend pas de l'état des feux précédents.

1. Calculer la probabilité pour que sur son trajet l'autobus rencontre exactement trois feux verts.
2. Calculer la probabilité pour que sur son trajet l'autobus rencontre au moins un feu vert.

31 Dans une population vulnérable, la probabilité pour qu'une personne quelconque contracte une maladie au cours d'une année est de 0,4 pour une maladie M et de 0,6 pour une maladie M'.

« Contracter la maladie M » et « contracter la maladie M' » sont deux événements indépendants. Pour une personne choisie au hasard, calculer la probabilité des événements suivants :

A « contracter les deux maladies M et M' » ;

B « contracter au moins une de ces deux maladies au cours de la même année » ;

C « ne contracter aucune de ces deux maladies au cours de la même année ».

32 Deux cars A et B doivent arriver à la gare routière à la même heure. Leurs arrivées sont considérées comme des événements indépendants.

1. Sachant que ces deux cars ont des probabilités de 0,9 pour le car A et de 0,8 pour le car B d'arriver à l'heure, quelle est la probabilité pour qu'au moins un des deux cars soit ponctuel ?

2. Quelle est, dans les mêmes conditions, la probabilité pour qu'au moins un des deux cars soit en retard ?

33 Une machine à écrire comporte 42 touches parmi lesquelles se trouvent 8 chiffres, 26 lettres et 8 symboles divers.

1. On considère une enfant qui ne sait pas lire sur une touche et on admet alors que la probabilité qu'elle frappe une touche déterminée est la même quelle que soit cette touche.

a) Quelle est la probabilité pour qu'elle frappe une lettre ?

b) Cette enfant se prénomme Nongba. Quelle est la probabilité pour qu'elle frappe une lettre de son prénom ? Même question si cette enfant se prénomme Mariam.

c) Quelle est la probabilité pour que Nongba frappe la dernière lettre de son prénom ?

2. Nongba frappe successivement 6 touches. Quelle est la probabilité pour qu'elle frappe son prénom ?

34 On admet que pour un avion a plusieurs réacteurs la probabilité (risque) de panne de l'un de ses réacteurs en vol est indépendante de l'état (panne ou non) des autres réacteurs, et qu'elle est la même pour chacun d'eux.

On note q cette probabilité ; elle est égale à $1 - p$, où p est la probabilité qu'un réacteur soit en état de fonctionnement.

On admet aussi que l'avion peut poursuivre son vol si au moins la moitié des réacteurs sont en état de fonctionnement.

Comparer la sécurité offerte par un biréacteur par rapport à celle offerte par un quadriréacteur en fonction de la valeur de p .

35 Onze couples, dont le couple Koné, doivent tirer au sort quatre personnes pour présenter leur mutuelle de développement aux responsables de la commune. Les tirages sont supposés équiprobables.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « aucun homme n'est désigné » ;

B « monsieur Koné est désigné » ;

C « le couple Koné est désigné » ;

D « deux hommes et deux femmes sont désignés » ;

E « deux couples sont désignés ».

2. Les événements A et B sont-ils indépendants ? incompatibles ?

3. Les événements B et E sont-ils indépendants ? incompatibles ?

36 Paradoxe du Chevalier de Méré

(Problème posé à Blaise Pascal par le Chevalier de Méré en 1654.)

« A-t-on plus de chances d'obtenir un six (au moins une fois) en lançant un dé équilibré 4 fois ou d'obtenir un double six (au moins une fois) en lançant deux dés équilibrés 24 fois ? »

1. Première situation : on lance un dé équilibré 4 fois de suite. Calculer la probabilité de l'événement A « on obtient au moins un six ».

2. Deuxième situation : on lance deux dés équilibrés 24 fois de suite. Calculer la probabilité de l'événement B « on obtient au moins une fois un double six ».

3. Conclure.

37 Probabilité et fonctions numériques

Une urne contient 42 boules indiscernables au toucher. Il y a n boules blanches et n boules rouges (n est un entier naturel) ; toutes les autres boules sont vertes. Il y a au moins une boule de chaque couleur dans l'urne.

On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

1. Déterminer l'ensemble A des valeurs que peut prendre le nombre n .

2. On suppose que $n = 8$ dans cette question. On donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

a) Quelle est la probabilité P_1 de tirer une boule de chaque couleur (c'est-à-dire d'obtenir une boule blanche, une boule rouge et une boule verte) ?

b) Quelle est la probabilité P_2 de tirer 3 boules vertes ?

3. On considère la fonction f de la variable x définie sur $[1 ; 20]$ par :

$$f(x) = -2x^3 + 42x^2.$$

Étudier les variations de f . (On montrera que f possède un maximum sur $[1 ; 20]$ pour $x = 14$.)

4. Dans cette question, on suppose que n appartient à A défini à la question 1. On note $P(n)$ la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.

a) Déterminer $P(n)$.

b) En utilisant les résultats obtenus au 3., déterminer la valeur n_0 de n pour que $P(n)$ soit maximum.

Calculer $P(n_0)$ à 10^{-3} par défaut.

D'après Bac

38 Probabilité et suites numériques

1. U_1 et U_2 sont deux urnes. U_1 contient 6 boules blanches et 4 boules noires ; U_2 contient 8 boules blanches et 2 boules noires. D'une des deux urnes choisie au hasard (il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne. Si la boule était blanche, on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule était noire, on recommence le tirage dans l'autre urne. Cette règle est appliquée à chaque tirage et on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.

On désigne par P_n la probabilité pour que le $n^{\text{ème}}$ tirage se fasse dans l'urne U_1 (n est un entier naturel non nul).

a) Déterminer P_1 .

b) Déterminer P_2 .

On se rappellera que le second tirage s'est fait dans U_1 soit parce que le premier tirage a été une boule blanche dans U_1 , soit parce que le premier tirage a été une boule noire dans U_2 .

c) Démontrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite (P_n) de la forme :

$$\text{pour tout entier naturel } n \ [n \geq 2], P_n = aP_{n-1} + b$$

où a et b sont des nombres réels que l'on déterminera.

2. (u_n) est la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = \frac{2}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5} \ [n \geq 2]. \end{cases}$$

a) Déterminer le nombre réel α pour que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ ($n \in \mathbb{N}^*$) soit une suite géométrique.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Trouver alors la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$.

D'après bac

Probabilités conditionnelles et variable aléatoire

Pour des événements soumis à des contraintes causales (en génétique, en économie, ...) l'avènement des variables aléatoires réelles a permis la modélisation et l'élaboration de lois de probabilité.

Grâce au concept déterministe du hasard, développé depuis le XVII^e siècle par des savants tels que Jacques 1^{er} Bernoulli, Euler, Cauchy et Bernstein, les probabilités ont connu un essor prodigieux en s'appuyant sur des bases mathématiques solides établies par les travaux du mathématicien russe Kolmogorov en 1933.



Jacques 1^{er} Bernoulli
mathématicien suisse – 1654-1705.

SOMMAIRE

1. Probabilités conditionnelles	314
2. Variable aléatoire	320

1

Probabilités conditionnelles

1.1. Définition – Propriétés

Probabilités conditionnelles

■ Exemple introductif 1

Une classe de Terminale SE est constituée de 45 élèves dont 9 filles et 36 garçons. On demande des volontaires pour former une équipe de football mixte. On obtient 3 filles et 30 garçons.

– Parmi les 45 élèves, on choisit un (ou une) au hasard.

Calculons la probabilité de chacun des événements suivants :

« l'élève choisi est une fille »

« l'élève choisi est un volontaire »

« l'élève choisi est une fille volontaire »

– Parmi les élèves, on choisit une fille au hasard.

Calculons la probabilité de l'événement « la fille choisie est une volontaire ».

• Première expérience aléatoire

Événements

Parmi les 45 élèves, on choisit un (ou une) au hasard.

L'univers des éventualités de cette expérience aléatoire est représenté par le tableau ci-contre.

Désignons par : F l'événement « l'élève choisi est une fille »

G l'événement « l'élève choisi est un garçon »

V l'événement « l'élève choisi est un (ou une) volontaire »

N l'événement « l'élève choisi est un (ou une) non volontaire »

donc, $F \cap V$ est l'événement « l'élève choisi est une fille volontaire ».

Calcul des probabilités

Cette expérience a bien entendu lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.

$$\text{d'où : } P(F) = \frac{\text{card } F}{\text{card } \Omega} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} ; P(V) = \frac{\text{card } V}{\text{card } \Omega} = \frac{33}{45} = \frac{11}{15} ; P(F \cap V) = \frac{\text{card } (F \cap V)}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15} .$$

• Enchaînement de deux expériences aléatoires

Événements

« la fille choisie est une volontaire » est un événement de l'univers Ω .

Cependant cet événement peut être considéré comme provenant de l'enchaînement des deux expériences aléatoires suivantes :

- 1^{re} expérience Parmi les 45 élèves, on en choisit un (ou une) au hasard ;
- 2^e expérience Parmi les 9 filles, on en choisit une au hasard.

Calcul des probabilités

Désignons par $P_F(V)$ la probabilité d'avoir une volontaire, sachant que l'élève choisi est une fille.

On dit que $P_F(V)$ est la probabilité de V sachant que F est réalisé ou plus simplement $P_F(V)$ est la probabilité de V sachant F.

$$\text{On a : } P_F(V) = \frac{\text{card } (F \cap V)}{\text{card } F} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} ; P_F(V) \neq P(F \cap V).$$

Expression de $P_F(V)$ en fonction de $P(F \cap V)$ et $P(F)$

$$\text{On a : } P_F(V) = \frac{\text{card } (F \cap V)}{\text{card } F} = \frac{\frac{\text{card } (F \cap V)}{\text{card } \Omega}}{\frac{\text{card } F}{\text{card } \Omega}} = \frac{P(F \cap V)}{P(F)} ; P_F(V) = \frac{P(F \cap V)}{P(F)} \quad (1)$$

P_F est une probabilité sur Ω

En effet, à l'aide de la formule (1) et de la définition d'une probabilité, on vérifie que P_F est une probabilité sur Ω .

	Filles	Garçons	Totaux
Volontaires	3	30	33
Non volontaires	6	6	12
Totaux	9	36	45

Propriété – Définition

Ω est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire,

B un événement de Ω de probabilité non nulle.

L'application P_B qui à tout événement A de Ω associe le nombre réel $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur Ω ; elle est appelée **probabilité conditionnelle** sachant que B est réalisé ;

$P_B(A)$ (encore noté $P(A/B)$) est appelé la probabilité de A sachant que B est réalisé ou simplement la **probabilité de A sachant B**.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} ; P_B(A) \text{ est la probabilité de A sachant B.}$$

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A) ; (P(B) \neq 0 ; P(A) \neq 0).$$

■ Exemple des deux machines

Une usine de conditionnement de café abrite deux machines qui travaillent en chaîne. Les fèves de café décortiquées et séchées passent dans la 1^{re} machine pour torréfaction, la 2^e machine a alors pour fonction de moulinner les fèves de café grillées.

Des experts ont estimé à :

0,002 la probabilité pour que la 1^{re} machine tombe en panne,

0,003 la probabilité pour que la 2^e machine tombe en panne,

0,6 la probabilité pour que la 2^e machine tombe en panne lorsque la 1^{re} est en panne.

Calculons :

– la probabilité pour que les deux machines tombent simultanément en panne ;

– la probabilité pour que la 1^{re} machine tombe en panne lorsque la 2^e est en panne.

Événements

Désignons par : T l'événement « la première machine tombe en panne »

M l'événement « la deuxième machine tombe en panne »

donc : $T \cap M$ est l'événement « les deux machines tombent simultanément en panne ».

Calcul des probabilités

On a : $P(T) = 0,002$; $P(M) = 0,003$; $P_T(M) = 0,6$

or : $P(T \cap M) = P_T(M) \times P(T) = P_M(T) \times P(M)$

d'où : $P(T \cap M) = P_T(M) \times P(T) = 0,6 \times 0,002 = 0,0012$

$$P_M(T) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)} = \frac{0,0012}{0,003} = 0,4.$$

■ Événements indépendants en probabilité

■ Activité

– On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire (au hasard) une carte dans un jeu de 32 cartes et on note sa couleur et sa valeur.

– On désigne par : A l'événement « la carte tirée est un Trèfle »

B l'événement « la carte tirée est un Roi »

E l'événement « la carte tirée est un As noir ».

– Calculer : $P_B(A)$; $P_A(B)$; $P_E(A)$; $P_A(E)$.

– Comparer : $P(A)$ et $P_B(A)$; $P(B)$ et $P_A(B)$; $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$;

$P(A)$ et $P_E(A)$; $P(E)$ et $P_A(E)$; $P(A \cap E)$ et $P(A) \times P(E)$.

On peut constater que la probabilité « la carte tirée est un Trèfle » n'est pas modifiée par la réalisation de l'évènement « la carte tirée est un As ».

On dit que ces deux évènements sont **indépendants** en probabilité.

La probabilité de l'évènement « la carte tirée est un Trèfle » est modifiée par la réalisation de l'évènement « la carte tirée est un As noir ».

On dit que ces deux évènements **ne sont pas indépendants** en probabilité.

Définition

On dit que deux évènements d'un univers sont **indépendants en probabilité**, lorsque la probabilité de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre.

A et B sont deux évènements d'un univers.

A et B sont indépendants si et seulement si

$$\begin{cases} (1) P_B(A) = P(A), \text{ lorsque } P(B) \neq 0 \\ (2) P_A(B) = P(B), \text{ lorsque } P(A) \neq 0 \\ (3) P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \end{cases}$$

■ Exemple

On peut aisément vérifier que :

- dans l'exemple introductif du 1.1 (croisement des deux critères : être une fille ou non ; être volontaire ou non), l'évènement F et l'évènement V ne sont pas indépendants ;
- dans l'exemple du 1.1 (panne de deux machines), l'évènement M et l'évènement T ne sont pas indépendants.

■ ■ ■ ■ ■ Probabilités totales

■ Exemple introductif 2

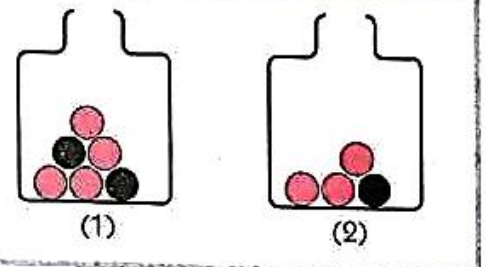
Deux urnes indiscernables (1) et (2) contiennent des boules indiscernables au toucher.

L'urne (1) contient 4 boules rouges et 2 boules noires.

L'urne (2) contient 3 boules rouges et 1 boule noire.

On choisit une urne (au hasard), on tire (au hasard) une boule de cette urne et on note la couleur de la boule.

Calculons la probabilité pour que la boule tirée soit rouge.



L'univers des éventualités

- L'épreuve décrite est un enchaînement de deux expériences aléatoires :
choisir une urne ; tirer une boule de cette urne.

- L'univers $\mathcal{U}$ de cette épreuve est constitué des 10 boules des deux urnes.

- Désignons par :

$\mathcal{U}_1$ l'évènement « la boule tirée provient de l'urne (1) » ; $\mathcal{U}_2$ « la boule tirée provient de l'urne (2) »

R l'évènement « la boule tirée est rouge » ; N « la boule tirée est noire ».

On remarque que : $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$.

Calcul des probabilités

- L'évènement R est la réunion des deux évènements disjoints suivants :

$R \cap \mathcal{U}_1$ « la boule tirée est rouge et provient de l'urne (1) »

$R \cap \mathcal{U}_2$ « la boule tirée est rouge et provient de l'urne (2) »

d'où : $P(R) = P(R \cap \mathcal{U}_1) + P(R \cap \mathcal{U}_2)$

or : $P(R \cap \mathcal{U}_1) = P_{\mathcal{U}_1}(R) \times P(\mathcal{U}_1)$; $P(R \cap \mathcal{U}_2) = P_{\mathcal{U}_2}(R) \times P(\mathcal{U}_2)$.

– L'évènement $\mathcal{U}_1$ et l'évènement $\mathcal{U}_2$ sont équiprobables et forment une partition de $\mathcal{U}$, donc : $P(\mathcal{U}_1) = P(\mathcal{U}_2) = \frac{1}{2}$ (car $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$ et $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}$).

– Par ailleurs,

$P_{\mathcal{U}_1}(R)$ est la probabilité de tirer une boule rouge de l'urne (1), donc $P_{\mathcal{U}_1}(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

$P_{\mathcal{U}_2}(R)$ est la probabilité de tirer une boule rouge de l'urne (2), donc $P_{\mathcal{U}_2}(R) = \frac{3}{4}$.

d'où : $P(R) = P_{\mathcal{U}_1}(R) \times P(\mathcal{U}_1) + P_{\mathcal{U}_2}(R) \times P(\mathcal{U}_2)$

$$P(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{24}.$$

– Notons que : $R \cap N = \emptyset$ et $R \cup N = \mathcal{U}$.

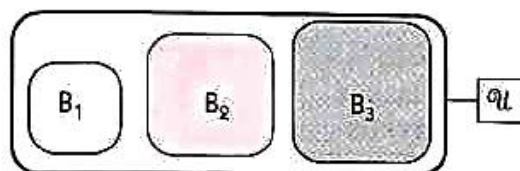
■ Partition d'un ensemble

Définition

$B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une *partition* de $\mathcal{U}$.

signifie que

$B_1, B_2, \dots, B_n$ sont deux à deux disjoints et $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \mathcal{U}$.



B_1, B_2, B_3 forment une partition de $\mathcal{U}$.

signifie que

$B_1 \cap B_2 = \emptyset ; B_2 \cap B_3 = \emptyset ; B_1 \cap B_3 = \emptyset ;$

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \mathcal{U}.$

■ Formules des probabilités totales

Plus généralement, en utilisant la définition de la partition d'un ensemble et la propriété des probabilités conditionnelles, on obtient la propriété suivante :

Propriété

$B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de l'univers $\mathcal{U}$.

- pour tout évènement A , $P(A) = P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_n)$
- pour tout i ($1 \leq i \leq n$), $P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A) \times P(B_i)$

Exercices

- 1.a On considère deux jetons indiscernables au toucher. L'un de ces jetons a deux faces numérotées 1 ; l'autre jeton a une face numérotée 1 et une face numérotée 2.

On place les jetons dans un sac, on tire au hasard un jeton et on lit le chiffre inscrit sur la face visible puis le chiffre inscrit sur l'autre face.

Sachant que le premier chiffre lu est 1, quelle est la probabilité pour que la deuxième face soit numérotée 1 ?

- 1.b On lance successivement deux dés cubiques parfaits dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Sachant que le chiffre lu sur le premier dé est 3, quelle est la probabilité pour que la somme des deux chiffres soit paire ?

- 1.c On lance une pièce de monnaie truquée, telle que la probabilité d'obtenir PILE est $\frac{1}{3}$.

– Si l'on obtient FACE, on tire au hasard un jeton d'un sac contenant neuf jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 9.

– Si l'on obtient PILE, on tire au hasard un jeton d'un autre sac contenant cinq jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5.

1. Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit impair.

2. Quelle est la probabilité pour que l'on ait obtenu PILE en lançant la pièce, sachant que le nombre obtenu est pair ?

1.2. Calculs des probabilités conditionnelles

Utilisation d'arbres de probabilité

Exemple introductif 3

Revenons à l'exemple introductif du paragraphe 1.1.

- La situation aléatoire de ce problème peut être traduite par les tableaux suivants :

L'univers $\mathcal{U}$ des éventualités

	Filles	Garçons	Totaux
Volontaires	3	30	33
Non volontaires	6	6	12
Totaux	9	36	45

Les probabilités des événements

	Filles	Garçons	Totaux
Volontaires	$\frac{1}{15}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{11}{15}$
Non volontaires	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$
Totaux	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$	1

- La situation aléatoire de ce problème provient d'un enchaînement de deux expériences aléatoires conduisant à des probabilités conditionnelles.

Une telle situation peut être traduite de manière performante par un arbre.

Le premier niveau de l'arbre

Il traduit la première expérience aléatoire et donne la partition F, G de $\mathcal{U}$. L'événement F et l'événement G sont représentés par deux branches issues d'un même point. Sur chaque branche est inscrit la probabilité de l'événement correspondant.

Le premier niveau possède un seul nœud, l'origine.

Le deuxième niveau de l'arbre

Il traduit la deuxième expérience aléatoire et donne la partition V, N de $\mathcal{U}$. les probabilités des branches sont des probabilités conditionnelles. Ce niveau possède deux nœuds, un en F l'autre en G.

Un chemin aléatoire de l'arbre

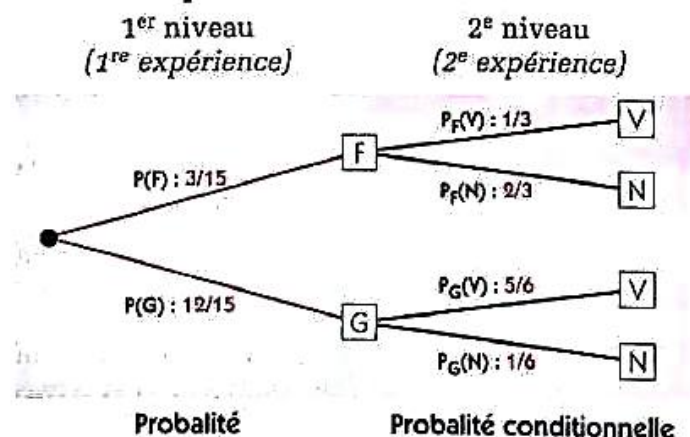
Un chemin est constitué d'une branche à chacun des niveaux.

Par exemple, le chemin $\bullet \rightarrow F \rightarrow N$ ci-contre représente l'événement $F \cap N$ « l'élève choisi est une fille non volontaire ».

On calcule la probabilité d'un chemin en appliquant la propriété des probabilités conditionnelles :

$$P(F \cap N) = P(F) \times P_F(N)$$

L'arbre de probabilité



Probabilités des chemins aléatoires

$$P(F \cap V) = P(F) \times P_F(V) = \frac{1}{15}$$

$$P(F \cap N) = P(F) \times P_F(N) = \frac{2}{15}$$

$$P(G \cap V) = P(G) \times P_G(V) = \frac{10}{15}$$

$$P(G \cap N) = P(G) \times P_G(N) = \frac{2}{15}$$

Construction et utilisation d'un arbre de probabilité

La construction et l'utilisation d'un arbre pondéré, utilisent les principes suivants :

- à chaque niveau, les événements forment une partition de l'univers ;
- à partir du 2^e niveau, les probabilités des branches sont des probabilités conditionnelles ;
- la probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités des branches ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y conduisent.

Des modèles de référence en probabilité conditionnelle

Tirages successifs

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher dont trois rouges et deux noires. On tire successivement (et au hasard) deux boules de cette urne et on note leurs couleurs dans l'ordre des tirages effectués.

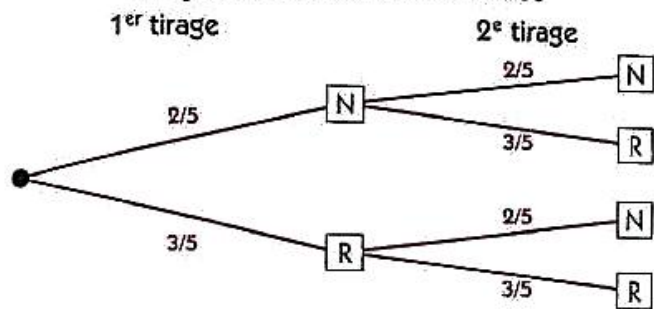
On considère les deux cas suivants : 1) Les tirages successifs sont avec remise ; 2) Les tirages successifs sont sans remise.

Calculons : la probabilité de tirer une boule noire en premier et une boule rouge en second, la probabilité de tirer une boule rouge en second.

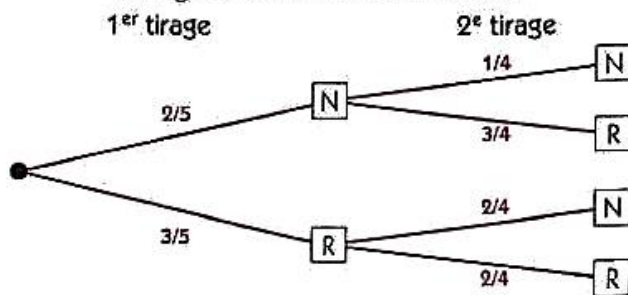
Pour chacun des cas, construisons un arbre de probabilité.

Ces deux tirages successifs s'effectuent dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires (lorsque l'on suppose les boules numérotées).

Tirages successifs avec remise

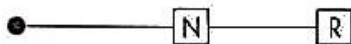


Tirages successifs sans remise



- Tirer une boule noire en premier et une boule rouge en second a pour probabilité celle du chemin :

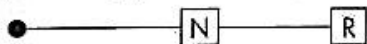
$$\text{d'où : } P(NR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$$



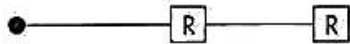
$$\text{d'où : } P(NR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

- Tirer une boule rouge en second a pour probabilité la somme des probabilités des chemins correspondants :

$$\text{d'où : } P(NR) + P(RR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$



$$\text{d'où : } P(NR) + P(RR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{10}.$$



Choix d'une urne puis tirage d'une boule

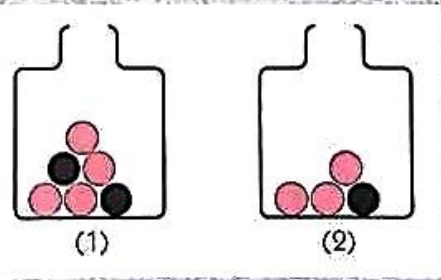
Revenons à l'exemple introductif des probabilités totales.

Deux urnes indiscernables contiennent des boules indiscernables au toucher,

- l'urne (1) contient 4 boules rouges et 2 boules noires,
- l'urne (2) contient 3 boules rouges et 1 boule noire.

On choisit une urne, on tire une boule de cette urne et on note la couleur de la boule tirée.

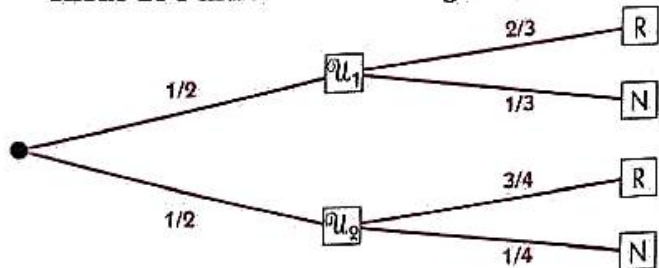
Représentons cette situation aléatoire par un arbre de probabilité.



Utilisons les mêmes notations que précédemment.

Choix de l'urne

Tirage d'une boule



Probabilités des chemins aléatoires

$$P(U_1 \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(U_1 \cap N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(U_2 \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(U_2 \cap N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

On a : $R = (U_1 \cap R) \cup (U_2 \cap R)$ et $(U_1 \cap R) \cap (U_2 \cap R) = \emptyset$

$$\text{d'où : } P(R) = P(U_1 \cap R) + P(U_2 \cap R) = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{17}{24} ; P(N) = 1 - P(R) = \frac{7}{24}.$$

2.1. Loi de probabilité – Fonction de répartition

Un exemple introductif sera traité en plusieurs étapes, ce qui nous permettra de dégager progressivement des nouvelles notions.

Variable aléatoire numérique

Exemple introductif 4 – 1^{re} étape

Une roue mobile autour d'un axe est partagée en dix secteurs de même aire et est coloriée en quatre zones comme l'indique la figure ci-contre.

1^{re} expérience aléatoire

On tourne la roue, après immobilisation de celle-ci, on note la zone indiquée par le repère. (Voir figure.)

Déterminons une probabilité P définie sur l'univers $\mathcal{U}$ des éventualités de cette expérience aléatoire.



L'univers $\mathcal{U}$ de l'expérience aléatoire – 1

Les éventualités de cette expérience aléatoire sont : zone noire, zone rouge, zone blanche, zone grise. Nous notons respectivement ces zones par : N ; R ; B ; G ; d'où : $\mathcal{U} = \{N ; R ; B ; G\}$.

Une probabilité P définie sur $\mathcal{U}$

La roue étant divisée en secteurs de même aire, on peut admettre raisonnablement que cette expérience aléatoire a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité d'événements élémentaires liés à l'univers suivant :

$$\{B_1 ; B_2 ; R_3 ; R_4 ; B_5 ; B_6 ; N_7 ; G_8 ; G_9 ; G_{10}\}.$$

Nous admettons donc que la probabilité P définie sur $\mathcal{U}$ est telle que la probabilité d'une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Or : $P(N) + P(R) + P(B) + P(G) = P(\mathcal{U}) = 1$

d'où : $P(N) = \frac{1}{10} = 0,1$

$$P(R) = 2 P(N) = 0,2$$

$$P(B) = 4 P(N) = 0,4$$

$$P(G) = 3 P(N) = 0,3.$$

Exemple introductif 4 – 2^e étape

Complétons par une règle de jeu la situation aléatoire décrite dans l'exemple introductif – 1.

2^e expérience aléatoire

Un joueur qui tourne la roue perd ou gagne une certaine somme d'argent suivant la règle de jeu ci-contre.

Examinons l'univers des éventualités numériques lié à cette règle de jeu.

Zone repérée	Gain algébrique
N	1 000 F
R	500 F
B	0 F
G	- 500 F

L'univers de l'expérience aléatoire - 2

À chaque éventualité e_i de $\mathcal{U}$, on associe le gain algébrique x_i du joueur.

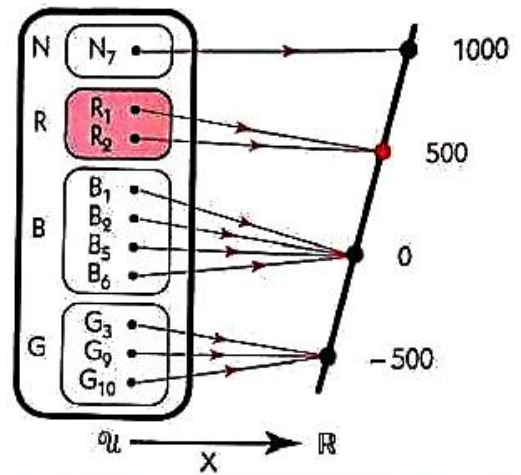
On dit que l'on a défini une variable aléatoire ; on la note X (X est une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$).

On a : $X(\mathcal{U}) = \{1\,000 ; 500 ; 0 ; -500\}$.

$X(\mathcal{U})$ est l'univers des éventualités de cette 2^e expérience aléatoire (il dépend de la règle de jeu introduite).

Les événements de l'univers $X(\mathcal{U})$

« Le joueur gagne 500 F » est un événement de l'univers $X(\mathcal{U})$; il est noté : $\{X = 500\}$ (c'est l'image par X de l'événement « La zone indiquée par le repère est rouge »).



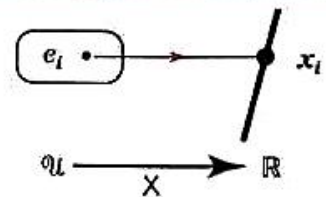
Définition

Lorsque à chaque éventualité e_i d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel x_i , on dit que l'on a défini une **variable aléatoire numérique** X .

$\mathcal{U}$ est l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire,

X est une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.

L'événement « X prend la valeur x_i » est noté : $\{X = x_i\}$.



Loi de probabilité - Fonction de répartition

Exemple introductif 4 - 3^e étape

L'objectif de cette 3^e étape de l'exemple introductif est de définir sur l'univers $X(\mathcal{U})$ une probabilité P' à partir de la probabilité P définie sur $\mathcal{U}$.

Une probabilité définie sur $X(\mathcal{U})$

Il s'agit, pour tout événement E de $X(\mathcal{U})$, de déterminer $P'(E)$ à l'aide de P et de X ;

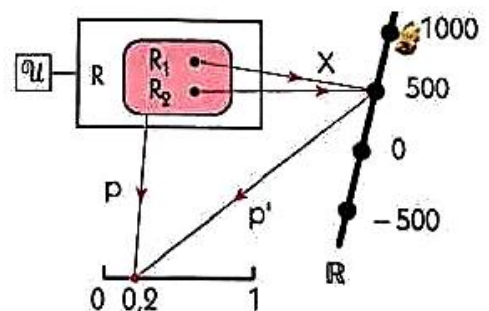
pour cela, on pose : $P'(\{500\}) = P(\{R_1 ; R_2\})$

$P'(\{500\})$ sera donc noté : $P(X = 500)$.

On fait de même pour chaque événement élémentaire de $X(\mathcal{U})$. On vérifie que P' est une probabilité définie sur $X(\mathcal{U})$.

Illustration de la situation aléatoire

Zone repérée	G	B	R	N
Gain algébrique x_i	-500	0	500	1 000
$P(X = x_i)$	0,3	0,4	0,2	0,1



Définition

Lorsque à chaque valeur x_i prise par une variable aléatoire X , on associe la probabilité p_i de l'événement $\{X = x_i\}$, on dit que l'on a défini la **loi de probabilité** de X (ou la **distribution** de X).

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut être présentée par un tableau.

Valeur de X x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$ p_i	p_1	p_2	...	p_n

Exemple introductif 4 - 4^e étape

Revenons à la situation aléatoire de l'exemple introductif.

- Par un diagramme en bâtons représentons graphiquement la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

- Désignons par $(X \leq x)$ l'évènement « X prend des valeurs inférieures ou égales à x », x étant un nombre réel.

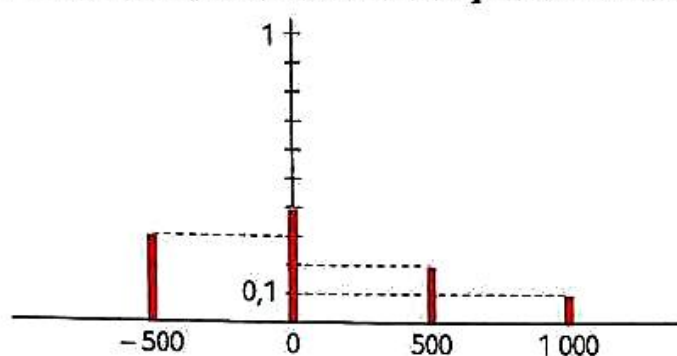
Étudions l'application $F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$
 $x \mapsto P(X \leq x)$.

Détermination de $P(X = x_i)$ où $x_i \in X(\mathcal{U})$

Tableau de la loi de probabilité

x_i	-500	0	500	1 000
$P(X = x_i)$	0,3	0,4	0,2	0,1

Diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X



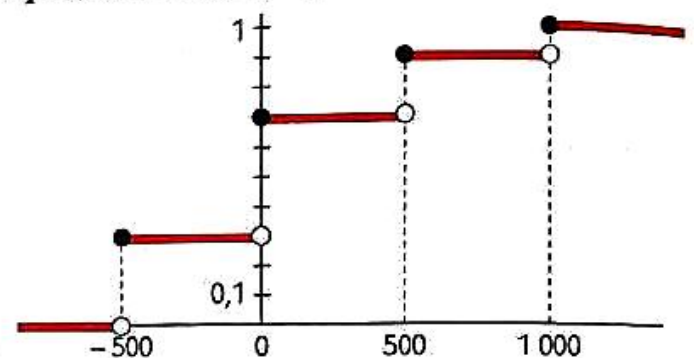
Détermination de $P(X \leq x_i)$ où $x_i \in X(\mathcal{U})$

Formules explicites de F

$$\begin{aligned} x < -500 & F(x) = 0 \\ -500 \leq x < 0 & F(x) = P(X = -500) = 0,3 \\ 0 \leq x < 500 & F(x) = F(-500) + P(X = 0) = 0,7 \\ 500 \leq x < 1\,000 & F(x) = F(0) + P(X = 500) = 0,9 \\ 1\,000 \leq x & F(x) = 1 \end{aligned}$$

F est appelée la fonction de répartition de X .

Représentation graphique de F



Définition

On appelle *fonction de répartition de la variable aléatoire X* l'application $F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto P(X \leq x).$$

F est définie par les formules explicites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{pour } x < x_1 & , F(x) = 0 \\ \text{pour } x_i \leq x < x_{i+1} & , F(x) = F(x_{i-1}) + P(X = x_i) \\ \text{pour } x_n \leq x & , F(x) = 1 \end{aligned}$$

Conséquences

F est une fonction croissante en escalier.

Exemple du lancer trois fois de suite d'une pièce de monnaie équilibrée

Un joueur lance trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Il gagne 200 F pour chaque apparition de **PILE** et il perd 100 F pour chaque apparition de **FACE**.

- Déterminer la probabilité P sur l'univers $\mathcal{U}$ des évènements de l'expérience aléatoire : *lancer trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée*.

- Définir par un tableau la variable aléatoire X donnant le gain pour chaque éventualité de $\mathcal{U}$.

- Déterminer la loi de probabilité de X .

- Déterminer la fonction de répartition F de X .

- Construire le diagramme en bâton de la loi de probabilité de X et la représentation graphique de la fonction de répartition F de X .

Probabilité P sur l'univers $\mathcal{U}$ des évènements de l'expérience aléatoire : *lancer trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée*.

$$\mathcal{U} = \{PPP; PPF; PFP; FPP; PFF; FPF; FFP; FFF\}$$

La pièce de monnaie était supposée parfaitement équilibrée, cette expérience a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.
Donc la probabilité d'un événement élémentaire de $\mathcal{U}$ est $\frac{1}{8}$.

Variable aléatoire X donnant le gain pour chaque éventualité de $\mathcal{U}$.

Éventualité de $\mathcal{U}$	PPP	PPF	PFP	FPP	PFF	FPF	FFP	FFF
Valeurs prises par X	600	300	300	300	0	0	0	-300

d'où : $X(\mathcal{U}) = (-300 ; 0 ; 300 ; 600)$

Probabilité sur l'univers $X(\mathcal{U})$ ou loi de probabilité de la variable aléatoire X

$$p_1 = P(X = -300) = \frac{1}{8} ; \quad p_3 = P(X = 300) = \frac{3}{8}$$

$$p_2 = P(X = 0) = \frac{3}{8} ; \quad p_4 = P(X = 600) = \frac{3}{8}$$

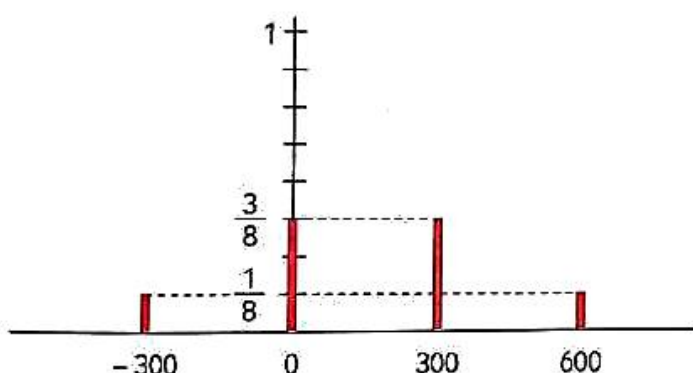
x_i	-300	0	300	600
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Fonction de répartition F de la variable aléatoire X

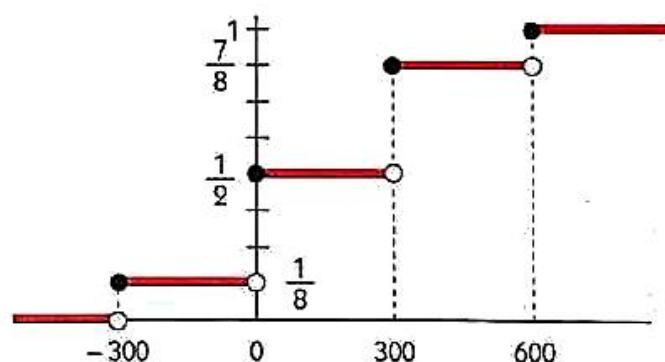
Du tableau précédent donnant la loi de probabilité de X , on déduit le tableau ci-dessous qui détermine la fonction de répartition F de X .

x_i	$-\infty$	-300		0		300		600	$+\infty$
$P(X \leq x_i)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	1

Diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X



Représentation graphique de la fonction de répartition F de X



Exercices

2.a X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-3	0	2	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Compléter la tableau qui détermine la fonction de répartition F de X et représenter graphiquement F .

x	$-\infty$	-3	0	2	5	$+\infty$
$F(x)$						

2.b X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est donnée par les formules explicites suivantes :

pour $x < -2$	$F(x) = 0$
pour $-2 \leq x < 1$	$F(x) = 0,2$
pour $1 \leq x < 3$	$F(x) = 0,4$
pour $3 \leq x < 5$	$F(x) = 0,7$
pour $5 \leq x$	$F(x) = 1$

Représenter graphiquement F .

Déterminer la loi de probabilité de X .

2.2. Espérance mathématique – Variance – Écart-type

Définition – Propriété

Exemple introductif 4 – 5^e étape

Sachant que la probabilité d'un événement est la fréquence théorique de cet événement, déterminons une estimation du gain moyen sur un grand nombre n de parties exécutées par le joueur.

Gain algébrique moyen du joueur

Pour un grand nombre n de parties exécutées par un joueur, on obtient le tableau suivant :

	G	B	R	N	Totaux
Nombres de sorties	$0,3n$	$0,4n$	$0,2n$	$0,1n$	n
Gain algébrique	$-500 \times 0,3n$	$0 \times 0,4n$	$500 \times 0,2n$	$1\,000 \times 0,1n$	$50n$

Le gain algébrique moyen du joueur est donc de 50 F ; c'est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X , on la note $E(X)$.

Calcul pratique de $E(X)$

x_i	-500	0	500	1 000	Totaux
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1	1
$x_i p_i$	-150	0	100	100	50

$E(X) = 50$

Interprétation en terme de jeu

Lorsque $E(X) > 0$, le jeu est avantageux pour le joueur.

Lorsque $E(X) < 0$, le jeu est désavantageux pour le joueur.

Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est dit équitable.

Définition

X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$, on appelle *espérance mathématique* de X le nombre réel noté $E(X)$ définie par :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

$E(X)$ est donc la moyenne des valeurs x_i pondérées par les nombres réels p_i , d'où la notation pour $E(X)$.

Remarque

L'espérance mathématique est un indicateur de tendance centrale, mais elle ne donne aucune information sur la façon dont sont groupées les valeurs de la variable aléatoire autour de l'espérance mathématique.

Exemple des deux loteries

Au cours d'une kermesse de la commune, deux loteries comportant chacune 1 000 numéros sont mises en place.

Chacun des 1 000 numéros de la 1^{re} loterie gagne 100 F.

Désignons par X la variable aléatoire mesurant le gain dans cette 1^{re} loterie.

On a : $x_1 = x_2 = \dots = x_{1000} = 100$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{1000} = \frac{1}{1\,000}$$

$$\text{or : } E(X) = \sum_{i=1}^{1000} x_i p_i$$

$$\text{d'où : } E(X) = 100 \times \frac{1}{1\,000} \times 1\,000 = 100.$$

Un seul des 1 000 numéros de la 2^e loterie gagne un gros lot de 100 000 F.

Désignons par Y la variable aléatoire mesurant le gain dans cette 2^e loterie.

On a : $y_1 = 1\,000$; $y_2 = \dots = y_{1000} = 0$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{1000} = \frac{1}{1\,000}$$

$$\text{or : } E(Y) = y_1 p_1 + \sum_{i=2}^{1000} y_i p_i$$

$$\text{d'où : } E(Y) = 100\,000 \times \frac{1}{1\,000} + 0 \times \frac{999}{1\,000} = 100.$$

On en déduit que : $E(X) = E(Y)$.

Cependant la dispersion des valeurs prises par une variable aléatoire autour de son espérance mathématique n'est pas la même pour X et pour Y. Pour rendre compte de cette dispersion, on introduit la notion de variance.

Définition

X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$, $E(X)$ étant noté m ,

- On appelle **variance** de X le nombre réel noté $V(X)$ définie par :

$$V(X) = E(X - m)^2 = p_1(x_1 - m)^2 + \dots + p_n(x_n - m)^2 = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - m)^2.$$

- On appelle **écart-type** de X, le nombre réel noté $\sigma(X)$ définie par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

■ Autre expression de la variance

$$\text{On a : } V(X) = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2m \sum_{i=1}^n p_i x_i + m^2 \sum_{i=1}^n p_i$$

$$\text{Or : } \sum_{i=1}^n p_i x_i = m = E(X) ; \sum_{i=1}^n p_i = 1 ; \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 = E(X^2)$$

$$\text{donc : } V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Exemples de calcul de $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$

■ Exemple des deux loteries

$$\begin{aligned} \text{On a : } V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{1000} x_i^2 p_i - 100^2 \\ &= \left(100^2 \times \frac{1}{1000}\right) \times 1000 - 100^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

La 1^{re} loterie est un jeu équitable.

$$\begin{aligned} \text{On a : } V(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^2 p_i - 100^2 \\ &= \left(100\,000^2 \times \frac{1}{1000}\right) - 100^2 \\ &= 10^7 - 10^4 > 0 \end{aligned}$$

La 2^e loterie est un jeu avantageux pour le joueur.

■ Exemple du lancer trois fois de suite d'une pièce de monnaie équilibrée

Calcul de l'espérance mathématique

x_i	-300	0	300	600	
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	Total
$x_i p_i$	$-\frac{300}{8}$	0	$\frac{900}{8}$	$\frac{600}{8}$	150

$E(X) = 150$

Calcul de la variance et de l'écart-type

$$\text{On a : } V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

x_i^2	90 000	0	90 000	360 000	
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	Total
$x_i^2 p_i$	$\frac{90\,000}{8}$	0	$\frac{270\,000}{8}$	$\frac{360\,000}{8}$	90 000

$E(X^2) = 90\,000$

$$\text{d'où : } V(X) = 90\,000 - 150^2 = 67\,500 ; \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{67\,500}.$$

Exercices

2.c Un dé cubique pipé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 est tel que :

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0,175 ; P(5) = 0,2 ; P(6) = 0,1.$$

On lance le dé deux fois de suite ; on note à chaque lancer le numéro de la face supérieure.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne la somme des deux chiffres obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X et construire son diagramme en bâtons.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique.

2.3. Épreuve de Bernoulli – Loi binomiale

Définition – Propriétés

■ Exemple introductif 5 – 1^{re} étape

Lors d'un lancer d'un dé parfait numéroté de 1 à 6, on convient d'appeler **SUCCÈS** l'évènement « le 6 sort » et **ÉCHEC** « le 6 ne sort pas ».
Déterminons la probabilité P_1 définie sur l'univers des deux éventualités de cette épreuve aléatoire.

On désigne par : S l'évènement « le 6 sort », E l'évènement « le 6 ne sort pas », P_1 la probabilité définie sur l'univers des éventualités {S ; E}.

En tenant compte de l'équiprobabilité des évènements élémentaires liés à la sortie de chacune des six faces du dé parfait, on obtient : $p = P_1(S) = \frac{1}{6}$; $q = P_1(E) = \frac{5}{6}$.

Une telle épreuve est appelée **épreuve de Bernoulli** de paramètre p .

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli**, toute épreuve aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités appelées **SUCCÈS** noté S et **ÉCHEC** noté E ou $\bar{S}$.

La probabilité p du succès est appelée **paramètre** de l'épreuve de Bernoulli.

■ Exemple introductif 5 – 2^e étape

On lance cinq fois de suite le dé et on note dans l'ordre de parution S ou E selon que le 6 sort ou non. Déterminons la probabilité d'obtenir exactement 2 SUCCÈS.

Cette nouvelle expérience aléatoire est la répétition cinq fois de suite de l'épreuve précédente de Bernoulli. Ces répétitions sont faites de manière indépendante puisque le résultat d'un lancer n'influe pas sur celui du suivant.

Cette expérience aléatoire est appelée **schéma de Bernoulli** de paramètres 5 et p .

Désignons par : P la probabilité définie sur l'univers des éventualités de ce schéma de Bernoulli, A l'évènement « le 6 sort exactement deux fois ».

– Déterminons la probabilité d'un évènement élémentaire de A.

Considérons l'évènement élémentaire ESEES ; il est contenu dans A. Compte tenu de l'indépendance des lancers,

on a : $P(\text{ESEES}) = P_1(E) \times P_1(S) \times P_1(E) \times P_1(E) \times P_1(S)$

$$= p^2 \times q^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

On en déduit que les évènements élémentaires de A sont équiprobables et ont chacun pour probabilité $p^2 \times q^3$.

– Déterminons le nombre d'évènements élémentaires qui composent A.

ESEES peut être illustré par les cases ci-contre :

E	S	E	E	S
---	---	---	---	---

Former ESEES revient à choisir 2 cases parmi les 5.

Or on sait qu'il y a C_5^2 manières de faire ce choix, d'où : $P(A) = C_5^2 \times p^2 \times q^3$.

Définition

On appelle **schéma de Bernoulli** une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Le nombre n des épreuves de Bernoulli et la probabilité p du succès sont appelés **paramètres** du schéma de Bernoulli.

■ Exemple introductif 5 – 3^e étape

On considère la variable aléatoire X , qui à chaque éventualité du schéma de Bernoulli défini ci-dessus, associe le nombre k de SUCCÈS ($0 \leq k \leq 5$).
Déterminons la loi de probabilité de X .

On a : $P(X = 2) = P(A) = C_5^2 \times p^2 \times q^3$.

De la même manière, on établit que : $P(X = k) = C_5^k \times p^k \times q^{5-k}$, $[0 \leq k \leq 5]$.

On démontre et nous admettons les propriétés suivantes :

Propriétés

$\mathcal{E}$ est un schéma de Bernoulli, suite de n épreuves,

p la probabilité d'avoir un SUCCÈS, q celle d'avoir un ÉCHEC,

X la variable aléatoire qui à chaque éventualité de $\mathcal{E}$ associe le nombre k de SUCCÈS ($0 \leq k \leq n$).

– La loi de probabilité de X est définie par :

$$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}.$$

Cette loi de probabilité de X est appelée *loi binomiale* à paramètres n et p .

– L'espérance mathématique et la variance de X sont définies par : $E(X) = np$; $V(X) = npq$.

■ ■ ■ Exemple d'étude d'une loi binomiale

Une étude statistique dans un pays d'Afrique montre que lors d'une naissance, la probabilité d'avoir une fille est de 51 %.

Considérons dans ce pays une famille de trois enfants sans jumeaux. On s'intéresse au nombre possible de filles de cette famille. Étudions pour cela la succession des trois naissances.

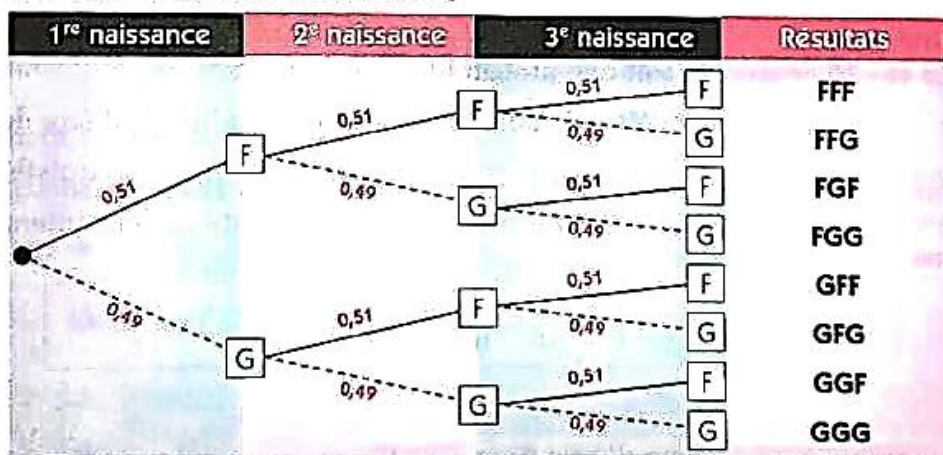
Schéma de Bernoulli

Dans cette famille de trois enfants sans jumeaux, la naissance d'un enfant est une épreuve de Bernoulli, car elle n'a que deux éventualités : Fille (notée F) et Garçon (notée G).

Considérons le schéma de Bernoulli constitué par la succession des trois naissances que l'on suppose identiques et indépendantes.

Chaque éventualité de ce schéma de Bernoulli est un triplet formé par F ou G.

Univers des éventualités du schéma de Bernoulli



Loi binomiale

Désignons par X la variable aléatoire qui à chacune de ces éventualités associe le nombre k avec $0 \leq k \leq 3$.

On a : $P(X = k) = C_3^k p^k q^{3-k}$, avec $p = 0,51$; $q = 0,49$;

d'où : $P(X = 0) = C_3^0 p^0 q^3 = (0,49)^3 \approx 0,1176$

$P(X = 1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \times 0,51 \times (0,49)^2 \approx 0,3673$

$P(X = 2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \times (0,51)^2 \times 0,49 \approx 0,3823$

$P(X = 3) = C_3^3 p^3 q^0 = (0,51)^3 \approx 0,1326$.

Espérance mathématique, variance, écart-type de X

$E(X) = np = 3 \times 0,51 = 1,53$; $V(X) = npq = 3 \times 0,51 \times 0,49 \approx 0,7497$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,7497} \approx 0,8656$.

TP1 Très faible probabilité de gagner au tiercé !

Exercice commenté

Il y aura vingt (20) chevaux au départ du grand Prix de l'Arc de Triomphe dimanche prochain à l'hippodrome de Longchamp. Cette course servira de support aux Paris Mutuels Urbains (P.M.U.) : Tiercé, Quarté et Quinté +. Seule nous intéresse l'arrivée des trois (3) premiers chevaux, c'est-à-dire le Tiercé. Gagner le tiercé dans l'ordre consiste à trouver le nom et l'ordre d'arrivée des trois premiers chevaux ; gagner le tiercé dans le désordre consiste seulement à trouver les noms des trois premiers. Dans cette partie on admet, à priori, que les vingt chevaux ont la même chance de gagner la course (hypothèse d'équiprobabilité).

1. Un turfiste (joueur) joue dans l'ordre les chevaux numérotés 3 ; 5 ; 7.
 - a) Calculer la probabilité pour que le joueur gagne le tiercé dans l'ordre.
 - b) Sachant que la mise du joueur est 300 FCFA. Calculer le montant du tiercé gagnant en supposant le jeu équitable.
 - c) Le P.M.U. supporte des frais estimés à 20% des recettes. Calculer dans ce cas le montant du tiercé gagnant sachant que le P.M.U. veut réaliser un bénéfice de 10% sur les recettes.
2. Un turfiste a joué dans l'ordre les chevaux numérotés 9 ; 10 ; 11. Calculer la probabilité qu'à ce joueur de gagner le tiercé dans le désordre.
3. On suppose dorénavant que les vingt chevaux sont de valeurs inégales :
 - Les chevaux numérotés 11 à 14 ont une probabilité individuelle de gagner égale à 0,8.
 - Les chevaux numérotés 15 à 20 ont chacun la même probabilité de gagner.
 Calculer la probabilité que le triplet (4 ; 11 ; 18) soit le tiercé dans l'ordre.

1. Un turfiste joue dans l'ordre les numéros 3 ; 5 ; 7
 - a) Probabilité pour que le joueur gagne le tiercé dans l'ordre

Première solution

Il y a équiprobabilité donc :

- le 4 a une chance sur 20 de gagner, soit une probabilité $\frac{1}{20}$ de gagner
- le 11 n'a plus qu'une chance sur 19 d'être deuxième soit une probabilité $\frac{1}{19}$ d'être deuxième.
- enfin le 18 a une chance sur 18 d'être troisième soit une probabilité $\frac{1}{18}$ d'être troisième.

Ces trois événements étant indépendants (en probabilité), la probabilité de leur intersection est le produit des probabilités de chacun d'eux,

d'où :

$$P(3 ; 5 ; 7) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{19} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{6840} = 0,000146 \approx 15 \times 10^{-5}$$

Remarque

Cette question s'apparente à un schéma d'urne finie avec tirage sans remise ou tirage exhaustif.

Deuxième solution (utilisation de l'analyse combinatoire)

Désignons par Ω l'ensemble des tiercés dans l'ordre. On a : $\text{Card}\Omega = A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$. Désignons par E l'évènement « (3 ; 5 ; 7) est le tiercé gagnant ».

Comme il y a équiprobabilité des tiercés, on a :

$$P(3 ; 5 ; 7) = \frac{1}{20 \times 19 \times 18} = \frac{1}{6840} = 0,000146 \approx 0,00015$$

$$P(3 ; 5 ; 7) = 15 \times 10^{-5}$$

b) Le jeu est équitable. Montant S du tiercé gagnant en FCFA.
On a : $300P(\Omega) = S \times P(3 ; 5 ; 7)$

$$S = 300 \text{ FCFA} \times 6840 = 2\,052\,000 \text{ FCFA}$$

c) Le P.M.U. ne verse au joueur que $(100 - 20 - 10)\%$ des recettes, c'est-à-dire 70% des recettes.
Le gagnant recevra alors :

$$\frac{2\,052\,000 \text{ FCFA} \times 70}{100} = 1\,436\,400 \text{ FCFA}$$

$$\text{Montant du tiercé gagnant : } 1\,436\,400 \text{ FCFA}$$

2. Calcul de la probabilité que les numéros 9 ; 10 ; 11 donnent le tiercé dans le désordre.

– Le 9 peut occuper la 1^{re}, la 2^e ou la 3^e place, donc le 9 a 3 chances sur 20 de figurer dans le tiercé, c'est-à-dire une probabilité de $\frac{3}{20}$.

– Un raisonnement analogue donne 2 chances sur 19 au 10, c'est-à-dire une probabilité de $\frac{2}{19}$ de figurer dans le tiercé.

– Le 11 n'a plus qu'une chance sur 18 d'être placé, c'est-à-dire une probabilité de $\frac{1}{18}$ d'être troisième à l'arrivée.

Donc la probabilité que 9 ; 10 ; 11 soit la « combinaison gagnante » ou non est :

$$\frac{3}{20} \times \frac{2}{19} \times \frac{1}{18} = \frac{6}{6840}$$

La probabilité que 9 ; 10 ; 11 soit le tiercé gagnant étant $\frac{1}{6840}$ d'après ce qui précède, la probabilité que 9 ; 10 ; 11 soit le tiercé dans le désordre est :

$$\frac{6}{6840} - \frac{1}{6840} = \frac{5}{6840}$$

3. Les chavaux sont de valeurs inégales.

Calcul de la probabilité que (4 ; 11 ; 18) soit le tiercé gagnant.

– Déterminer la probabilité P_1 de chaque cheval numéroté de 15 à 20.

Dans chaque sous-ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $\{11, 12, 13, \dots, 14\}$, $\{15, 16, \dots, 20\}$, il y a équiprobabilité des événements élémentaires, d'où : $(0,05 \times 10) + (0,08 \times 4) + 6P_1 = 1$

(la somme des probabilités est égale à 1, où P_1 désigne la probabilité de chacun des chevaux numérotés de 15 à 20).

On a immédiatement : $P_1 = 0,03$

• Justifier que la probabilité pour que (4 ; 11 ; 18) soit le tiercé dans l'ordre est obtenue par :

$$0,05 \times \frac{0,08}{1 - 0,05} \times \frac{0,03}{1 - (0,05 + 0,08)} = 145,1 \times 10^{-6}$$



TP2 Loi binomiale et contrôle de qualité

Exercice commenté

Une usine fabrique des pièces dont 1,8% sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'une pièce est bonne, on l'accepte avec une probabilité de 0,97.
- sachant qu'une pièce est mauvaise on la refuse avec une probabilité de 0,99.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?
2. a) Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,00018.
b) Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée est 0,02946.
c) Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle.
3. Si on contrôle 5 pièces de façon indépendante qu'elle est la probabilité qu'il y ait exactement deux erreurs de contrôle ? 3 erreurs de contrôle ?

Désignons par : A l'événement « la pièce est défectueuse » et B l'événement « la pièce est refusée »
on obtient : $\bar{A}$ l'événement « la pièce est bonne » et $\bar{B}$ l'événement « la pièce est acceptée »

On a : $P_A(B) = 0,99$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,97$.

1. Probabilité qu'une pièce soit défectueuse : $P(A) = 0,018$.

2. a) Probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée : $P(A \cap \bar{B}) = P_{\bar{A}}(\bar{B}) \times P(A)$.

On applique la formule des probabilités conditionnelles.

On a : $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,99 = 0,01$

d'où : $P(A \cap \bar{B}) = 0,01 \times 0,018 = 0,00018$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,00018$$

b) Probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée : $P(\bar{A} \cap B) = P_A(B) \times P(\bar{A})$.

Or : $P_{\bar{A}}(B) = 1 - P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,97 = 0,03$

d'où : $P(\bar{A} \cap B) = 0,03 \times 0,982 = 0,02946$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,02946$$

c) Il y a une erreur dans le contrôle si :

- soit la pièce est bonne et refusée i.e. l'événement $(\bar{A} \cap B)$ est réalisé,

- soit la pièce est mauvaise et acceptée i.e. l'événement $(A \cap \bar{B})$ est réalisé.

Désignons par E l'événement « avoir une erreur dans le contrôle ».

On a : $P(E) = P[(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0,0018 + 0,02946$

car $(\bar{A} \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ sont incompatibles.

$$P(E) = 0,02964$$

3. Probabilité d'avoir des erreurs

Désignons par D l'événement « il y a exactement deux erreurs dans le contrôle ». On a ici une variable binomiale de paramètres 5 et 0,02964, car soit il y a une erreur dans le contrôle avec une probabilité de 0,02964, soit il n'y a aucune erreur de contrôle, d'où :

$$P(D) = C_5^2 (0,02964)^2 (1 - 0,02964)^3$$

$$P(D) = 8,02 \cdot 10^{-3}$$

• Calculer de même la probabilité qu'il y ait 3 erreurs de contrôle.

Cette probabilité vaut : $C_5^3 (0,02964)^3 (1 - 0,02964)^2$.

TP3. Probabilité conditionnelle et suite arithmético-géométrique

Exercice commenté

1. a est un nombre réel. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par :

pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} = -\frac{3}{10}u_n + \frac{4}{10}$ et la condition initiale $u_1 = a$.

a) (v_n) est la suite de nombres réels définie par :

pour tout nombre entier naturel non nul n , $v_n = 13u_n - 4$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k . Exprimer v_n en fonction de n et a .

b) Prouver que : pour tout nombre entier naturel non nul n , $u_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})(-\frac{3}{10})^{n-1}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2. Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de classe.

Pour tout nombre entier naturel non nul n , on note E_n l'événement « le professeur oublie ses clés le jour n », $\bar{E}_n$ l'événement contraire de E_n , P_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\bar{E}_n$.

On note a la probabilité P_1 qu'il oublie ses clés le premier jour. On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le jour n , il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie encore le jour suivant $(n+1)$ est $\frac{1}{10}$.

- si le jour n , il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $(n+1)$ est $\frac{4}{10}$.

a) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n$.

Pour cela, on pourra d'abord calculer les probabilités conditionnelles $P_{E_n}(E_{n+1})$ et $P_{\bar{E}_n}(E_{n+1})$.

En déduire l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n .

b) À l'aide des résultats de la question 1. donner l'expression de P_n en fonction de a et n . La limite p de P_n dépend-elle de la condition initiale a ?

D'après Bac

1. Étude de la suite (u_n)

(u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -\frac{3}{10}u_n + \frac{4}{10} \quad [n \in \mathbb{N}^*] \end{cases}$$

a) Montrons que la suite (v_n) définie par : $v_n = 13u_n - 4$, est une suite géométrique.

• Calculer : $v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4$

• Démontrer que : $v_{n+1} = \frac{3}{10}(13u_n - 4)$

$$v_{n+1} = \frac{3}{10}v_n$$

• Conclure en utilisant la définition que (v_n) est une suite géométrique de 1^{er} terme v_1 et de raison k

$$v_1 = 13u_1 - 4 = 13a - 4 \quad \text{et} \quad k = -\frac{3}{10}$$

On obtient : $v_n = (13a - 4)(-\frac{3}{10})^{n-1}$

b) Prouvons que : $u_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})(-\frac{3}{10})^{n-1}$.

On a : $v_n = 13u_n - 4$; $u_n = \frac{1}{13}(v_n + 4)$

donc : $u_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})(-\frac{3}{10})^{n-1}$

c) Calculons $\lim u_n$

On a : $\lim(-\frac{3}{10})^{n-1} = 0$ (car $|\frac{3}{10}| < 1$).

donc : $\lim u_n = \frac{4}{13}$

Par conséquent la suite (u_n) converge vers $\frac{4}{13}$.

2. Un professeur oublie ses clés.

a) Montrons que :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n$$

On a : $P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{10}$ et $P_{\bar{E}_n}(E_{n+1}) = \frac{4}{10}$.

Appliquons la formule des probabilités totales à E_n et $\bar{E}_n$.

On a : $P_{n+1} = P(E_{n+1})$ [$n \geq 1$]

$$P_{n+1} = P_{E_n}(E_{n+1}) \times P(E_n) + P_{\bar{E}_n}(E_{n+1}) \times P(\bar{E}_n)$$

$$= \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n).$$

Donc : $P_{n+1} = -\frac{3}{10}P_n + \frac{4}{10}$

b) Déterminons une expression de P_n en fonction de a et n

Puisque $P_1 = a = u_1$ et que (P_n) et (u_n) vérifient la même formule de récurrence,

alors, pour tout $n \geq 1$, $P_n = u_n$.

donc : $P_n = \frac{4}{13} + (a - \frac{4}{13})(-\frac{3}{10})^{n-1}$

** La question 1. prouve que (P_n) converge vers $P = \lim u_n = \frac{4}{13}$, limite qui est indépendante de la condition initiale $P_1 = u_1 = a$.

Exercices

ENTRAÎNEMENT

Probabilités conditionnelles

1 Un sondage effectué dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage donne les résultats suivants :

- 65 % des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage ;
- parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70 % sont des écologistes ;
- parmi les personnes favorables à la construction, 30 % sont des écologistes.

On note C l'événement « la personne interrogée est contre la construction » et $\bar{C}$ l'événement contraire.

On note E l'événement « la personne interrogée est écologiste ».

Calculer les probabilités $p(C)$, $p(E/C)$, $p(C/E)$.

D'après Bac

2 Une usine fabrique des stylos à bille. Une étude statistique a montré que 90 % de la production ne présente pas de défaut.

Chaque stylo est soumis à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 94 % des stylos avec défaut et accepte 92 % des stylos sans défaut.

On choisit au hasard un stylo avant son passage au contrôle.

On désigne par D l'événement « le stylo est accepté à l'issue du contrôle ».

Calculer les probabilités des événements suivants :

- E_1 « le stylo est accepté et n'a pas de défaut » ;
- E_2 « le stylo est accepté et a un défaut ».

D'après Bac

3 Dans cet exercice, les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, dont 2 faces sont bleues, les autres faces étant rouges.

On le lance 5 fois de suite, les lancers sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une fois une face rouge, dans cet ordre ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une face rouge ?

D'après Bac

4 Paul aime le chocolat, mais il doit suivre un régime pendant une année.

Le premier jour, il ne mange pas de chocolat. Si un jour donné n , ($1 \leq n \leq 364$), Paul ne mange pas de chocolat, il y a une chance sur 5 qu'il n'en mange pas le lendemain. Si ce même jour, Paul mange du chocolat, il y a une chance sur 2 qu'il n'en mange pas le lendemain.

Pour $n \geq 1$, on désigne par F_n l'événement « Paul ne mange pas de chocolat le jour n » et par P_n la probabilité de F_n .

Chaque affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

a) $P(F_2/F_1) = \frac{1}{5}$.

b) Pour $n \geq 3$, on a $P(F_n/F_{n-1}) = \frac{1}{5}$ et $P(F_n/\bar{F}_{n-1}) = \frac{1}{2}$.

c) Pour $n \geq 2$, on a $P_n = -\frac{3}{10}P_{n-1} + \frac{1}{2}$.

d) Pour $n \geq 1$, on a $P_n - \frac{5}{13} = \frac{8}{13} \times (-0,3)^{n-1}$.

D'après Concours FESIC, 1995

Variable aléatoire

5 Une association organise une tombola. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus.

L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 62 000 francs, 9 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 7 000 francs, 50 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 500 francs, les autres sont perdants.

1. On choisit au hasard un billet. Tous les billets ont la même probabilité d'être choisis.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « le billet choisi gagne un lot d'une valeur de 7 000 francs » ;

B « le billet choisi est perdant ».

2. Les billets sont vendus 500 francs. Que rapportera la tombola au trésorier de l'association ?

3. On appelle gain d'un billet la différence entre le montant du lot et le prix d'achat du billet.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque billet choisi au hasard le gain de ce billet.

a) Donner les différentes valeurs de X.

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

6 On jette en même temps un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. On convient d'associer à cette expérience le nombre indiqué sur la face supérieure du dé si la pièce de monnaie marque pile, et le double de ce nombre si la pièce marque face.

On considère X la variable aléatoire « nombre ainsi obtenu ».

1. Donner la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

7 On jette successivement et indépendamment sur une table 2 dés tétraédriques réguliers dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On considère la variable aléatoire Z égale à XY où X est le nombre lu sur la face supérieure du premier dé et Y le nombre lu sur la face supérieure du deuxième dé.

1. Donner la loi de probabilité de Z.

2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de Z.

8 Un tournoi de football se déroule entre 5 équipes. Chaque équipe doit rencontrer une fois et une fois seulement les 4 autres.

1. Combien y-a-t-il de matchs joués ?

Combien chaque équipe joue-t-elle de matchs ?

2. À chaque rencontre, on admet que chaque équipe a la même probabilité de gagner, de faire match nul ou de perdre.

À chaque rencontre, on attribue :

– 2 points à l'équipe victorieuse ;

– 1 point à chaque équipe s'il y a match nul ;

– 0 point à l'équipe perdante.

On considère X la variable aléatoire « le nombre de points obtenus par une équipe à la fin du tournoi ».

Donner la loi de probabilité de X .

3. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

9 On tire au hasard 3 cartes d'un jeu de 32 cartes. On considère la variable aléatoire X « nombre d'as tirés ».

1. Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X dans les cas suivants :

a) on tire les trois cartes simultanément ;

b) on remet dans le jeu la carte tirée avant d'en tirer une autre.

2. Comparer ces deux résultats.

10 Un jeu consiste à lancer deux fois de suite un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On considère la variable aléatoire X « somme des numéros sortis ».

1. Donner la loi de probabilité de X .

2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

3. Donner et représenter la fonction de répartition de X . En déduire la probabilité des événements :

$$X \leq 4 ; 5 \leq X \leq 8 \text{ et } X \geq 9$$

4. Le joueur perd 1000 F si $X \leq 4$, n francs si $5 \leq X \leq 8$ et gagne 2000 F si $X \geq 9$.

Déterminer n pour que l'espérance mathématique du gain soit nulle.

11 Une urne contient deux boules noires et une boule blanche. On tire une boule. Si la boule est blanche, le jeu est terminé. Si la boule est noire, on la remet dans l'urne et on procède à un nouveau tirage d'une boule. Le jeu est terminé si la boule est blanche, la boule est remise dans l'urne si elle est noire, et on procède à un nouveau tirage d'une boule, et ainsi de suite.

Le nombre de tirages à effectuer pour voir apparaître une boule blanche, et donc pour voir se terminer le jeu, est une variable aléatoire.

1. Donner la loi de probabilité de cette variable aléatoire. Vérifier que la somme des probabilités correspondantes est égale à 1.

2. On désigne par X la variable aléatoire ainsi définie. Calculer :

a) la probabilité que $X > 5$;

b) la probabilité que $X \leq 7$;

c) la probabilité que $5 \leq X \leq 8$.

3. Calculer l'espérance mathématique de X .

12 On dispose d'un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Lorsqu'on lance ce dé, on suppose que la probabilité d'apparition d'une face dont le numéro est pair est le double de la probabilité d'apparition d'une face dont le numéro est impair.

1. Calculer les probabilités d'obtenir chaque face.

2. Une personne qui lance le dé obtient les résultats suivants :

– si la face 1 ou la face 6 apparaît, elle gagne 1000 F ;

– si la face 3 apparaît, elle ne gagne rien ;

– si une autre face apparaît, elle gagne 500 F.

On considère la variable aléatoire X « gain du joueur ».

a) Donner la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

c) Donner et représenter la fonction de répartition de X .

13 Dans une urne, il y a 18 boules blanches et 10 boules rouges, indiscernables au toucher. On considère l'épreuve qui consiste à extraire au hasard, l'une après l'autre et sans remise deux boules de l'urne.

On est dans une situation d'équiprobabilité. On donnera pour chaque résultat la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

1. Déterminer la loi de probabilité de l'événement E « la première boule tirée est blanche ».

2. On répète cinq fois de suite l'épreuve précédente ; après chaque épreuve les deux boules tirées sont remises dans l'urne. Les dix épreuves élémentaires sont donc indépendantes.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque partie de dix épreuves associe le nombre de fois que se produit l'événement E .

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité de l'événement F « E se produit exactement deux fois ».

14 On considère une épreuve aléatoire débouchant sur deux éventualités, succès et échec, de probabilités respectives 0,8 et 0,2.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k de succès.

On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à n épreuves aléatoires indépendantes le nombre k d'échecs.

1. Quelles sont les lois suivies par X et Y ?

Donner, en fonction de n , l'expression de :

$$P(X = k) ; P(Y = k) ; P(X = 0) ; P(X \geq 1) ; P(Y = n).$$

2. On suppose $n = 10$. Calculer :

$$P(X = 0) ; P(X = 2) ; P(X \leq 2) ; P(X > 2) ;$$

l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Tous les résultats seront donnés à 10^{-6} près par défaut.

Problèmes

15 Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines. Chaque semaine, on décide donc, pour chaque appareil, de faire appel ou non au technicien. Pour un certain type de machines, le technicien constate :

- qu'il doit intervenir la première semaine ;
 - que s'il est intervenu la $n^{\text{ième}}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)^{\text{ième}}$ semaine est égale à $\frac{3}{4}$;
 - que s'il n'est pas intervenu la $n^{\text{ième}}$ semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)^{\text{ième}}$ semaine est égale à $\frac{1}{10}$.
- On désigne par E_n l'événement « le technicien intervient la $n^{\text{ième}}$ semaine » et par P_n la probabilité de l'événement E_n .

1. Déterminer les nombres :

$$P(E_1), P(E_{n+1}/E_n) \text{ et } P(E_{n+1}/\overline{E_n})$$

puis en fonction de P_n :

$$P(E_{n+1}/E_n) \text{ et } P(E_{n+1}/\overline{E_n})$$

2. En déduire que pour tout nombre entier naturel n non nul :

$$P_{n+1} = \frac{3}{20} P_n + \frac{1}{10}.$$

3. On pose : $q_n = P_n - \frac{2}{7}$.

- Montrer que la suite (q_n) est une suite géométrique.
- En déduire l'expression de P_n en fonction de n .
- Pour quelles valeurs de l'entier n , la probabilité que le technicien intervienne la $n^{\text{ième}}$ semaine est-elle inférieure à $\frac{3}{10}$.

D'après Bac

16 Problème des trois portes

Vous êtes sur un plateau de télévision, à un jeu dont le prix est une voiture. Devant vous, il y a 3 portes fermées et un animateur. Derrière l'une de ces 3 portes se trouve la voiture à gagner.

L'animateur, qui sait où se trouve la voiture, vous demande de désigner l'une des 3 portes. Votre choix fait, il n'ouvre pas la porte que vous lui avez désignée, mais l'une des 2 autres, derrière laquelle ne se trouve pas la voiture (il peut en effet toujours ouvrir une porte derrière laquelle il n'y a pas la voiture et que vous n'avez pas désignée).

Dès lors, il vous permet de changer d'avis, c'est-à-dire qu'il vous demande si vous maintenez votre choix initial ou si vous changez votre choix initial en désignant l'autre porte encore fermée. Votre choix est maintenant décisif car il ouvrira la porte que vous désignerez finalement : si la voiture est derrière, vous gagnez, sinon, vous avez perdu.

Que faites-vous ? C'est-à-dire maintenez-vous votre choix initial ou le changez-vous, votre but étant bien sûr d'avoir la plus grande probabilité de gagner la voiture !

N.B. : Ne vous méprenez pas, car ce problème est bel et bien un problème de probabilité conditionnelle !

17 Une usine de montage fabrique une série de cellulaires. La fabrication comporte deux phases. La première phase fait apparaître un défaut α dans 2 % des cas ; la seconde phase fait apparaître un défaut β dans 12 % des cas.

1. Un cellulaire est tiré au hasard. On définit les événements suivants :

- « le cellulaire tiré présente le défaut α » ;
- « le cellulaire tiré présente le défaut β ».

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

C « le cellulaire tiré présente les deux défauts » ;

D « le cellulaire tiré ne présente aucun des deux défauts ».

2. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard et successivement huit cellulaires. On considère que le nombre de cellulaires fabriqués est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages sont indépendants. On admet que la probabilité qu'un cellulaire choisi au hasard dans la production ne présente aucun des deux défauts α et β est 0,885.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement de huit cellulaires le nombre de cellulaires sans aucun des deux défauts α et β .

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; préciser les paramètres de cette loi.

b) Déterminer la probabilité de l'événement F « quatre cellulaires au moins n'ont aucun des deux défauts α et β ». On donnera la valeur exacte de cette probabilité puis une valeur approchée au millièmes près par défaut.

18 Une entreprise de transport de matériaux de construction utilise dix camions. Pour chacun d'eux la probabilité de l'événement « tomber en panne un jour donné » est 0,036 quel que soit le jour. On suppose que les éventuelles pannes sont indépendantes et réparties dans la journée.

On désigne par X la variable aléatoire qui à tout jour ouvrable associe le nombre de camions tombés en panne ce jour-là.

1. X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X . Que représente $E(X)$?

3. On choisit un jour au hasard. Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de la probabilité de l'événement A « 5 camions au moins tombent en panne ce jour-là ».

4. Les bureaux de l'entreprise sont ouverts 250 jours par an. On désigne par Y la variable aléatoire qui à toute année de 250 jours associe le nombre de jours où se produit l'événement A .

Dans ce qui suit, on prend $P(A) = 0,009$.

a) Déterminer la loi de la variable Y .

b) Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ de la variable aléatoire Y .

c) Calculer $\sigma^2(X)$ et $\sigma^2(Y)$, variance de X et variance de Y .

d) Calculer la covariance σ_{XY} des variables aléatoires X et Y , notée aussi $\text{cov}(X; Y)$.

19 p est un nombre réel ($0 < p < 1$). Un coureur s'entraîne sur un parcours comportant n haies numérotées de 1 à n . Pour chaque nombre entier naturel i tel que $1 \leq i \leq n$, la probabilité de renverser la $i^{\text{ième}}$ haie est p . Le coureur poursuit son parcours jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ haie quel que soit le nombre de haies renversées. On désigne par X la variable aléatoire définie comme suit : $X = n+1$, si aucune haie n'est renversée ; $X = k$, si k est le numéro de la première haie renversée.

a) Calculer en fonction de p et k la probabilité $P(X = k)$. Préciser $P(X = 1)$ et $P(X = n+1)$. Vérifier que l'on a :

$$P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = n+1) = 1.$$

b) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n et p .

D'après Bac

INDEX

des notions abordées

A

Abel - 205
 Accroissement d'une population - 199
 Acoustique (log) - 100
 Affixe - 213
 Ajustement - 277
 Ajustement affine - 277
 Amortissement de capital - 185
 Applications bijectives - 23
 Applications injectives - 24
 Applications surjectives - 25
 Approximation affine - 36
 Arbre de probabilité - 318
 Archimède - 141
 Arguments - 214
 Associative (loi) - 254
 Axe de symétrie - 61
 Axe imaginaire - 213
 Axe réel - 213

B

Barycentre - 243
 Bernoulli - 59 - 191 - 293
 Bijection complexe - 232
 Bijection continue strictement monotone - 26
 Bijection réciproque - 27
 Borel - 293
 Branches infinies - 63
 Branches paraboliques - 64
 Briggs - 81

C

Calcul approché des zéros d'une fonction continue - 21
 Calcul approché d'une intégrale - 156
 Calcul d'aires - 154
 Calcul de volumes - 157
 Calcul d'intégrales - 149 - 165
 Calcul dans $\mathbb{C}$ - 209
 Calcul de limite - 14
 Calcul des probabilités (modèles de référence) - 303
 Cauchy - 141 - 165 - 191 - 293
 Centre de symétrie - 60
 Chemin aléatoire - 318
 Chimie (log) - 100
 Chinguetti - 241
 Clairaut - 191
 Coefficient de corrélation linéaire - 284
 Coefficient directeur de la droite de régression - 284
 Coefficients binomiaux - 295
 Commutative (loi) - 254
 Conditions initiales - 198
 Conjugué d'un nombre complexe - 211
 Continuité en a - 8
 Continuité sur un intervalle - 17
 Convergence d'une suite - 170
 Convergence d'une suite monotone - 174
 Convergence d'une suite récurrente - 176
 Corps commutatif - 255
 Corrélation linéaire - 284
 Courbes asymptotiques - 75
 Courbes paramétrées - 201
 Covariance d'une série statistique double - 281
 Critère de continuité en a - 8
 Croissances comparées - 132

D

D'Alembert - 191

Décharge dans un circuit RC - 200
 Démonstration (tableaux récapitulatifs) - 78
 Démonstration par contraposé - 31
 Démonstration par disjonction des cas - 78
 Démonstration par exemple, par contre-exemple - 78
 Démonstration par implication - 31
 Démonstration par l'absurde - 78
 Démonstration par récurrence - 55
 Denjoy - 141
 Dénombrer (tableau récapitulatif) - 296
 Dérivabilité à droite en x_0 - 38
 Dérivabilité à gauche en x_0 - 38
 Dérivabilité en x_0 - 36
 Dérivabilité sur un intervalle - 39
 Dérivée (tableaux récapitulatifs) - 46
 Dérivée de la réciproque d'une bijection - 44
 Dérivées d'une fonction composée - 42
 Dérivées successives - 41
 Descartes - 59
 Détermination de primitives - 51 - 53
 Distributive (loi) - 255
 Droite de régression - 283
 Droites des moindres carrés - 283

E

Écart-type - 325
 Écriture complexe - 232
 Énoncés existentiels - 77
 Énoncés universels - 77
 Ensemble d'étude - 62
 Ensemble de nombres - 207
 Ensemble de nombres complexes - 206
 Épreuve de Bernoulli - 326
 Équation d'un plan - 249
 Équation d'une sphère - 250
 Équations différentielles (tableau récapitulatif) - 197
 Équations différentielles - 192
 Équiprobabilité - 303
 Espace vectoriel - 256
 Espérance mathématique - 324
 Eudoxe - 141
 Euler - 105 - 216
 Événements (tableau récapitulatif) - 300
 Événements - 298
 Événements - 298
 Expérience ou épreuve aléatoire - 298
 Exponentiel - 216

F

Fermat (Pierre de) - 141 - 293
 Fonction continue strictement monotone - 19
 Fonction de répartition - 321
 Fonction exponentiel népérienne - 106
 Fonction exponentiel de base a - 125
 Fonction logarithme de base a - 101
 Fonction logarithme décimale - 100
 Fonction logarithme népérien - 84
 Fonction périodique - 62
 Fonction puissance d'exposants rationnels - 28 - 30
 Fonction racine $n^{\text{ième}}$ - 29
 Fonctions élémentaires - 8
 Fonctions puissances d'exposants réels - 128
 Forme algébrique - 287
 Formes indéterminées - 12
 Formes trigonométriques - 215
 Formule du binôme de Newton - 295
 Formules d'Euler - 218

Formules de Moivre - 218
Formules des probabilités totales - 317

G

Galois - 205
Gauss (méthode de) - 260
Gauss - 269
Groupe commutatif - 255

H

Hamilton - 205
Hermite - 81
Homothéties - 233 - 236

I

Inégalité de la moyenne - 147
Inégalités des accroissements finis - 48
Intégrale et aire - 143
Intégrale et primitive - 142
Intégration par parties - 153
Irrationnel (le nombre) - 84

J

Jacobi - 259

L

Lagrange - 191
Laplace - 293
Le Gendre - 269
Lebesgue - 141 - 293
Légende du jeu d'échec - 123
Leibniz - 59
Limite à droite - 9
Limite à gauche - 9
Limites de référence - 9 - 133
Limite d'une fonction (tableaux récapitulatifs) - 8
Limite d'une suite (tableaux récapitulatifs) - 173
Limite et inégalités - 14
Limite (opérations - composition) 11 - 12
Lipschitz - 191
Loi binomiale - 326
Loi de composition externe - 256
Loi de composition interne - 255
Loi de probabilité - 321
Loi horaire - 36

M

Maxwell - 191 - 293
Mayer (méthode de) - 279
Mesure de l'efficacité d'un ajustement affine - 280
Million - milliard - 105
Modèle de référence en probabilité - 303
Modèle de référence en probabilité conditionnelle - 319
Module d'un nombre complexe - 211
Moindres carrés (méthode des) - 280

N

Neper ou Napier - 81 - 105
Nombre a^x ($x > 0$) - 124
Nombre dérivé à droite en x_0 - 37
Nombre dérivé à gauche en x_0 - 37
Nombre dérivé en x_0 - 36
Nombre réel e - 84
Nombres « imaginaires purs » - 208
Nombres A_n^p , $n!$, C_n^p - 294
Nombres complexes - 206
Notation différentielle - 41
Nuage de points - 274

O

Opérateurs élémentaires (sur les équations) - 260
Organigrammes (branches infinies) - 65
Orientation d'un plan - 251
Orientation de l'espace - 251
Oscillations non amorties - 199

P

Partition d'un ensemble - 317

Pascal - 167 - 293 - 295

Passage à la limite dans une inégalité - 14

Plan complexe - 213

Plan d'étude d'une fonction - 67

Point anguleux - 38

Point image - 213

Point moyen - 278

Primitives (tableaux récapitulatifs) - 53

Primitives - 49

Probabilité d'un événement - 297

Probabilités conditionnelles - 314

Probabilités totales - 316

Produit scalaire (tableau récapitulatif) - 244

Produit vectoriel - 25

Prolongement par continuité - 10

Propriétés algébriques de $\ln$ (tableaux récapitulatifs) - 86

Propriétés algébriques de $\ln$ - 84

Propriétés (tableaux récapitulatifs) - 107

Q

Quantificateur existentiel - 77

Quantificateur universel - 97

R

Racine cubique de l'unité - 221

Racine d'un nombre complexe - 219

Raison d'une suite arithmétique - 177

Raison d'une suite géométrique - 180

Remboursement de prêt - 185

Représentation géométrique d'un nombre complexe - 213

Résolution d'un système linéaire
(tableau récapitulatif) - 265

Ricatti - 191

Riemann - 141

Rotations - 233 - 235

S

Schéma de Bernoulli - 326

Séries statistiques doubles (cas discret) - 270

Séries statistiques doubles
(cas du regroupement en classes) - 272

Séries statistiques marginales - 271

Similitudes directes du plan - 237

Sismologie (log) - 100

Suite (tableaux récapitulatifs) - 166

Suite arithmétique - 177

Suite convergente - 170

Suite divergente - 171

Suite géométrique - 180

T

Tangente (équation - coefficient directeur) - 36

Tangente à droite - 38

Tangente à gauche - 38

Tangente verticale - 39

Trajectoire - 36

Transformations du plan (tableau récapitulatif) - 233

Transformations visuelles du plan - 234

Triangle de Pascal - 294 à 295

U

Univers - 298

V

Valeur moyenne d'une fonction - 147

Variable aléatoire - 320

Variance - 325

Variation d'une composée - 66

Vecteur-image - 213

Vecteur normal à un plan - 247

Vecteurs orthogonaux (tableau récapitulatif) - 245

Vecteurs de l'espace (tableau récapitulatif) - 242

Vitesse instantanée - 36

Vitesse moyenne - 36